

Тучковенко Ю.С., к.ф.-м.н., с.н.с.

*Одесский филиал Института биологии южных морей НАН Украины
Одесский гидрометеорологический институт*

Математическая модель для расчета ветровых течений в Одесском регионе северо-западной части Черного моря

Описана трехмерная гидродинамическая модель, описывающая циркуляцию вод в Одесском регионе северо-западной части Черного моря. Приведены результаты расчетов циркуляции вод при ветрах различных направлений.

Под Одесским регионом северо-западной части Черного моря (СЗЧМ) в данном случае подразумевается акватория, прилегающая к городу-порту Одессе и портам-спутникам Южный и Ильичевск. В мористой части этот район ограничивается траверсами проливов, соединяющих Аджалыкский и Сухой лиманы с открытым морем.

На качество вод экосистемы Одесского региона СЗЧМ большое влияние оказывает речной сток Днестра, Южного Буга и частично Дуная, с водами которых поступает значительное количество загрязняющих веществ. На побережье исследуемого района расположены промышленная, портовая и жилая зоны мегаполиса Одесса, сточные воды которого являются мощным антропогенным источником загрязнения Одесского региона СЗЧМ.

С другой стороны Одесский регион является санаторно-курортной зоной Украины, на побережье которого в летнее время отдыхают и лечатся тысячи как жителей Украины, так и других стран СНГ. К этому региону примыкает также Одесская банка – ценнейший рыбохозяйственный участок Черного моря, на котором идет воспроизводство рыбных ресурсов.

Таким образом, прогноз и управление качеством воды в Одесском регионе СЗЧМ, выяснение роли различных природных и антропогенных источников в формировании уровня загрязнения этой акватории является актуальной задачей. Решить ее невозможно без использования математических моделей, адекватно описывающих циркуляцию вод, перенос и рассеяние в морской среде загрязняющих веществ, поступающих как от источников как естественного, так и антропогенного происхождения.

Целью данной статьи является описание математической структуры трехмерной гидродинамической модели циркуляции вод в Одесском регионе СЗЧМ, а также отдельных результатов, полученных с ее помощью.

Постановка задачи. Относительная удаленность Одесского залива от устьев рек, малость его пространственных масштабов и мелководность

обуславливают преобладание ветровой составляющей в процессе формирования течений, ответственных за перераспределение загрязняющих веществ на его акватории. Термохалинными эффектами в первом приближении можно пренебречь.

Уравнения трехмерной нестационарной гидродинамической модели, которая может служить для расчета ветровых течений в исследуемой акватории, в левой декартовой системе координат в приближении Буссинеска, имеют следующий вид:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{G}\vec{V} - \frac{\partial}{\partial z} \left[K_z \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} \right] = -\frac{1}{\rho_0} \vec{\nabla} P + F(\vec{V}) - L(\vec{V}), \quad (1)$$

$$\text{div}_L \vec{V} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} = \rho g, \quad (3)$$

где t – время; $\vec{V} = (u, v)$ – вектор горизонтальных составляющих скорости течений; w – вертикальная компонента вектора скорости; ρ, P – плотность и гидростатическое давление, соответственно; $\rho_0 = \text{const}$; x и y – горизонтальные координаты, направленные на восток и север, соответственно; z – вертикальная координата, направленная с поверхности водоема ($z=0$) вниз; div_L – оператор плоский дивергенции;

$$\vec{G} = \begin{pmatrix} 0 & -f \\ f & 0 \end{pmatrix}; \quad F(\vec{V}) = \frac{\partial}{\partial x} (A_{Lx} \frac{\partial \vec{V}}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (A_{Ly} \frac{\partial \vec{V}}{\partial y}); \quad L(\vec{V}) = u \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + v \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} + w \frac{\partial \vec{V}}{\partial z};$$

f – параметр Кориолиса; A_{Lx}, A_{Ly}, K_z – коэффициенты горизонтальной (по осям X и Y) и вертикальной турбулентной вязкости.

Для системы уравнений (1)-(3) ставятся следующие граничные условия:

На поверхности моря ($z=0$) задается поток импульса, давление полагается равным атмосферному, а вертикальная скорость равна нулю (приближение “жесткой крышки”):

$$K_z \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} = -\frac{\vec{\tau}_s}{\rho_0}; \quad w = 0; \quad P = P_a. \quad (4)$$

Здесь P_a – атмосферное давление; $\vec{\tau}_s = (\tau_{sx}, \tau_{sy})$ – вектор касательного напряжения ветра, вычисляемый как $\tau_s = \rho_a C_a |W_a| W_a$, где ρ_a – плотность воздуха, W_a – вектор скорости ветра,

$$C_a = \begin{cases} 1.1 \cdot 10^{-3} & \text{при } |W_a| \leq 6 \text{ м/с} \\ 10^{-3} (0.61 + 0.063 |W_a|) & \text{при } 6 < |W_a| < 22 \text{ м/с} \end{cases}$$

На дне ($z = H(x, y)$) поток импульса определяется на основе известной параметризации слоя постоянных напряжений и задается кинематическое условие для вертикальной скорости, т.е.

$$K_z \frac{\partial \bar{V}}{\partial z} = -\frac{\tau_b}{\rho_0}; \quad w = u \frac{\partial H}{\partial x} + v \frac{\partial H}{\partial y}, \quad (5)$$

где H – глубина водоема; $\bar{\tau}_b = (\tau_{bx}, \tau_{by})$ – вектор касательного напряжения донного трения, рассчитываемый с помощью квадратичного закона сопротивления:

$$\bar{\tau}_b = \rho_0 C_d^2 |\bar{V}_h| \bar{V}_h; \quad C_d = \chi / [\ln(H - z_h) / z_{0b}], \quad (6)$$

где z_{0b} – параметр шероховатости дна; z_h – расстояние от дна до верхней границы логарифмического слоя, которая принимается постоянной.

В качестве боковых граничных условий для системы (1) – (3) примем условия прилипания на береговом контуре $\Gamma_{ТВ}$:

$$u = v = 0. \quad (7)$$

Для замыкания системы (1)-(3) необходимо определить коэффициенты A_{L_i} и K_z . Коэффициенты горизонтальной турбулентности поставим в зависимость от минимального пространственного масштаба движения, описываемого в модели, т.е. шага конечно-разностной сетки $\Delta = x = y / 1$ /:

$$A_{Lx} = A_{Ly} = C\varepsilon^{1/3} \Delta^{4/3}, \quad (8)$$

где C – константа; ε – коэффициент диссипации турбулентной энергии.

Коэффициент K_z вертикальной турбулентной вязкости в простейшем случае определим по формуле Прандтля / 2 /:

$$K_z = C_\varepsilon^{1/2} L^2 \left| \frac{\partial \bar{V}}{\partial z} \right| (1 - \alpha_p R_i)^{1/2}, \quad (9)$$

в которой масштаб турбулентности L задается формулой Монтгомери / 3 /:

$$L = \chi H^{-1} Z_0 Z_H Z_\xi, \quad (10)$$

где

$$Z_0 = 1 - \beta_1 H^{-2} Z_H Z_\xi,$$

$$Z_H = H - z - z_{0b},$$

$$Z_\xi = z + z_{0\xi}; \quad \beta_1 = 1.2,$$

$z_{0\xi}$ – параметр шероховатости морской поверхности; z_{0b} – параметр шероховатости, характеризующий вертикальный масштаб неровностей дна; $\chi \cong 0.4$ – постоянная Кармана; R_i – число Ричардсона; $\alpha_p = const$.

Поскольку решение приведенной системы уравнений на этапе адаптации полей производится методом установления, в качестве начального условия (при $t=0$) можно выбрать состояние покоя:

$$\bar{V}(x, y, z) = 0. \quad (11)$$

Метод решения задачи. При численном решении задачи область решения разбивалась на боксы, в горизонтальной проекции представляющие собой B -сетку Аракавы / 4, 5 /; скорости течений

определяются в центрах боксов, а все остальные неизвестные - на их гранях, причем узлы по вертикали, в которых рассчитывается вертикальная скорость w и коэффициент турбулентности K_z (включая поверхность и дно) сдвинуты по отношению к узлам, в которых определяются остальные неизвестные функции.

Метод решения сформулированной гидродинамической задачи основывается на расщеплении компонент скорости на среднюю по глубине составляющую $\bar{\vec{V}}$ и отклонения от нее \vec{V}' , т.е.

$$\bar{\vec{V}} = \bar{\vec{V}} + \vec{V}', \quad (12)$$

причем
$$\bar{\vec{V}} = \frac{1}{H} \int_0^H \vec{V} dz, \quad (13)$$

$$\frac{1}{H} \int_0^H \vec{V}' dz = 0. \quad (14)$$

Учитывая приближение «жесткой крышки» на поверхности моря, вводится понятие функции тока ψ посредством соотношений

$$H\bar{u} = -\frac{\partial\psi}{\partial y}; \quad H\bar{v} = \frac{\partial\psi}{\partial x}$$

и осуществляется переход к уравнению эволюции вихря для средней по глубине (баротропной) компоненты движения:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{H} \frac{\partial\psi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{H} \frac{\partial\psi}{\partial y} \right) \right] + f \frac{\partial}{\partial x} \left[\psi \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{H} \right) \right] - f \frac{\partial}{\partial y} \left[\psi \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{H} \right) \right] = \text{rot} \bar{\Phi}(\bar{\vec{V}}), \quad (15)$$

где
$$\bar{\Phi}(\bar{\vec{V}}) = \frac{\bar{\tau}_s - \bar{\tau}_b}{\rho_0 H} + \frac{1}{H} \int_0^H \left\{ F(\bar{\vec{V}}) - L(\bar{\vec{V}}) - \frac{1}{\rho_0} \bar{\nabla} P \right\} dz.$$

В соответствии с условием прилипания (7) для вектора скорости на береговом контуре Γ_{TB} , функция тока определится следующим образом:

$$\psi = 0. \quad (16)$$

На «жидкой» (открытой) границе ставится условие Томана и Шевчика / 6 / для функции тока:

$$\frac{\partial\psi}{\partial \bar{n}} = 0, \quad (17)$$

где \bar{n} - вектор нормали к жидкой границе.

Бароклинная составляющая вектора скорости \vec{V}' определяется с помощью уравнения для вертикальных сдвигов скорости $\vec{S}_k = \vec{V}_{k+1} - \vec{V}_k$, где k - индекс горизонта.

Уравнение для сдвигов скорости после аппроксимации по вертикали будет иметь вид / 7 /:

$$\frac{\partial \vec{S}_k}{\partial t} + \left[\vec{G} + \left(\frac{1}{\delta z_{k+1}} + \frac{1}{\delta z_k} \right) \frac{K_z^{k+1/2}}{\delta z_{k+1/2}} \right] \vec{S}_k - \frac{1}{\delta z_{k+1}} \frac{K_z^{k+3/2}}{\delta z_{k+3/2}} \vec{S}_{k+1} - \quad (18)$$

$$-\frac{1}{\delta z_k} \frac{K_z^{k-1/2}}{\delta z_{k-1/2}} \bar{S}_{k-1} = -\frac{1}{\rho_0} \bar{V}(P_{k+1} - P_k) + F_{k+1}(\bar{V}) - F_k(\bar{V}) - L_{k+1}(\bar{V}) + L_k(\bar{V}),$$

с граничными условиями по z :

$$\rho_0 K_z^{(1/2)} \frac{\bar{S}_0}{\delta z_{1/2}} = -\bar{\tau}_s \quad \text{при} \quad z_{1/2} = 0,$$

$$\rho_0 K_z^{(H)} \frac{\bar{S}_H}{\delta z_H} = -\bar{\tau}_b \quad \text{при} \quad z_H = H(x, y).$$

Учитывая определение для сдвига \bar{S}_k и условие (14), можно получить выражения для пересчета сдвиговых скоростей течений:

$$\begin{aligned} \bar{V}'_H &= \sum_{k=1}^H H^{-1} z_{k+1/2} S_{k-1}, \\ \bar{V}'_k &= \bar{V}'_{k+1} - \bar{S}_k. \end{aligned} \quad (19)$$

В последних выражениях $z_{k+1/2} = (z_k + z_{k+1})/2$ (используется сдвинутая по вертикали сетка) и индекс H означает номер последнего расчетного горизонта.

Уравнение (15) реализуется методом последовательной верхней релаксации / 8 /, а уравнение (18) – методом матричной факторизации с использованием консервативных конечно-разностных схем.

Вертикальная составляющая скорости определяется из уравнения неразрывности (2). Уравнение (10) позволяет рассчитывать на каждом шаге по времени коэффициент вертикальной турбулентности K_z .

Результаты численных экспериментов с моделью. При расчетах ветровой циркуляции вод пространственная область Одесского региона СЗЧМ аппроксимировалась расчетной сеткой 61 x 72 узла с шагом 500 м. Шаг по времени составлял 100 сек. По вертикали использовались 10 расчетных узлов. Счет велся до установления поля скоростей течений при данной силе ветра, т.е. до момента стабилизации кинетической энергии поля. Батиметрическая карта расчетной области представлена на рис.1.

Расчеты ветровой циркуляции вод выполнялись для ветров силой 7 м/с восьми основных румбов. Полученные по модели интегральные функции тока в исследуемой акватории при ветрах южного, юго-западного, западного и северо-западного направлений приведены на рис. 2. При ветрах, направление которых отличается от указанных на 180°, общая структура полей интегральной циркуляции вод не меняется. Изменяется на противоположный знак интегральной функции тока и соответственно направление движения вод. Циклоническое вращение вод в замкнутых циркуляционных структурах сменяется на антициклоническое и наоборот.

Из расчетов следует, что определяющее влияние на характер циркуляции вод в регионе оказывает Одесская банка. При западном (восточном) и северо-западном (юго-восточном) ветрах в расчетной

области доминирует антициклонический (циклонический) баротропный вихрь. В случае ветров южного (северного) и юго-западного (северо-восточного) направлений антициклонический (циклонический) вихрь в поле интегральной функции тока локализуется в восточной части расчетной области, а над Одесской банкой формируется циклонический (антициклонический) круговорот.

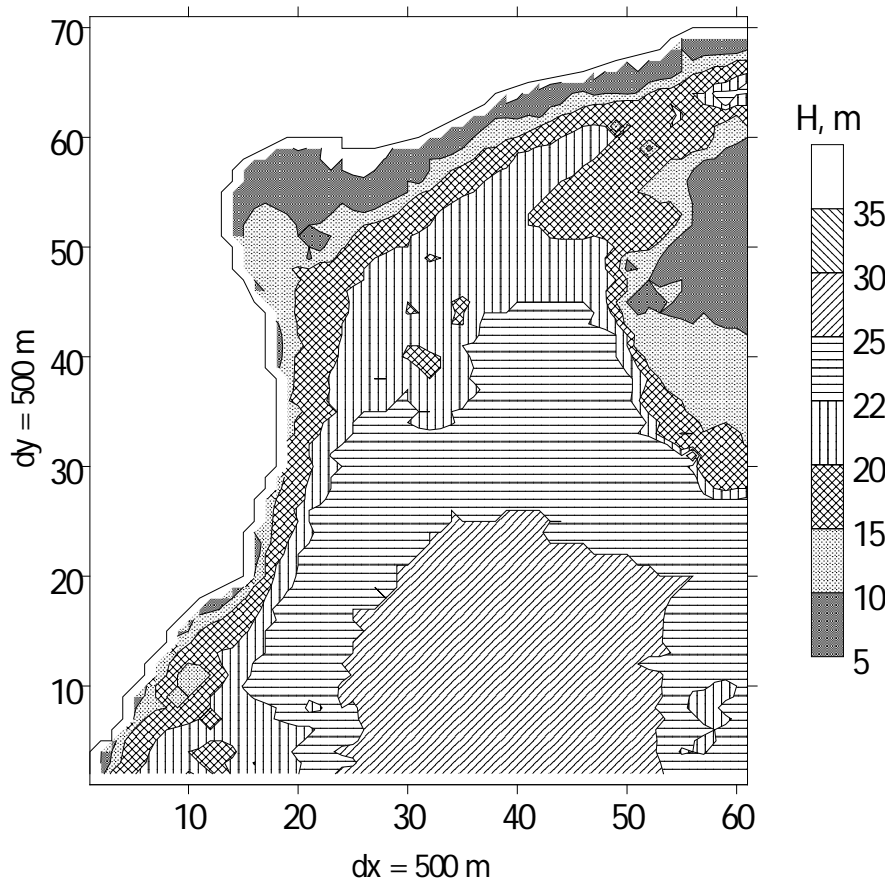


Рис.1. Батиметрическая карта Одесского региона северо-западной части Черного моря.

Поле векторов бароклинных течений для ветров южного и западного направлений представлено на рис.3-4. Как видно из рисунков, в прибрежной зоне формируется интенсивный вдольбереговой поток. В относительно глубоких центральной и южной частях акватории течения в поверхностном слое соответствуют направлению ветра, отклоняясь от него вправо до 45° , что согласуется с теорией дрейфовых течений. В северо-восточной части акватории под влиянием Одесской банки эта связь нарушается, т.к. доминирует баротропная составляющая скорости течений. В придонном слое развивается компенсационное течение, направление которого противоположно ветру и течению в поверхностном слое.

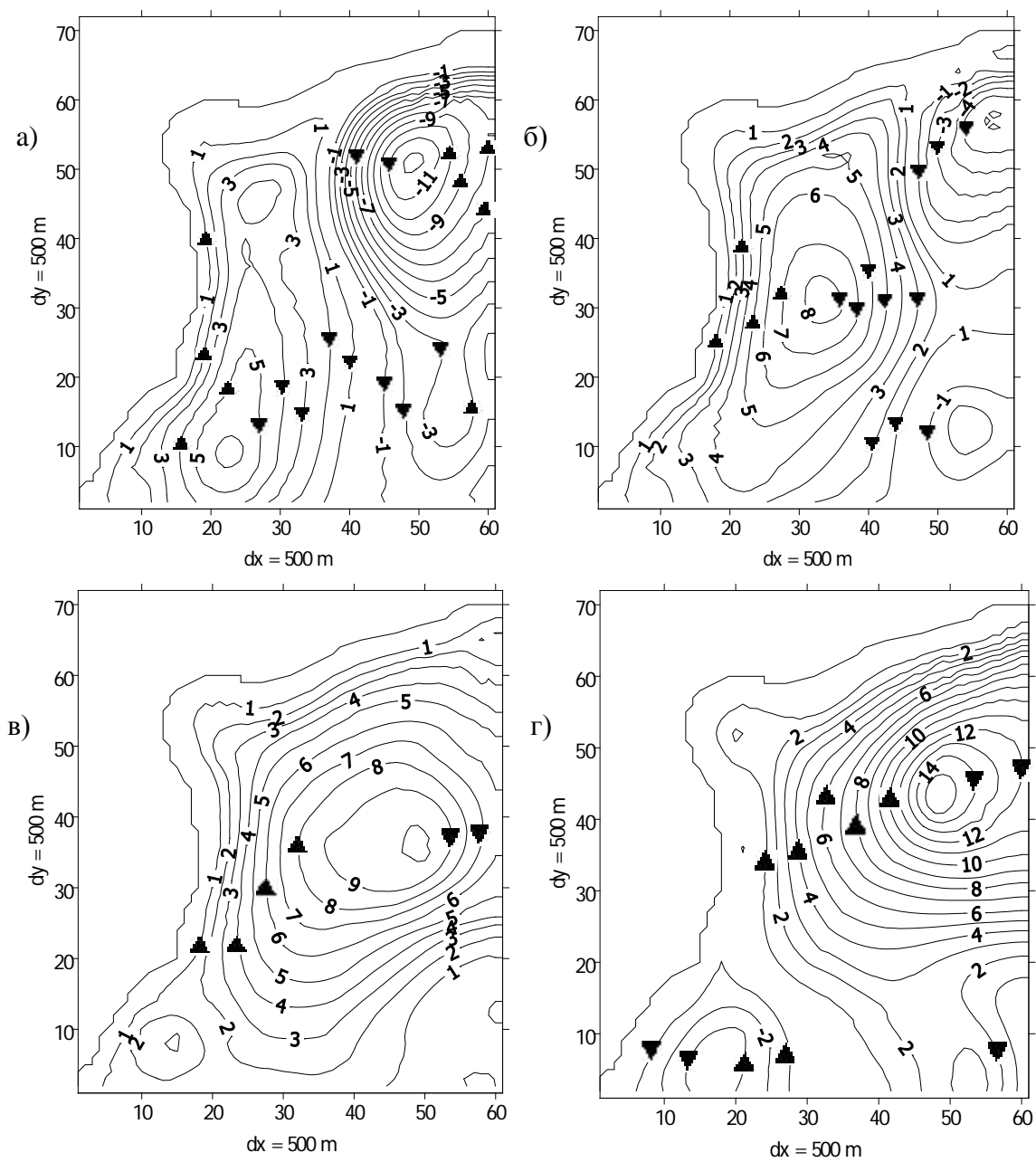


Рис. 2. Интегральная функция тока ($\times 10^3 \text{ м}^3/\text{с}$) при южном (а), юго-западном (б), западном (в) и северо-западном (г) ветрах силой 7 м/с.

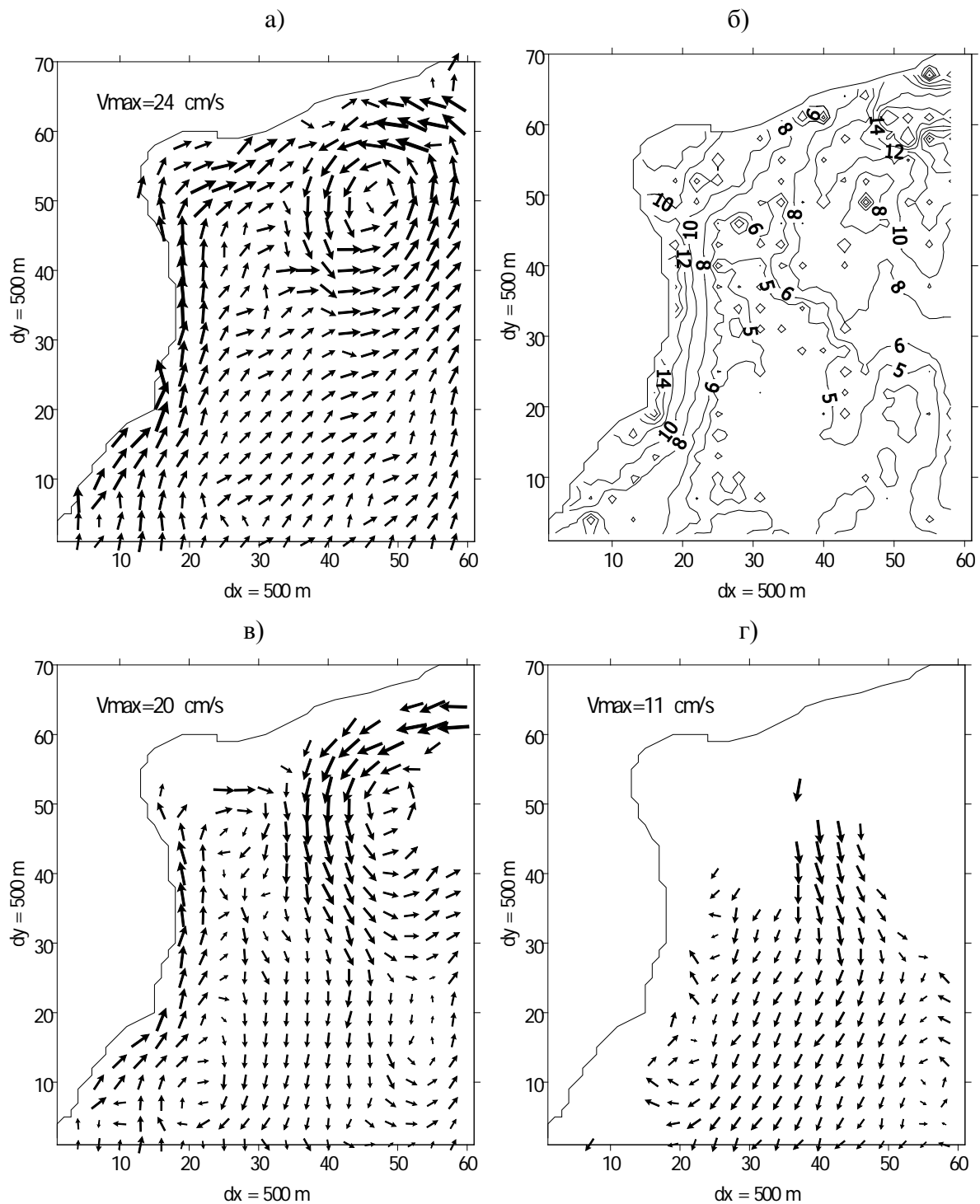


Рис. 3. Поле векторов течений при южном ветре силой 7 м/с на горизонтах 0.5 м (а); 10 м (в); 21 м (г) и поле изотак скорости течений (см/с) на горизонте 0.5 м (б). Масштабирование векторов выполнено по закону $d = \sqrt{V}$, где d - длина вектора, V - модуль вектора скорости.

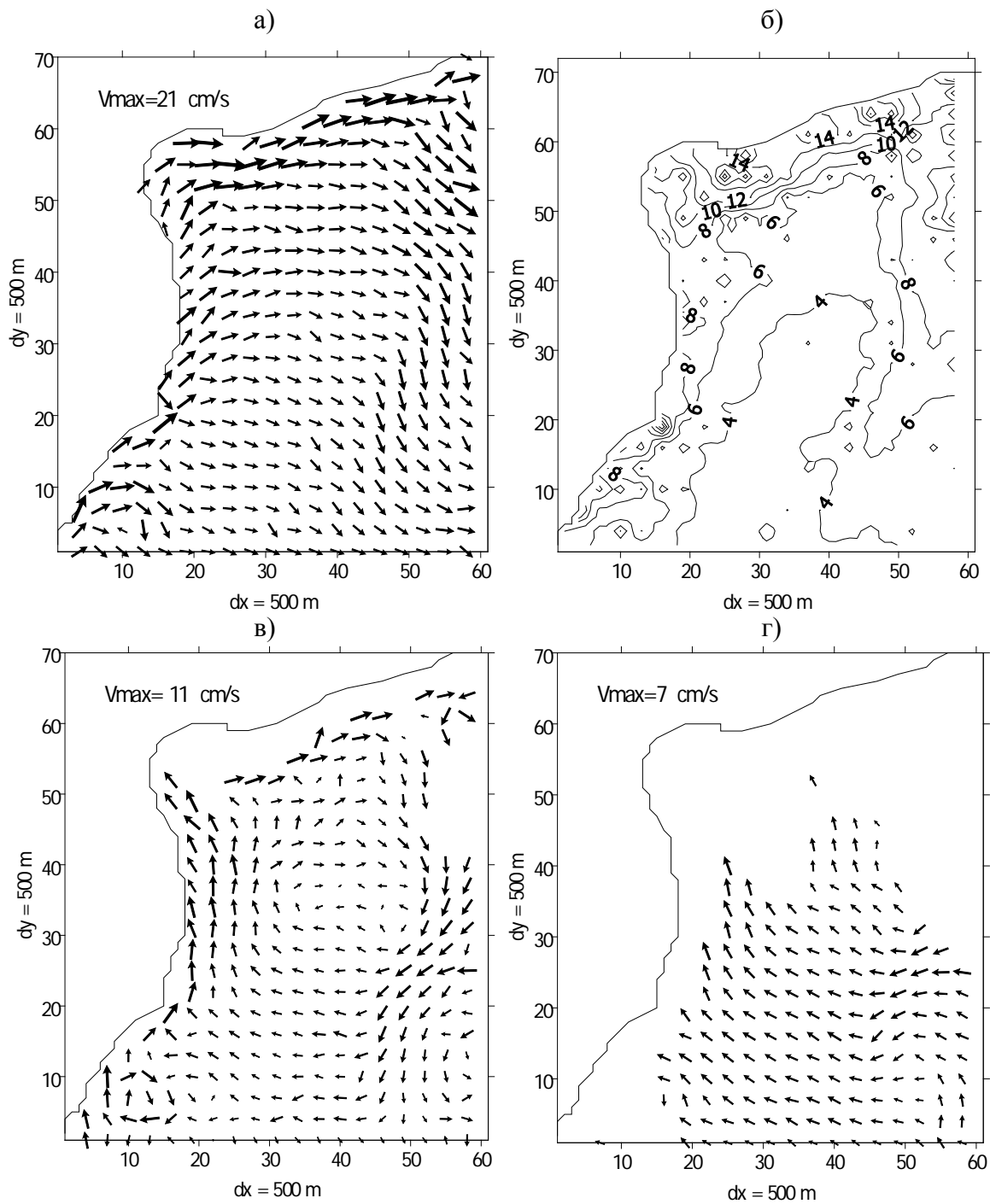


Рис. 4. Поле векторов течений при западном ветре силой 7 м/с на горизонтах 0.5 м (а); 10 м (в); 21 м (г) и поле изотак скорости течений (см/с) на горизонте 0.5 м (б). Масштабирование векторов выполнено по закону $d = \sqrt{V}$, где d -длина вектора, V - модуль вектора скорости

Выводы. Описанная модель правильно отражает основные закономерности формирования ветровой циркуляции вод в шельфовой

зоне моря, известные из теории морских течений. Данная модель может быть использована в качестве базового блока модели качества вод исследуемого региона для решения прикладных задач морской экологии.

ЛИТЕРАТУРА

1. Боуден К.Ф. Физическая океанография прибрежных вод.-М: Мир, 1988.- 326 с.
2. Монин А.С., Яглом А.М. Статистическая гидромеханика: в 2 т.- С.-Петербург: Гидрометеиздат, 1992. Т.1- 690 с.
3. Reid R.O. Modification of the quadratic bottom-stress law for turbulent channel flow in the presence of surface wind-stress// V.S. Army Corps of Engineers, Beach Erosion Board.Tech. Memor. 1957. N93.- 33 p.
4. Мезингер Ф., Аракава А., Численные методы, используемые в атмосферных моделях: Пер. с англ.-Л: Гидрометеиздат, 1979.- 136 с.
5. Semtner A.J. An oceanic general circulation model with bottom topography, in Numerical Simulation of Weather and Climate.-Tech. Rep.9, Dep. of Meteor., Univ. Of Calif., Los Angeles, 1974.-99p.
6. Роуч П. Вычислительная гидродинамика.- М: Мир, 1980.-616с.
7. Лонин С.А. Моделирование течений и распространение примеси в северо-западной части Черного моря // Деп. во ВНИИГМИ-МЦД. N 1007-ГМ90,09.07.90
8. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. - М: Наука,1980.- 535с.

Mathematical model for calculation of wind currents in the Odessa region of a northwest part of the Black Sea

Tuchkovenko Y.S.

The three-dimensional hydrodynamic model of wind circulation of waters in the Odessa region by northwest part of the Black Sea is reviewed. The outcomes of calculations of circulation of waters received on model at different winds, are demonstrated.