

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
ОДЕСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ЕКОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

**ЗБІРНИК МЕТОДИЧНИХ ВКАЗІВОК**

ДО ПРОВЕДЕННЯ ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ З ДИСЦИПЛІНИ

**«МЕТОДИ МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ У  
ГІДРОЕКОЛОГІЧНИХ ДОСЛІДЖЕННЯХ»**

для студентів III курсу рівня підготовки «бакалавр»,  
спеціалізація «Гідроекологія»

Затверджено:  
каф. гідроекології та  
водних досліджень  
протокол №

від « » \_\_\_\_\_ 2017 р.

Зав. кафедрою \_\_\_\_\_ Лобода Н.С.

«Узгоджено»  
на природоохоронному факультеті  
від « » \_\_\_\_\_ 2017 р.  
Декан \_\_\_\_\_ Чугай А.В.

Одеса 2017  
МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
ОДЕСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ЕКОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

**ЗБІРНИК МЕТОДИЧНИХ ВКАЗІВОК  
ДО ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ  
з дисципліни  
«МЕТОДИ МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ У  
ГІДРОЕКОЛОГІЧНИХ ДОСЛІДЖЕННЯХ»**

Одеса 2017  
МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
ОДЕСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ЕКОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

**ЗБІРНИК  
МЕТОДИЧНИХ ВКАЗІВОК**

до практичних занять  
з дисципліни

**«МЕТОДИ МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ У  
ГІДРОЕКОЛОГІЧНИХ ДОСЛІДЖЕННЯХ»**

для студентів III курсу рівня підготовки «бакалавр»,  
спеціалізація «Гідроекологія»

"Затверджено"  
на засіданні методичної комісії  
природоохоронного факультету  
Протокол № \_\_\_\_ від \_\_\_\_\_ 2017 р.

Одеса 2017

**ЗБІРНИК МЕТОДИЧНИХ ВКАЗІВОК**  
**по проведенню практичних занять**

**з дисципліни**  
**«МЕТОДИ МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ У**  
**ГІДРОЕКОЛОГІЧНИХ ДОСЛІДЖЕННЯХ»**

для студентів 3 курсу  
напрямом підготовки 6.040106 «Екологія, охорона навколишнього  
середовища та збалансоване природокористування»  
за спеціалізація «Гідроекологія».

Підп. до друку  
Умов. друк арк..

Формат  
Тираж

Папір  
Зак. №

Надруковано з готового оригінал - макету

---

Одеський державний екологічний університет  
65016, Одеса, Львівська, 15

---

Методичні вказівки до практичних занять з дисципліни «Методи математичної статистики у гідроекологічних дослідженнях» за спеціальністю «Гідроекологія» / проф., д.геогр.н. Лобода Н.С., ас., к.геогр.н. Куза А.М. / – Одеса, ОДЕКУ, 2017. – 53 с.

Методичні вказівки призначені для студентів III курсу денної форми навчання за напрямом підготовки 6.040106 «Екологія, охорона навколишнього середовища та збалансоване природокористування» за спеціальністю «Прикладна екологія», спеціалізація «Гідроекологія».

## ЗМІСТ

Загальні положення.....	6
1 Побудова емпіричної кривої забезпеченостей концентрацій забруднюючої речовини та устанавлення на її основі забезпеченості значень ГДК для різних водоспоживачів.....	8
2. Розрахунок статистичних параметрів концентрацій забруднюючих речовин за методом моментів.....	15
3 Розрахунок характеристик забруднюючих речовин заданої забезпеченості за теоретичними законами розподілу.....	23
4 Вияв тренду в рядах концентрацій забруднюючих речовин за допомогою критерія Аббе і перевірка гіпотези про відсутність системних змін.....	27
5. Установлення «викидів» у рядах гідрохімічних та гідроекологічних характеристик на основі перевірки гіпотези про однорідність членів статистичної сукупності.....	31
6. Визначення закономірностей динаміки водності, солоності та концентрацій забруднюючих речовин у часі на основі розрахунків коефіцієнту галинності.....	35
Література.....	41
Додаток.....	42

## ЗАГАЛЬНІ ПОЛОЖЕННЯ

*Актуальність проведення практичних занять з дисципліни «Методи математичної статистики у гідроекологічних дослідженнях»* обумовлена необхідністю набути навички у застосуванні сучасних методів статистичної обробки та аналізу даних при вирішенні практичних задач гідроекології. Головні задачі гідроекологічних досліджень полягають у накопиченні, систематизації та аналізі інформації про якісний стан водних об'єктів, оцінці якості досліджуваних екосистем, встановленні причин спостережених і ймовірних змін у компонентах водних об'єктів. Методи математичної статистики дозволяють вирішувати такі задачі, а також обґрунтовувати висновки щодо перспектив майбутнього застосування водних об'єктів у різних галузях господарства країни.

*Математична статистика* є розділом математики, яка має робити висновки щодо статистичних характеристик досліджуваних процесів на основі даних спостережень. Методи математичної статистики базуються на теорії ймовірностей.

**Метою** вказівок є оцінка статистичних характеристик показників якості води водних об'єктів та надійності і достовірності вибіркового даних.

Теоретичною основою математичної статистики є теорія ймовірностей і теорія великих чисел, які передбачають, що при великій кількості випадкових явищ їх середній результат перестає бути випадковим й передбачається із великим ступенем визначеності.

Після виконання практичних завдань з дисципліни «Методи математичної статистики у гідроекологічних дослідженнях» студенти повинні отримати базові знання:

- методи визначення статистичних параметрів;
- методи аналізу однорідності рядів даних на основі параметричних критеріїв;
- методи визначення однорідності рядів вихідних даних;
- методи визначення відповідності емпіричних законів розподілу теоретичним.

У результаті виконання практичних завдань студенти повинні оволодіти наступними вміннями:

- розраховувати статистичні характеристики рядів даних з використанням методів статистичного аналізу;
- виявляти “викиди” у рядах даних спостережень;
- перевіряти гіпотези про існування тенденцій у коливаннях досліджуваних характеристик.

*Метою методичних вказівок* є забезпечення студентів об'ємом теоретичних знань та практичних навичок, необхідних для первинної статистичної обробки рядів вихідних гідроекологічних даних.

При виконанні практичних завдань з дисципліни «Методи математичної статистики у гідроекологічних дослідженнях» студент повинен виконати наступні роботи: 1) Побудова емпіричної кривої забезпеченостей

концентрацій забруднюючої речовини та установлення на її основі забезпеченості значень ГДК для різних водоспоживачів. 2) Розрахунок статистичних параметрів концентрацій забруднюючих речовин за методом моментів. 3) Розрахунок характеристик стоку забруднюючих речовин заданої забезпеченості за теоретичними законами розподілу. 4) Вияв тренду в рядах концентрацій забруднюючих речовин за допомогою критерія Аббе і перевірка гіпотези про відсутність системних змін. 5) Установлення «викидів» у рядах гідрохімічних та гідроекологічних характеристик на основі перевірки гіпотези про однорідність членів статистичної сукупності.

Вивчення кожної теми закінчується відповідями на питання, поставленими по кожній темі для самоперевірки.

Контроль поточних знань виконується на базі модульної системи контролю відповідно до робочої програми дисципліни.



**Практична робота №1**  
**ПОБУДОВА ЕМПІРИЧНОЇ КРИВОЇ ЗАБЕЗПЕЧЕНОСТЕЙ**  
**КОНЦЕНТРАЦІЙ ЗАБРУДНЮЮЧОЇ РЕЧОВИНИ ТА**  
**УСТАНОВЛЕННЯ НА ЇЇ ОСНОВІ ЗАБЕЗПЕЧЕНОСТІ ЗНАЧЕНЬ ГДК**  
**ДЛЯ РІЗНИХ ВОДОСПОЖИВАЧІВ**

Мета роботи: навчитися будувати емпіричну криву забезпеченості ряду досліджуваних величин (дані про концентрацію хімічних речовин у поверхневих водах) і аналізувати отримані результати.

### **Теоретична частина**

При виконанні гідроекологічних досліджень однією з основних задач є встановлення ймовірнісних властивостей випадкової величини на основі законів розподілу. Кожен **закон розподілу** випадкової величини являє собою математичну функцію, яка повністю описує випадкову величину з ймовірнісної точки зору [1]. Для полегшення розрахунків не обов'язково розглядати закон розподілу як математичний вираз, достатньо указати окремі числові характеристики, які відображають його головні риси.

**Випадковою називається величина**, яка внаслідок випробування набуває того чи іншого значення, наперед невідомо, якого саме. Якщо можливі значення випадкової величини можна перерахувати, то випадкова величина відноситься до **дискретної**. Випадковою можна назвати будь-яку (не обов'язково чисельну) змінну  $x$ , значення якої  $x$  створюють множину випадкових елементарних подій  $\{x\}$ .

Числові характеристики випадкової величини, які виражають у стислій формі особливості закону розподілу, називаються **статистичними параметрами**.

Статистичні параметри, визначені по рядах спостережень (вибірках), відрізняються від відповідних параметрів генеральної сукупності і називаються **оцінками статистичних параметрів**.

Функція розподілу випадкової величини є самою універсальною характеристикою випадкової величини. Вона встановлюється як для безперервних, так і перервних величин. Вона повністю характеризує випадкову величину з ймовірнісної точки зору і є однією з форм законів розподілу.

**Функцію розподілу  $F(x)$  також називають інтегральною функцією розподілу або інтегральним законом розподілу.**

Функція розподілу  $F(x)$  має такі властивості:

1. Вона монотонно неспадна, тобто при  $x_2 > x_1$ ,  $F(x_2) > F(x_1)$ .
2. На мінус нескінченності інтегральна функція розподілу дорівнює нулю:

$$\text{коли } x \rightarrow -\infty, \text{ то } F(-\infty) = 0. \quad (1.1)$$

3. На плюс нескінченності інтегральна функція розподілу дорівнює одиниці:

$$\text{коли } x \rightarrow +\infty, \text{ то } F(+\infty) = 1. \quad (1.2)$$

Інтегральна функція розподілу дискретної випадкової величини устанавлюється на основі таблиці розподілу

$$F(x) = p(x < X) = \sum_{x_i < x} p_i(X = x_i), \quad (1.3)$$

де нерівність  $x_i < x$  указує на те, що підсумовування відбувалося не для усіх  $x_i$ , а лише для тих, які менше  $x$ .

У гідрологічних розрахунках (СНІП 2.01.14-83) [2] здебільшого використовується не інтегральна функція розподілу  $F(x)$ , а *функція забезпеченості*  $P(x)$ , яка пов'язана з інтегральною функцією співвідношенням

$$P(x) = 1 - F(x). \quad (1.4)$$

**Забезпеченість випадкової величини**  $X$  – це ймовірність того, що випадкова величина  $X$  більше деякого заданого значення  $x$ , тобто  $P(x) = p(X > x)$ .

Для дискретних випадкових величин функція забезпеченості може бути представленою у вигляді

$$P(x) = p(X > x) = \sum_{x_i > x} p_i(X = x_i), \quad (1.5)$$

де нерівність  $x_i > x$  указує на те, що підсумовування відбувалося не для усіх  $x_i$ , а лише для тих, які більші  $x$ .

Інтегральна функція  $F(x)$ , яка представлена у графічному вигляді, має назву інтегральної кривої розподілу, а **функція з  $P(x)$  називається кривою забезпеченості** (рис.1.1).

У гідрологічних розрахунках закон розподілу випадкової величини задається у вигляді функції забезпеченості. Для обчислення використовується формула (1.5), записана через емпіричну частоту, тобто

$$P^*(x) = p^*(X \geq x). \quad (1.6)$$

$F(x); P(x)$

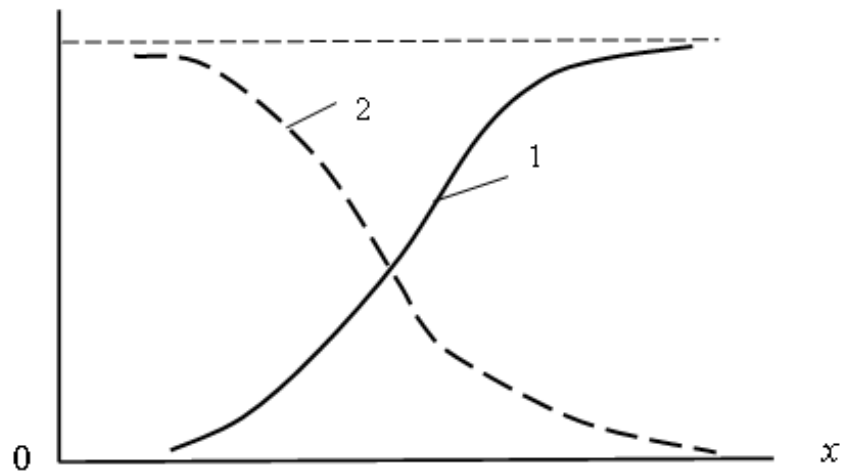


Рисунок 1.1 – Інтегральна функція розподілу  $F(x)$  випадкової величини  $x$  (1) та функція забезпеченості  $P(x)$  (2) [1, 3]

*Емпірична функція розподілу* – це функція розподілу реалізації випадкової величини, яку будують за результатами вимірювань. Для розрахунків емпіричної функції забезпеченості необхідно для кожного  $x_i$  ( $i=1,2,\dots,n$ ) визначити число випробувань, у яких випадкова величина  $X$  прийняла значення більше або рівне  $x_i$  і поділити знайдене  $m$  на загальну кількість випробувань  $n$ .

З цією метою гідрологічний ряд розташовується в регресному порядку (ранжирується). При цьому приймається, що кожне значення ряду спостерігається один раз, тобто

$$p^*(X = x_i) = \frac{1}{n}. \quad (1.7)$$

Емпірична забезпеченість визначається шляхом послідовного підсумовування  $p^*(X = x_i)$  от найбільшого члена до відповідного  $m$ -того значення ранжированого ряду

$$P^* = \sum_{i=1}^m p^* = \sum_{i=1}^m \frac{1}{n} = \frac{m}{n}, \quad (1.8).$$

Формула (1.8) справедлива лише для випадку, коли всі значення  $X$  представлені в одній вибірці.

У протилежному випадку отримуємо, що забезпеченість першого члена ранжированої вибірки дорівнює  $P_1^* = \frac{1}{n}$ , а останнього  $P_1^* = \frac{n}{n} = 1$ . Таким чином, виходить, що значення випадкової величини, більші або менші тих,

що увійшли до однієї виборки, стають неможливими. Це суперечить досвіду практики, з якого витікає, що які б значення не увійшли до вибірки, завжди можливі значення більші або менші спостережених. Цей недолік виключається шляхом застосування таких формул [4, 5]:

- формула Хазена

$$P^* = \frac{m-0.5}{n}; \quad (1.9)$$

- формула С.М. Крицького та М.Ф. Менкеля

$$P^* = \frac{m}{n+1}; \quad (1.10)$$

- формула М.М. Чегодаєва

$$P^* = \frac{m-0.3}{n+0.4}. \quad (1.11)$$

У нормативній літературі (СНиП 2.01.14-83) для розрахунку забезпеченості  $p$  рекомендується до застосування формула (1.10), якщо у відсотках

$$p = \frac{m}{n+1} * 100\%, \quad (1.12)$$

де  $m$  – порядковий номер ранжированої вибірки;  
 $n$  - довжина ряду.

## Практична частина

Вихідні дані: ряди даних спостережень за якістю поверхневих вод за період спостережень 1965-2014 роки, таблиця ГДК для різних водоспоживачів.

*Хід роботи:*

1. Отримаємо вихідні дані згідно варіанту (додаток А.1) (дані про концентрацію хімічних елементів р. Тилігул, період 1965-2014 роки) та формуємо таблицю вихідної вибірки (табл.1.1) у ПК за допомогою програми Microsoft Excel.

2. Ранжуємо ряд концентрацій хімічних речовин від  $x_{\max}$  до  $x_{\min}$  (табл.1.1, колонка 4).

3. Далі розраховуємо величини забезпеченості  $p$  за формулою (1.12) які являють собою ординати відповідної емпіричної кривої забезпеченості (табл.1.1, колонка 5).

4. Будуємо емпіричну криву забезпеченості для заданого хімічного елементу за допомогою опції «Діаграми», вісью ординат є концентрації хімічних елементів, вісью абсцис – ординати забезпеченості.

5. Далі, маючи дані про ГДК досліджуваних хімічних речовин (табл.1.2) [6, 7], на графіку емпіричної кривої забезпеченості встановлюємо забезпеченість ГДК для питної води та ГДК для рибогосподарських вимог (приклад рис.1.2).

6. Робимо висновки про отримані результати.

Таблиця 1.1 – Розрахунок ординат емпіричної кривої забезпеченості концентрацій хімічного елементу (приклад)

№ з/п	Рік	$C_i$ , мг/дм <sup>3</sup>	$C_i$ , ↓ мг/дм <sup>3</sup>	$p = \frac{m}{n+1} \cdot 100\%$
<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>
1	1965	99,9	204,6	2,0
2	1966	65,9	146	3,9
3	1967	24,3	127	5,9
4	1968	117	122	7,8
5	1969	114	121,7	9,8
6	1970	107	117	11,8
7	1971	112	117	13,7
8	1972	146	114	15,7
9	1973	92,4	112	17,6
10	1974	102	112	19,6
11	1975	112	112	21,6
12	1976	82,5	110	23,5
13	1977	71,9	107	25,5
14	1978	59,3	102	27,5
15	1979	88,8	99,9	29,4
16	1980	23,3	99,7	31,4
17	1981	99,4	99,7	33,3
18	1982	74	99,4	35,3
19	1983	46,4	97,5	37,3
20	1984	69,5	97,2	39,2
21	1985	23,4	97,2	41,2
22	1986	127	93	43,1
23	1987	110	92,4	45,1
24	1988	90,2	90,2	47,1
25	1989	99,7	89,9	49,0
26	1990	122	88,8	51,0
27	1991	112	87,7	52,9
28	1992	97,5	87,7	54,9
29	1993	99,7	87,5	56,9
30	1994	93	87,5	58,8
31	1995	117	82,6	60,8
32	1996	97,2	82,6	62,7
33	1997	87,7	82,5	64,7

Продовження таблиці 1.1

1	2	3	4	5
34	1998	87,5	74	66,7
35	1999	82,6	72,9	68,6
36	2000	12	72,5	70,6
37	2001	97,2	71,9	72,5
38	2002	89,9	69,5	74,5
39	2003	12	65,9	76,5
40	2004	204,6	61,8	78,4
41	2005	58,8	61,8	80,4
42	2006	121,7	59,3	82,4
43	2007	72,9	58,8	84,3
44	2008	61,8	46,4	86,3
45	2009	72,5	24,3	88,2
46	2010	61,8	23,4	90,2
47	2011	87,7	23,3	92,2
48	2012	87,5	12	94,1
49	2013	82,6	12	96,1
50	2014	12	12	98,0

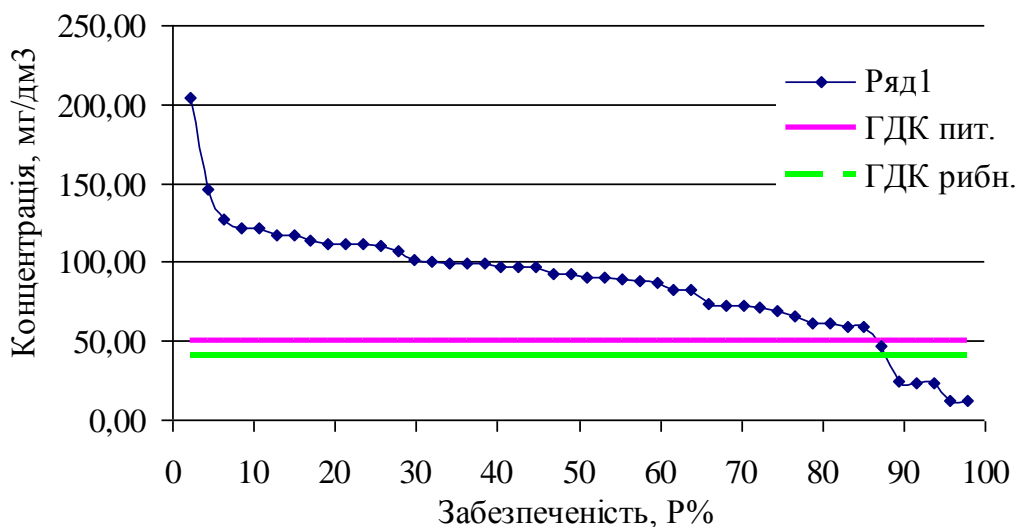


Рисунок 1.2 – Емпірична крива забезпеченості концентрації магнія у створі р.Тилігул – смт.Березівка за період 1965-2014 рр.

Контрольні запитання:

1. Що являє собою закон розподілу?
2. Яка величина називається «випадковою»?
3. Що називається емпіричною функцією розподілу?
4. Які властивості має функція розподілу?
5. Як визначити забезпеченість випадкової величини?
6. У яких межах змінюється забезпеченість випадкової величини?

Таблиця 1.2 – Значення нормативів ГДК для гідрохімічних показників [6, 7]

Показник	ГДК (господарсько- питні)	Категорія шкідливості	ГДК (рибогосподарські)
Розчинений кисень (O <sub>2</sub> ), мгО <sub>2</sub> /дм <sup>3</sup>	≥ 4	санітарна	≥ 6
Кальцій (Ca <sup>2+</sup> ), мг/дм <sup>3</sup>	-	-	180
Магній (Mg <sup>2+</sup> ), мг/дм <sup>3</sup>	50	-	40
Натрій (Na) і калій (K), мг/дм <sup>3</sup>	(200)	санітарно- токсикологічна	Na(120)+K(50)
Сульфати, (SO <sub>4</sub> <sup>2-</sup> ) мг/дм <sup>3</sup>	500	органолептична	100
Хлориди, (Cl), мг/дм <sup>3</sup>	350	органолептична	300
Мінералізація (Σm), мг/дм <sup>3</sup>	1000	органолептична	1000
Фосфати (PO <sub>4</sub> <sup>3-</sup> ), мгP/дм <sup>3</sup>	1,141	санітарно- токсикологічна	1,0
Нітрити (NO <sub>2</sub> ), мгN/дм <sup>3</sup>	1,003	санітарно- токсикологічна	0,02
Нітрити (NO <sub>3</sub> ), мгN/дм <sup>3</sup>	10,17	санітарно- токсикологічна	9,1
Амоній (NH <sub>4</sub> ), мгN/дм <sup>3</sup>	2	санітарно- токсикологічна	0,39
Кремній (Si), мг/дм <sup>3</sup>	10	санітарно- токсикологічна	-
Залізо зігільне (Fe <sub>заг</sub> ), мг/дм <sup>3</sup>	0,3	органолептична	0,05
Біхроматна окиснбваність (ХСК), мгО <sub>2</sub> /дм <sup>3</sup>	15	санітарна, органолептична, сан.-токс.	15
БСК <sub>5</sub> , мгО <sub>2</sub> /дм <sup>3</sup>	3	санітарна	2,25
Феноли, мг/дм <sup>3</sup>	0,001	органолептична	0,001
Нафтопродукти, мг/дм <sup>3</sup>	0,3	органолептична	0,05
СПАР, мг/дм <sup>3</sup>	0,5	санітарно- токсикологічна	0,2
Мідь (Cu), мг/дм <sup>3</sup>	1	органолептична	0,01
Цинк (Zn), мг/дм <sup>3</sup>	1	санітарна	0,01
Хром загальний (Cr <sub>заг.</sub> ), мг/дм <sup>3</sup>	0,05	санітарно- токсикологічна	0,001
Марганець (Mn), мг/дм <sup>3</sup>	0,05	органолептична	0,01

# Практична робота №1

## РОЗРАХУНОК СТАТИСТИЧНИХ ПАРАМЕТРІВ КОНЦЕНТРАЦІЙ ЗАБРУДНЮЮЧИХ РЕЧОВИН ЗА МЕТОДОМ МОМЕНТІВ

Мета роботи: вміти розраховувати статистичні параметри забрудненості води річки з використанням методу моментів. Навчитися аналізувати похибки визначення оцінок статистичних параметрів за методом моментів.

### Теоретична частина

Для оцінок статистичних параметрів на основі вибірок розроблені спеціальні *статистичні методи* [1, 3]. Найбільш універсальним є **метод статистичних моментів**, який не зв'язаний ні з яким теоретичним законом розподілу. У розрахунках застосовуються також методи визначення статистичних параметрів, які базуються на певних законах розподілу: *метод найбільшої правдоподібності* та *графо-аналітичний метод*.

«Метод моментів» отримав назву із розділу фізики “Механіка”, де момент являє собою добуток сили на плече. Плече – відстань від точки, у якій прикладена сила, до точки опори. Значення дискретної випадкової величини розглядається як матеріальна точка на числовій осі з масою, пропорційною ймовірності появи цієї випадкової величини. *Якщо плечем є відстань від нуля числової осі до матеріальної точки*, то такі **статистичні моменти називаються початковими**. Коли ж для визначення статистичного моменту береться відстань від математичного сподівання до розглядуваної матеріальної точки, то **статистичний момент отримує назву центрального**.

*Для будь-якої випадкової величини центральний момент першого порядку дорівнює нулю.*

Математичне сподівання є середньозваженим із значень  $x_i$ , кожне з яких враховується із вагою, пропорційною ймовірності появи цього значення [3, 5].

$$m_x = \frac{x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_N p_N}{p_1 + p_2 + \dots + p_N} = \frac{\sum_{i=1}^N x_i p_i}{\sum_{i=1}^N p_i}. \quad (2.1)$$

Враховуючи, що для дискретних випадкових величин  $\sum_{i=1}^N p_i = 1$ , отримаємо

$$m_x = \sum_{i=1}^N x_i p_i. \quad (2.2)$$



Для описування властивостей кривих розподілу широко використовують початкові  $\alpha$  та центральні  $\beta$  статистичні моменти

$$\alpha_s = \sum_{i=1}^N x_i^s p_i, \quad (2.3)$$

$$\beta_s = \sum_{i=1}^N (x_i - m_x)^s p_i; \quad (2.4)$$

де  $S$  - порядок моменту.

Найбільше застосування знайшли статистичні моменти  $\alpha_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$  та їх безрозмірні характеристики (нормовані моменти).

*Перший початковий момент* ( $s=1$ ) представляє собою *математичне сподівання*  $m_x$ .  $i$  є центром статистичного розподілу випадкової величини  $X$ .

*Другий центральний момент*  $\mu_2$  характеризує розсіювання випадкової величини відносно її центра розподілу і називають *дисперсією*  $\sigma_x^2$  [1, 3]. Дисперсія випадкової величини має розмірність квадрату випадкової величини. Але для найбільш наочної характеристики розсіювання зручно користуватися величиною, розмірність якої співпадає з розмірністю випадкової величини. Для цього з дисперсії добувають квадратний корінь. Отримана величина називається **середнім квадратичним відхиленням** (стандартом) випадкової величини  $\sigma_x$ . Стандарт представлений у безрозмірному вигляді (2.5) називають **коефіцієнтом варіації**

$$C_V = \frac{\sqrt{\mu_2}}{m_x} \quad \text{або} \quad C_V = \frac{\sigma_x}{m_x}, \quad (2.5)$$

Третій центральний момент  $\mu_3$  характеризує асиметрію розподілу випадкової величини відносно математичного сподівання і може бути як від'ємним, так і додатнім. Безрозмірна характеристика асиметрії (2.6) називається **коефіцієнтом асиметрії**.

$$C_S = \frac{\mu_3}{\sigma_x^3}, \quad (2.6)$$

Четвертий центральний момент ( $s = 4$ ) характеризує сплюснутість або витягнутість кривої розподілу випадкової величини у порівнянні з кривою нормального розподілу. Для випадкової величини з нормальним законом розподілу співвідношення  $\frac{\mu_4}{\sigma_x^4}$  завжди дорівнює 3. Таким чином,

нормування  $\mu_4$  по  $\sigma_x^4$  дозволяє отримати безрозмірний статистичний параметр, названий **ексцесом**

$$E = \frac{\mu_4}{\sigma_x^4} - 3. \quad (2.7)$$

Якщо  $E > 0$ , то крива розподілу витягнута відносно нормального закону розподілу, для якого  $E = 0$ . Коли ж  $E < 0$ , крива розподілу приплюснута по відношенню до кривої нормального розподілу.

Якщо вихідний ряд розглядати як такий згрупований ряд, у якому кожному значенню випадкової величини відповідає абсолютна частота, що дорівнює одиниці, тоді відносна частота розраховується за формулою

$$\hat{p}_i = \frac{1}{n}, \quad (2.8)$$

де  $n$  - довжина вибірки.

Враховуючи що вибіркова оцінка математичного сподівання називається середнім арифметичним значенням і позначається як  $\bar{x}$ , розглянемо вибіркові оцінки перелічених моментів.

Оцінка першого центрального моменту

$$\hat{\alpha}_1 = \hat{m}_x = \bar{x} = \sum_{i=1}^n x_i p_i^* = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}. \quad (2.9)$$

Оцінка другого центрального моменту

$$\hat{\mu}_2 = \hat{\sigma}_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}. \quad (2.10)$$

Оцінка середнього квадратичного відхилення

$$\hat{\sigma}_x = \sqrt{\hat{\mu}_2} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}}. \quad (2.11)$$

Оцінка третього центрального моменту

$$\hat{\mu}_3 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^3}{n}. \quad (2.12)$$

Оцінка четвертого центрального моменту

$$\hat{\mu}_4 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^4}{n}. \quad (2.13)$$

Оцінки центральних статистичних моментів 2 і вище порядку мають від'ємні зміщення (заниження). Для їх усунення вводяться поправочні коефіцієнти

-для другого центрального моменту  $\frac{n}{n-1}$ ,

-для третього центрального моменту  $\frac{n^2}{(n-1)(n-2)}$ .

В результаті розрахунків формули отримують вид [1, 3, 5].

$$\hat{\sigma}_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1} \quad (2.14)$$

або

$$\hat{C}_V = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{\bar{x}^2 (n-1)}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (k_i - 1)^2}{n-1}}, \quad (2.15)$$

$$\hat{C}_S = \frac{n}{(n-1)(n-2)} \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^3}{\hat{\sigma}_x^3} \quad (2.16)$$

або

$$\hat{C}_S = \frac{n}{(n-1)(n-2)} \frac{\sum_{i=1}^n (k_i - 1)^3}{\hat{C}_V^3}, \quad (2.17)$$

де  $k_i = x_i / \bar{x}$  - модульний коефіцієнт.

Характеристика ексцес не використовується у гідрологічних розрахунках, тому що навіть при відносно довгих рядах спостережень вона є недостовірною.

#### Похибки визначення оцінок статистичних параметрів при розрахунках за методом моментів

Формула середньоквадратичного відхилення середніх арифметичних значень від математичного сподівання отримана не на основі статистичних випробувань, а аналітичним шляхом, дотримуючись при цьому припущення,

що нормальний закон розподілу вибірових середніх зберігається і для вибірок, які відхиляються від нормального закону розподілу

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}, \quad (2.18)$$

де  $\sigma_{\bar{x}}$  - середнє квадратичне відхилення вибіркової середньої арифметичної величини від математичного сподівання генеральної сукупності;

$\sigma_x$  - середнє квадратичне відхилення випадкової величини для ряду даних довжиною  $n$ , яке визначається за формулою (2.15).

Середнє квадратичне відхилення коефіцієнтів варіації  $\sigma_{C_V}$  рекомендується обчислювати за формулою СН – 435-72 [2]

$$\sigma_{C_V} = C_V \sqrt{(1 + C_V^2) / 2n} \quad (2.19)$$

або за формулою Є. Г. Блохінова

$$\sigma_{C_V} = \frac{C_V}{n + 4C_V^2} \sqrt{\frac{n}{2}(1 + C_V^2)}. \quad (2.20)$$

Середня квадратична похибка коефіцієнта асиметрії  $\sigma_{C_S}$  визначається за формулою С.М.Крицького та М.Ф.Менкеля

$$\sigma_{C_S} = \sqrt{\frac{6}{n}(1 + 6C_V^2 + 5C_V^4)}. \quad (2.21)$$

Середня квадратична похибка відношення  $C_S/C_V$  визначається за формулою А.Ш. Резніковського

$$\sigma_{C_S/C_V} = \frac{1}{C_V} \sqrt{\frac{6}{n}}. \quad (2.22)$$

Критерієм якості розрахунків статистичних параметрів за даними спостережень є *допустима похибка розрахунків*, яка також вказує на достатню чи недостатню тривалість спостережень. Якщо  $\varepsilon_x < 5 - 10\%$  і  $\varepsilon_{C_V} < 15\%$ , тоді тривалість спостережень визнається достатньою. Якщо допустима похибка перевищує вказані границі, тоді ряд визнається коротким і потребує уточнення. Уточнення може бути виконано із залученням даних по річці з подібними умовами формування складу води та тривалішим періодом спостережень (так званий метод аналогії).

Відносне середнє квадратичне відхилення середньої арифметичної величини  $\bar{x}$ , визначеною за вибіркою довжиною  $n$ , від математичного сподівання  $m_x$  генеральної сукупності розраховується наступним чином

$$\varepsilon_{\bar{x}} = \frac{\sigma_{\bar{x}}}{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\bar{x}\sqrt{n}} = \frac{C_V}{\sqrt{n}} \cdot 100\%. \quad (2.23)$$

Із збільшенням довжини ряду концентрацій хімічних речовин відносна похибка  $\varepsilon_{\bar{x}}$  зменшується.

Відносна випадкова похибка визначення коефіцієнта варіації по вибірковим даним визначається таким чином

$$\varepsilon_{C_V} = \frac{\sigma_{C_V}}{C_V} \cdot 100\%. \quad (2.24)$$

Відносні випадкові похибки визначення коефіцієнта асиметрії або відношення  $C_S/C_V$  по ряду спостережень розраховуються за виразами

$$\varepsilon_{C_S} = \frac{\sigma_{C_S}}{C_S} \cdot 100\% ; \quad \varepsilon_{C_S/C_V} = \frac{\sigma_{C_S/C_V}}{C_S/C_V} \cdot 100\% . \quad (2.25)$$

Випадкові похибки зростають при збільшенні часової мінливості параметрів забрудненості, яка характеризується коефіцієнтом варіації  $C_V$ .

## Практична частина

Вихідні дані: ряди даних спостережень за якістю поверхневих вод за період спостережень 1966-2014 роки.

*Хід роботи:*

1. Отримаємо вихідні дані про концентрацію хімічних елементів у р.Тилігул за 1965-2014 роки згідно варіанту (додаток А.1) та формуємо таблицю (табл.2.1) вихідної вибірки у ПК за допомогою програми Microsoft Excel.

2. Знаходимо середнє арифметичне значення із величин концентрацій хімічних елементів  $\bar{C}$ , мг/дм<sup>3</sup> за формулою (2.9)

$$n=50 \quad \bar{C} = \frac{4289}{50} = 86 \text{ мг/дм}^3.$$

3. Розраховуємо модульні коефіцієнти  $k_i = \frac{C_i}{\bar{C}}$ .

Таблиця 2.1 – Розрахунки статистичних параметрів річних концентрацій хімічних речовин за методом моментів р.Тилігул-сmt.Березівка (приклад)

№ з/п	Рік	$C_i$ , мг/дм <sup>3</sup>	$k_i = \frac{C_i}{C}$	$k_i - 1$	$(k_i - 1)^2$	$(k_i - 1)^3$
1	1965	99,9	1,16	0,16	0,03	0,03
2	1966	65,9	0,77	-0,23	0,05	0,04
3	1967	24,3	0,28	-0,72	0,51	0,15
4	1968	117	1,36	0,36	0,13	0,18
5	1969	114	1,33	0,33	0,11	0,14
6	1970	107	1,24	0,24	0,06	0,07
7	1971	112	1,30	0,30	0,09	0,12
8	1972	146	1,70	0,70	0,49	0,83
9	1973	92,4	1,07	0,07	0,01	0,01
10	1974	102	1,19	0,19	0,03	0,04
11	1975	112	1,30	0,30	0,09	0,12
12	1976	82,5	0,96	-0,04	0,00	0,00
13	1977	71,9	0,84	-0,16	0,03	0,02
14	1978	59,3	0,69	-0,31	0,10	0,07
15	1979	88,8	1,03	0,03	0,00	0,00
16	1980	23,3	0,27	-0,73	0,53	0,14
17	1981	99,4	1,16	0,16	0,02	0,03
18	1982	74	0,86	-0,14	0,02	0,02
19	1983	46,4	0,54	-0,46	0,21	0,11
20	1984	69,5	0,81	-0,19	0,04	0,03
21	1985	23,4	0,27	-0,73	0,53	0,14
22	1986	127	1,48	0,48	0,23	0,34
23	1987	110	1,28	0,28	0,08	0,10
24	1988	90,2	1,05	0,05	0,00	0,00
25	1989	99,7	1,16	0,16	0,03	0,03
26	1990	122	1,42	0,42	0,18	0,25
27	1991	112	1,30	0,30	0,09	0,12
28	1992	97,5	1,13	0,13	0,02	0,02
29	1993	99,7	1,16	0,16	0,03	0,03
30	1994	93	1,08	0,08	0,01	0,01
31	1995	117	1,36	0,36	0,13	0,18
32	1996	97,2	1,13	0,13	0,02	0,02
33	1997	87,7	1,02	0,02	0,00	0,00
34	1998	87,5	1,02	0,02	0,00	0,00
35	1999	82,6	0,96	-0,04	0,00	0,00
36	2000	12	0,14	-0,86	0,74	0,10
37	2001	97,2	1,13	0,13	0,02	0,02
38	2002	89,9	1,05	0,05	0,00	0,00
39	2003	12	0,14	-0,86	0,74	0,10
40	2004	204,6	2,38	1,38	1,90	4,52
41	2005	58,8	0,68	-0,32	0,10	0,07
42	2006	121,7	1,42	0,42	0,17	0,24
43	2007	72,9	0,85	-0,15	0,02	0,02
44	2008	61,8	0,72	-0,28	0,08	0,06
45	2009	72,5	0,84	-0,16	0,02	0,02
46	2010	61,8	0,72	-0,28	0,08	0,06
47	2011	87,7	1,02	0,02	0,00	0,00
48	2012	87,5	1,02	0,02	0,00	0,00
49	2013	82,6	0,96	-0,04	0,00	0,00
50	2014	12	0,14	-0,86	0,74	0,10
					$\Sigma$ 8,50	$\Sigma$ 8,70

4. Далі знаходимо  $(k_i - 1)^2$  і  $(k_i - 1)^3$ . Для колонок 6 і 7 розраховуємо сумарні значення  $\sum (k_i - 1)^2$  і  $\sum (k_i - 1)^3$ .

5. Обчислюємо коефіцієнт варіації за формулою (2.15)

$$C_V = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (k_i - 1)^2}{n - 1}} = \sqrt{\frac{8,50}{49}} = 0,42.$$

6. Обчислюємо коефіцієнт асиметрії за формулою (2.17)

$$C_S = \frac{n}{(n - 1)(n - 2)} \frac{\sum_{i=1}^n (k_i - 1)^3}{C_V^3} = \frac{50 \cdot 8,70}{49 \cdot 48 \cdot 0,074} = 2,5.$$

7. Знаходимо середнє квадратичне відхилення за формулою (2.5)

$$\sigma_x = C_V \cdot \bar{C} = 0,42 \cdot 86 = 36,1 \text{ мг/дм}^3.$$

8. Розраховуємо похибки статистичних параметрів за формулами (2.18)-(2.22)

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} = \frac{36,1}{\sqrt{50}} = 5,11;$$

$$\sigma_{C_V} = \frac{C_V}{n + 4C_V^2} \sqrt{\frac{n}{2}(1 + C_V^2)} = \frac{0,42}{50 + 4 \cdot 0,42^2} \sqrt{\frac{50 \cdot (1 + 0,42^2)}{2}} = 0,045;$$

$$\sigma_{C_S} = \sqrt{\frac{6}{n}(1 + 6C_V^2 + 5C_V^4)} = \sqrt{\frac{6}{50}(1 + 6 \cdot 0,42^2 + 5 \cdot 0,42^4)} = 0,27.$$

9. Розраховуємо відносні випадкові похибки визначення статистичних параметрів за формулами (2.23)-(2.25)

$$\varepsilon_{\bar{x}} = \frac{C_V}{\sqrt{n}} \cdot 100\% = \frac{0,42}{\sqrt{50}} \cdot 100\% = 5,9\%;$$

$$\varepsilon_{C_V} = \frac{\sigma_{C_V}}{C_V} \cdot 100\% = \frac{0,045}{0,42} \cdot 100\% = 11\%;$$

$$\varepsilon_{C_S} = \frac{\sigma_{C_S}}{C_S} \cdot 100\% = \frac{0,27}{2,5} \cdot 100\% = 11\%.$$

6. Робимо висновки на підставі отриманих результатів: точність розрахунку коефіцієнта варіації є задовільною ( $\varepsilon_{C_v} < 15\%$ ), а точність розрахунку середнього арифметичного потребує подовження ряду даних ( $\varepsilon_{\bar{x}} > 5\%$ ).

Контрольні запитання:

1. Що являє собою математичне сподівання?
2. Чому дорівнює центральний момент випадкової величини першого порядку?
3. Що характеризують перший і другий центральні моменти?
4. Яку розмірність має коефіцієнт варіації?
5. Через які параметри можна виразити нормовані статистичні моменти  $C_v$  і  $C_s$ ?
6. Для чого використовуються відносні похибки статистичних параметрів?

**Практична робота №3**  
**РОЗРАХУНКИ ХАРАКТЕРИСТИК СТОКУ ЗАБРУДНЮЮЧИХ**  
**РЕЧОВИН ЗАДАНОЇ ЗАБЕЗПЕЧЕНОСТІ ЗА ТЕОРЕТИЧНИМИ**  
**ЗАКОНАМИ РОЗПОДІЛУ**

Мета роботи: вміти розраховувати статистичні параметри забрудненості води річки з використанням теоретичних кривих забезпеченості. Навчитися користуватися біноміальною кривою розподілу (за таблицею ординат розподілу Пірсона III типу).

**Теоретична частина**

Теоретичні закони розподілу ймовірностей базуються або на визначених теоретичних схемах, або є узагальненням емпіричних розподілів.

*Вимоги до теоретичних кривих розподілу величин [5]:*

- 1) У рівнянні кривої повинно бути якнайменше параметрів, які чисельно визначаються за вибірковими даними.
- 2) Через те, що значення стоку та індексів якості води або концентрацій завжди додатні, крива розподілу не повинна знаходитися в області від'ємних значень.
- 3) Верхня межа кривої розподілу необмежена.



4) Теоретичні криві розподілу повинні бути одномодальними, що витікає з умови однорідності і незалежності стокових величин.

Емпіричні криві забезпеченості не дають можливості визначити величини концентрацій забруднюючих речовин за межами вихідної інформації з необхідною точністю. Безпосередньо графічна екстраполяція емпіричної кривої забезпеченості в області невеликих ( $p < 5\%$ ) та великих ( $p > 95\%$ ) забезпеченостей має суб'єктивний характер й може призвести до значних похибок у розрахунках.

*Застосування теоретичних законів розподілу випадкових величин надає можливість розраховувати величини концентрацій забруднюючих речовин заданої забезпеченості на основі статистичних параметрів, визначених за гідрохімічними рядами.*

Теоретичні розподіли представляються у вигляді спеціально розроблених таблиць. Наприклад, ординати теоретичної кривої забезпеченості Пірсона III подаються у вигляді нормованих відхилень від середньої величини концентрації елементу [3, 5]

$$\Phi(P, C_S) = \frac{x_P - \bar{x}}{\sigma_x} = \frac{k_P - 1}{C_V}, \quad (3.1)$$

а ординати трипараметричного гама-розподілу - у вигляді модульних коефіцієнтів при заданому співвідношенні  $C_S/C_V$

$$k(P, C_V) = \frac{x_P}{\bar{x}} \quad (3.2)$$

Щоб скористатися таблицями теоретичних розподілів, спочатку необхідно визначити оцінки статистичних параметрів по матеріалах спостережень за забрудненістю поверхневих вод. При використанні методу найбільшої правдоподібності для розрахунків вибірових значень статистичних параметрів за теоретичний розподіл можна взяти тільки трипараметричний гама-розподіл, тому що формули методу найбільшої правдоподібності виведені саме з цього закону. Стосовно закону розподілу Пірсона III, то при  $C_S < 2C_V$  та при  $P > 90\%$  ординати теоретичної кривої забезпеченості можуть мати від'ємні значення, а це суперечить фізичній суті величин концентрації хімічних елементів.

Розрахунки характеристик за теоретичним розподілом Пірсона-III виконуються за виразом

$$x_P = (\Phi_{P, C_S} C_V + 1) \bar{x}, \quad (3.3)$$

а при застосуванні трипараметричного гама-розподілу

$$x_P = k_P \bar{x}. \quad (3.4)$$

## Практична частина

Вихідні дані: статистичні параметри вихідного ряду даних розраховані за методом моментів: середнє арифметичне значення із величин концентрацій хімічних елементів  $\bar{C}$ , мг/дм<sup>3</sup>, коефіцієнт варіації  $C_V$ , коефіцієнт асиметрії  $C_S$ , таблиця «Нормовані відхилення від середнього значення ординат розподілу Пірсона III типу  $\Phi(P, C_S) = \frac{x_P - \bar{x}}{\sigma_x} = \frac{k_P - 1}{C_V}$  (біноміальна крива розподілу» (додаток А.2).

### *Хід роботи:*

1. За визначеному по методу моментів значенню коефіцієнту асиметрії  $C_S = 2,5$  і по таблиці закону Пірсона III знаходимо нормовані відхилення Фр для різних забезпеченостей Р та записуємо у таблицю 3.1.
2. Будуємо теоретичну криву забезпеченості річних концентрацій хімічних речовин (рис. 3.1).
3. Порівнюємо отримані емпіричну криву розподілу (практична робота №1) та теоретичну криву.
4. Робимо висновок.

### Контрольні запитання:

1. Які три параметри необхідно розраховувати для знаходження ординат теоретичної кривої забезпеченості концентрацій речовин?
2. Яка крива називається теоретичною?
3. В чому різниця між теоретичною кривою і емпіричною кривою забезпеченості?
4. Як встановлюються ординати біноміальної кривої розподілу (Пірсона III типу)?
5. За яких умов використовується закон Пірсона III типу і коли застосовують трипараметричний гама-розподіл?

Таблиця 3.1 – Ординати кривої забезпеченості річних концентрацій хімічних речовин

Величина	Забезпеченість, P%															
	0,01	0,10	1,0	3,0	5	10	20	25	30	40	50	60	70	75	80	90
$\hat{O}_D$	7,31	5,37	3,39	2,42	1,97	1,33	0,68	0,46	0,28	-0,02	-0,25	-0,46	-0,64	-0,73	-0,81	-0,99
$\hat{O}_D C_V$	4,17	3,06	1,93	1,38	1,12	0,76	0,39	0,26	0,16	-0,01	-0,14	-0,26	-0,36	-0,42	-0,46	-0,56
$K_p = \hat{O}_D C_V + 1$	5,17	4,06	2,93	2,38	2,12	1,76	1,39	1,26	1,16	0,99	0,86	0,74	0,64	0,58	0,54	0,44
$C_p = K_D \bar{C}$	7,91	6,21	4,49	3,64	3,25	2,69	2,12	1,93	1,77	1,51	1,31	1,13	0,97	0,89	0,82	0,67

Продовження таблиці 3.1

Величина	Забезпеченість, P%			
	95	97	99	99,9
$\hat{O}_D$	-1,1	-1,14	-1,2	-1,24
$\hat{O}_D C_V$	-0,63	-0,65	-0,68	-0,71
$K_p = \hat{O}_D C_V + 1$	0,37	0,35	0,32	0,29
$C_p = K_D \bar{C}$	0,57	0,54	0,48	0,45

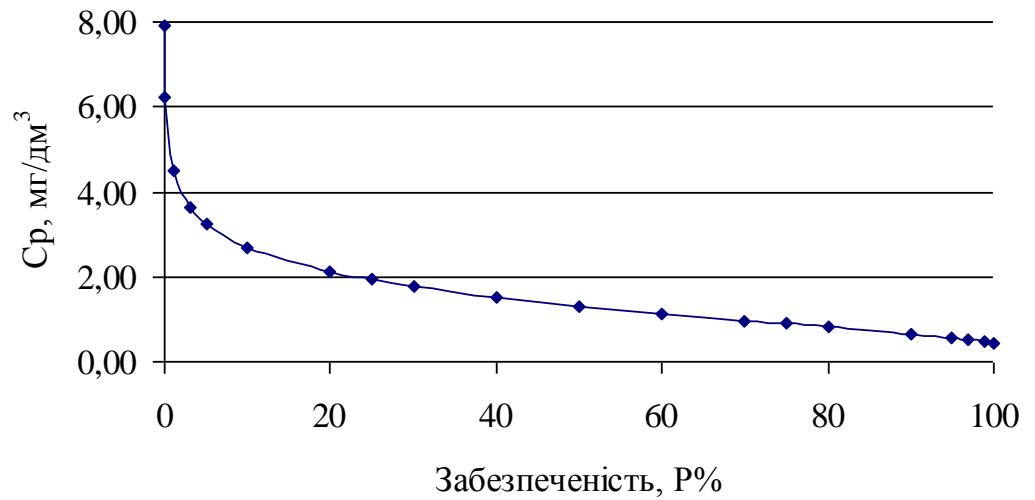


Рисунок 3.1 – Теоретична крива забезпеченості річних концентрацій хімічних речовин

**Практична робота №4**  
**ВИЯВ ТРЕНДУ В РЯДАХ КОНЦЕНТРАЦІЙ ЗАБРУДНЮЮЧИХ**  
**РЕЧОВИН ЗА ДОПОМОГОЮ КРИТЕРІЯ АББЕ І ПЕРЕВІРКА**  
**ГІПОТЕЗИ ПРО ВІДСУТНІСТЬ СИСТЕМНИХ ЗМІН**

Мета роботи: використовуючи вихідний ряд даних спостережень за якістю поверхневих вод суші розрахувати критерій Аббе і перевірити гіпотезу про наявність тренду або його відсутність.

**Теоретична частина**

Коли статистична неоднорідність ряду даних установлена і у фондових матеріалах є вказівки на наслідки інтенсивних водогосподарських перетворень, є сенс виявити тренд у хронологічній послідовності щорічних концентрацій забруднюючих речовин. Тренд – загальна тенденція зміни досліджуваних величин в бік зростання або зменшення. Для розв’язання цієї задачі можна використати критерій Аббе. В його основі лежить порівняння дисперсії значень випадкової величини  $X$  з сумою квадратів їх послідовних різниць  $S^2$  [3], яка менш чутлива до систематичної зміни математичного сподівання. Величина  $S^2$  розраховується за формулою

$$S^2 = \frac{1}{2(N-1)} \cdot \sum_{i=1}^{N-1} (x_{i+1} - x_i)^2, \quad (4.1)$$

де  $N$  - довжина вибірки (кількість років спостережень);

$x_{i+1}$  та  $x_i$  - наступне та попереднє значення хронологічного ряду.

Висувається нульова гіпотеза, яка передбачає, що тренд існує. Для перевірки гіпотези про відсутність систематичних змін в упорядкованій послідовності розраховується відношення

$$Z = \frac{S^2}{\sigma_X^2}, \quad (4.2)$$

де  $\sigma_X^2$  - дисперсія вихідного ряду.

Якщо  $Z \geq Z_{кр}$ , то можна зробити висновок, що ряд спостережень не має систематичного зсуву математичного сподівання (тренд відсутній), але коли  $Z < Z_{кр}$ , то тренд існує. Критичні значення  $Z_{кр}$  для  $\alpha = 0,05$  при  $N$  від 4 до 300 [3] наведені у таблиці 4.1. Недоліком критерію Аббе є те, що генеральна сукупність, з якої вилучається ряд спостережень, припускається нормальною, тому функція  $Z$  може «зреагувати» на циклічні коливання стоку, що безумовно впливає на загальну мінералізацію річкової води.

Таблиця 4.1 – Критичні значення розподілу величин [3]

Число даних	5%-ий рівень	Число даних	5%-ий рівень
4	0,390	35	0,729
5	0,410	36	0,733
6	0,446	37	0,736
7	0,468	38	0,740
8	0,491	39	0,743
9	0,512	40	0,746
10	0,531	41	0,749
11	0,548	42	0,752
12	0,564	43	0,755
13	0,578	44	0,758
14	0,591	45	0,760
15	0,603	46	0,763
16	0,614	47	0,765
17	0,624	48	0,768
18	0,633	49	0,770
19	0,642	50	0,772
20	0,560	51	0,774
21	0,657	52	0,776
22	0,665	53	0,778
23	0,671	54	0,780
24	0,678	55	0,782
25	0,684	56	0,784
26	0,689	57	0,785
27	0,695	58	0,878
28	0,700	59	0,789
29	0,705	60	0,791
30	0,709	100	0,837
31	0,714	150	0,867
32	0,718	200	0,885
33	0,722	300	0,906
34	0,726		

### Практична частина

Вихідні дані: щорічні дані про якість поверхневих вод суші, таблиця критичних значень  $Z_{\hat{e}D}$  для  $\alpha = 0,05$ .

*Хід роботи:*

1. Отримаємо вихідні дані про концентрацію хімічних елементів у р.Тилігул за 1965-2014 роки згідно варіанту (додаток А.1), розраховуємо суму квадратів послідовних різниць  $S$  за допомогою програми Microsoft Excel і заносимо у таблицю 4.2.

2. Далі розраховуємо за формулою величину  $S^2$  за формулою (4.1).

3. Розраховуємо дисперсію вихідного ряду  $\sigma_x^2$  за формулою (2.14)

$$\sigma_x^2 = \frac{\sum (C_i - \bar{C})^2}{n-1}, \text{ для цього складаємо таблицю 4.3.}$$

Таблиця 4.2 – Розрахунок послідовних різниць ( $x_{i+1} - x_i$ )

№ з/п	Роки	Концентрація елементу, мг/л	$(x_{i+1} - x_i)$	$(x_{i+1} - x_i)^2$
1	1965	99,9	65,9-99,9=-34,0	1156
2	1966	65,9	24,3-65,9=-41,6	1730,56
3	1967	24,3	93	8593
4	1968	117	-3	9
5	1969	114	-7	49
6	1970	107	5	25
7	1971	112	34	1156
8	1972	146	-54	2873
9	1973	92,4	10	92
10	1974	102	10	100
11	1975	112	-30	870
12	1976	82,5	-11	112
13	1977	71,9	-13	159
14	1978	59,3	30	870
15	1979	88,8	-66	4290
16	1980	23,3	76	5791
17	1981	99,4	-25	645
18	1982	74	-28	762
19	1983	46,4	23	534
20	1984	69,5	-46	2125
21	1985	23,4	104	10733
22	1986	127	-17	289
23	1987	110	-20	392
24	1988	90,2	10	90
25	1989	99,7	22	497
26	1990	122	-10	100
27	1991	112	-15	210
28	1992	97,5	2	5
29	1993	99,7	-7	45
30	1994	93	24	576
31	1995	117	-20	392
32	1996	97,2	-10	90
33	1997	87,7	0	0
34	1998	87,5	-5	24
35	1999	82,6	-71	4984
36	2000	12	85	7259
37	2001	97,2	-7	53
38	2002	89,9	-78	6068
39	2003	12	193	37095
40	2004	204,6	-146	21258
41	2005	58,8	63	3956
42	2006	121,7	-49	2381
43	2007	72,9	-11	123
44	2008	61,8	11	114
45	2009	72,5	-11	114
46	2010	61,8	26	671
47	2011	87,7	0	0
48	2012	87,5	-5	24
49	2013	82,6	-71	4984
50	2014	12	-12	144
				$\Sigma 134617$

Таблиця 4.3 – Розрахунок дисперсії значень випадкової величини  
(концентрації хімічних речовин)

№ з/п	Роки	Концентрація елементу, мг/л	$C_i - \bar{C}$	$(C_i - \bar{C})^2$
1	1965	99,9	13,9	193
2	1966	65,9	-20,1	404
3	1967	24,3	-61,7	3807
4	1968	117	31	961
5	1969	114	28	784
6	1970	107	21	441
7	1971	112	26	676
8	1972	146	60	3600
9	1973	92,4	6,4	41
10	1974	102	16	256
11	1975	112	26	676
12	1976	82,5	-3,5	12
13	1977	71,9	-14,1	199
14	1978	59,3	-26,7	713
15	1979	88,8	2,8	8
16	1980	23,3	-62,7	3931
17	1981	99,4	13,4	180
18	1982	74	-12	144
19	1983	46,4	-39,6	1568
20	1984	69,5	-16,5	272
21	1985	23,4	-62,6	3919
22	1986	127	41	1681
23	1987	110	24	576
24	1988	90,2	4,2	18
25	1989	99,7	13,7	188
26	1990	122	36	1296
27	1991	112	26	676
28	1992	97,5	11,5	132
29	1993	99,7	13,7	188
30	1994	93	7	49
31	1995	117	31	961
32	1996	97,2	11,2	125
33	1997	87,7	1,7	3
34	1998	87,5	1,5	2
35	1999	82,6	-3,4	12
36	2000	12	-74	5476
37	2001	97,2	11,2	125
38	2002	89,9	3,9	15
39	2003	12	-74	5476
40	2004	204,6	118,6	14066
41	2005	58,8	-27,2	740
42	2006	121,7	35,7	1274
43	2007	72,9	-13,1	172
44	2008	61,8	-24,2	586
45	2009	72,5	-13,5	182
46	2010	61,8	-24,2	586
47	2011	87,7	1,7	3
48	2012	87,5	1,5	2
49	2013	82,6	-3,4	12
50	2014	12	-74	5476
		$\bar{C} = 86$ мг/л		$\Sigma 62882$

4. Розраховуємо статистику Аббе  $Z$  за формулою (4.2).
5. Перевіряємо умову  $Z \geq Z_{кр}$  або  $Z < Z_{кр}$ .
6. Робимо висновок про наявність або відсутність тренду у рядах даних.

Контрольні запитання:

1. Коли виконується перевірка наявності тренду у рядах спостережень?
2. У чому полягає «нульова гіпотеза»?
3. Як розрахувати дисперсію вихідного ряду?
4. Який недолік критерію Аббе?
5. Яку назву має метод критерію Аббе?

**Практична робота №5**  
**УСТАНОВЛЕННЯ «ВИКИДІВ» У РЯДАХ ГІДРОХІМІЧНИХ ТА**  
**ГІДРОЕКОЛОГІЧНИХ ХАРАКТЕРИСТИК НА ОСНОВІ ПЕРЕВІРКИ**  
**ГІПОТЕЗИ ПРО ОДНОРІДНІСТЬ ЧЛЕНІВ СТАТИСТИЧНОЇ**  
**СУКУПНОСТІ**

Мета роботи: використовуючи ряди спостережень за концентраціями хімічних речовин у річці Тилігул за період 1965-2014 роки, перевірити члени вихідного ряду на однорідність та присутність «викидів».

**Теоретична частина**

Якісний стан річки залежить від багатьох факторів. Аналізуючи дані спостережень можна виявити певні закономірності у змінах стану водних об'єктів. Наприклад, відомо, що досліджувана річка забруднена фенолами внаслідок діяльності нафтопереробного заводу. Середня річна концентрація фенолів у воді за період з 1980 по 2010 роки змінювалася у границях 0,0004–0,0001 мг/дм<sup>3</sup>, ГДК фенолів становить 0,001 мг/дм<sup>3</sup> (для питних потреб). В 2011 році середньорічна концентрація фенолів у воді склала 0,005 мг/дм<sup>3</sup> (перевисила ГДК у 5 разів), тобто різко відрізнялася від звичних середніх річних концентрацій. Такі значення величин прийнято називати "*випадіннями*" або "*викидами*" [8]. *Випадіння чинять вплив на середнє значення, але особливо на значення центральних моментів*, оскільки при їх оцінці в суму входять доданки, які являють собою великі різниці між випадіннями і середніми значеннями, котрі підносяться до другої, третьої чи четвертої степені у залежності від того, оцінку якого моменту треба знайти.



Для знаходження викидів використовують екстремальні значення ряду випадкових величин  $x_{\min}$  і  $x_{\max}$

$$u = |x_{екстр} - \bar{x}|, \quad (5.1)$$

де  $x_{екстр}$  - параметр, який об'єднує мінімальне і максимальне значення випадкових величин;

$\bar{x}$  - середня арифметична величина, розрахована за роки спостережень.

Якщо вважати, що випадкова величина  $X$  має нормальний розподіл і підпорядковується розподілу  $\chi^2$  з числом ступенів волі  $\nu = n - 1$  [8]

$$\nu = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \chi^2. \quad (5.2)$$

Для встановлення викидів необхідно розрахувати випадкову величину  $t$  що підпорядковується розподілу Стьюдента [8]

$$t = \frac{u}{\sigma_x} = \frac{|x_{екстр} - \bar{x}|}{\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}}}, \quad (5.3)$$

де  $u$  - параметр, розрахований за формулою (5.1);

$n$  - довжина вибірки;

$\sigma_x$  - середнє квадратичне відхилення випадкової величини, яке розраховується за формулою (2.14).

Термін **«генеральна сукупність»** визначає *необмежену кількість незалежних випадкових величин, які підпорядковуються одному закону розподілу*. Із генеральної сукупності, як вже зазначалося, ми можемо мати безмежну кількість вибірок та на основі кожної здобути статистичні оцінки [5, 8].

Термін **«вибірка» (статистичний ряд)** означає *обмежену кількість випадкових величин, здобутих випадковим чином із генеральної сукупності*. Тому статистичні ряди називають вибірками з генеральної сукупності. *Вибірки випадкові та число їх безмежне* [5, 8].

Для перевірки членів ряду на однорідність формулюють основну гіпотезу  $H_0$  про те, що середнє значення досліджуваного ряду величин належить до тієї ж генеральної сукупності, що й інші члени вибірки. Для її перевірки розраховують емпіричний критерій Стьюдента для рівня значущості  $\alpha = 0,05$  і числа ступенів волі  $\nu$ . Далі перевіряється умова  $t > t_{кр}(\alpha, \nu)$  або  $t < t_{кр}(\alpha, \nu)$  (тобто чи входить середня величина до критичної

області). І в залежності від результатів приймають або відхиляють гіпотезу  $H_0$  [8].

Якщо приймається гіпотеза  $H_0$  - це означає, що середнє значення досліджуваного ряду величин належить до тієї ж генеральної сукупності, що й інші члени вибірки. **Якщо відхиляється гіпотеза  $H_0$  - це означає, що «випадіння» не належать до тієї ж генеральної сукупності,** що і решта членів цієї сукупності. У такому разі неоднорідні члени вилучаються з вибірки, і знову проводиться оцінка відповідних параметрів. Але «випадіння» не відкидаються зовсім. Їх треба пильно вивчати, оскільки вони відбивають ті чи інші аномальні особливості процесів, наслідком яких вони є.

Рівень значущості – це вірогідність  $\alpha$  відхилення нульової гіпотези, тоді як вона правильна. Іншими словами – це упевненість в прийнятті вірної гіпотези. Тобто, чим вищий рівень значущості, тим вища упевненість в правильності прийняття гіпотези і тим менша вірогідність зробити в процесі цього помилку.

У практиці статистичних вимірів прийнято вважати нижчим рівнем статистичної значущості 5% рівень  $\alpha = 0,05$ ; достатнім 1% рівень  $\alpha \leq 1$  і вищим рівнем 0,1%  $\alpha < 0,001$ .

### **Практична частина**

Вихідні дані: щорічні дані про якість поверхневих вод суші, таблиця критичних точок розподілу Стьюдента  $t_{кр}(\alpha, \nu)$ .

### *Хід роботи:*

1. Отримаємо вихідні дані про концентрацію хімічних елементів у р.Тилігул за 1965-2014 роки згідно варіанту (додаток А.1) та формуємо таблицю вихідної вибірки (аналогічно табл. 4.3 з 4 практичної роботи) за допомогою програми Microsoft Excel.

2. Досліджуємо вихідну вибірку і встановлюємо максимальне і мінімальне значення концентрації забруднюючих речовин :  $x_{\min}$  і  $x_{\max}$  .

3. Далі розраховуємо величину  $u$  за формулою (5.1) і параметр  $\nu$  за формулою (5.2).

4. Використовуючи отримані величини знаходимо випадкову величину  $t$  що підпорядковується розподілу Стьюдента за формулою (5.3).

5. Далі на рівні значущості  $\alpha$ , який устанавлюється дослідником, знаходять по таблиці (5.1)  $t_{кр}(\alpha, \nu)$  з умови (для правосторонньої критичної області), при цьому  $\nu = n - 1$ , де  $n$  - кількість членів вибірки.

6. Перевіряємо умову :

- **якщо  $t < t_{кр}$ , то гіпотеза  $H_0$  про однорідність членів вибірки не відхиляється,**

Таблиця 5.1 – Критичні точки розподілу Стьюдента [3, 8]

Число ступенів свободи	Рівень значущості $\alpha$ (одностороння критична область)					
	<i>0.10</i>	<i>0.05</i>	<i>0.02</i>	<i>0.01</i>	<i>0.002</i>	<i>0.001</i>
1	6.31	<b>12.7</b>	31.82	63.7	318.3	637.0
2	2.92	<b>4.30</b>	6.97	9.92	22.33	31.6
3	2.35	<b>3.18</b>	4.54	5.84	10.22	12.9
4	2.13	<b>2.78</b>	3.75	4.60	7.17	8.61
5	2.01	<b>2.57</b>	3.37	4.03	5.89	6.86
6	1.94	<b>2.45</b>	3.14	3.71	5.21	5.96
7	1.89	<b>2.36</b>	3.00	3.50	4.79	5.40
8	1.86	<b>2.31</b>	2.90	3.36	4.50	5.04
9	1.83	<b>2.26</b>	2.82	3.25	4.30	4.78
10	1.81	<b>2.23</b>	2.76	3.17	4.14	4.59
11	1.80	<b>2.20</b>	2.72	3.11	4.03	4.44
12	1.78	<b>2.18</b>	2.68	3.05	3.93	4.32
13	1.77	<b>2.16</b>	2.65	3.01	3.85	4.22
14	1.76	<b>2.14</b>	2.62	2.98	3.79	4.14
15	1.75	<b>2.13</b>	2.60	2.95	3.73	4.07
16	1.75	<b>2.12</b>	2.58	2.92	3.69	4.01
17	1.74	<b>2.11</b>	2.57	2.90	3.65	3.95
18	1.73	<b>2.10</b>	2.55	2.88	3.61	3.92
19	1.73	<b>2.09</b>	2.54	2.86	3.58	3.88
20	1.73	<b>2.09</b>	2.53	2.85	3.55	3.85
21	1.72	<b>2.08</b>	2.52	2.83	3.53	3.82
22	1.72	<b>2.07</b>	2.51	2.82	3.51	3.79
23	1.71	<b>2.07</b>	2.50	2.81	3.50	3.77
24	1.71	<b>2.06</b>	2.49	2.80	3.47	3.74
25	1.71	<b>2.06</b>	2.49	2.79	3.45	3.72
26	1.71	<b>2.06</b>	2.48	2.78	3.44	3.71
27	1.71	<b>2.05</b>	2.47	2.77	3.42	3.69
28	1.70	<b>2.05</b>	2.46	2.76	3.40	3.66
29	1.70	<b>2.05</b>	2.46	2.76	3.40	3.66
30	1.70	<b>2.04</b>	2.46	2.75	3.39	3.65
40	1.68	<b>2.02</b>	2.42	2.70	3.31	3.55
60	1.67	<b>2.00</b>	2.39	2.66	3.23	3.46
120	1.66	<b>1.98</b>	2.36	2.62	3.17	3.37
$\infty$	1.64	<b>1.96</b>	2.33	2.58	3.09	3.29
	0.05	0.025	0.01	0.005	0.001	0.0005

- якщо  $t > t_{кр}$ , то гіпотеза  $H_0$  відхиляється й приймається альтернативна гіпотеза  $H_1$  про те, що  $x_{екстр}$ , інакше кажучи «випадіння» не належать до тієї ж генеральної сукупності, що і решта членів цієї сукупності. Неоднорідні члени вилучаються з вибірки, і знову проводиться оцінка відповідних параметрів.

7. Робимо висновки про отримані результати.

Контрольні запитання:

1. Які значення гідроекологічних величин називають «викидами»?
2. Що називають статистичним рядом ( вибіркою)?
3. В чому головна відмінність «вибірки» і «генеральної сукупності»?
4. За допомогою яких параметрів можна встановити «викиди»?

### Практична робота №6

## ВИЗНАЧЕННЯ ЗАКОНОМІРНОСТЕЙ ДИНАМІКИ ВОДНОСТІ, СОЛОНОСТІ ТА КОНЦЕНТРАЦІЙ ЗАБРУДНЮЮЧИХ РЕЧОВИН У ЧАСІ НА ОСНОВІ РОЗРАХУНКІВ КОЕФІЦІЄНТУ ГАЛИННОСТІ

Мета роботи: навчитися аналізувати водність річки, виділяти фази водного режиму, встановлювати закономірності водності, солоності та концентрацій забруднюючих речовин на основі розрахунків коефіцієнту галинності.

### Теоретична частина

Показник мінералізації води та вміст головних іонів у річкових водах України схильні до трансформації як під впливом антропогенного навантаження, так і в результаті дії природних факторів, зокрема коливання водності річок, яке пов'язане з кліматичними змінами [9].

Для оцінки кількісних змін показника мінералізації запропоновано використовувати коефіцієнт галинності  $K_G$ . Його сутність полягає у наступному: у багаторічному ряді даних про мінералізацію води обирається референтний період, коли спостерігається умовно природний фон. Бажано, щоб цей період знаходився у межах перших п'яти років гідрохімічних спостережень. Осереднене значення середніх показників вважати початковою характеристикою  $GR$ . Відповідне значення для кожного

наступного року приймати за поточну характеристику  $G$ . Тоді, коефіцієнт галинності має вид:

$$K_G = G / GR \quad (6.1)$$

де  $G$  – мінералізація води за сучасний період, мг/дм<sup>3</sup>;

$GR$  – мінералізація води за період умовного гідрохімічного фону.

Якщо  $K_G > 1$  – мінералізація зростає, відповідно при коефіцієнті галинності менше за одиницю – мінералізація зменшується.

Багаторічні зміни показника мінералізації  $K_G$  у різні фази водного режиму трансформуються неодорідно (рис.6.1).

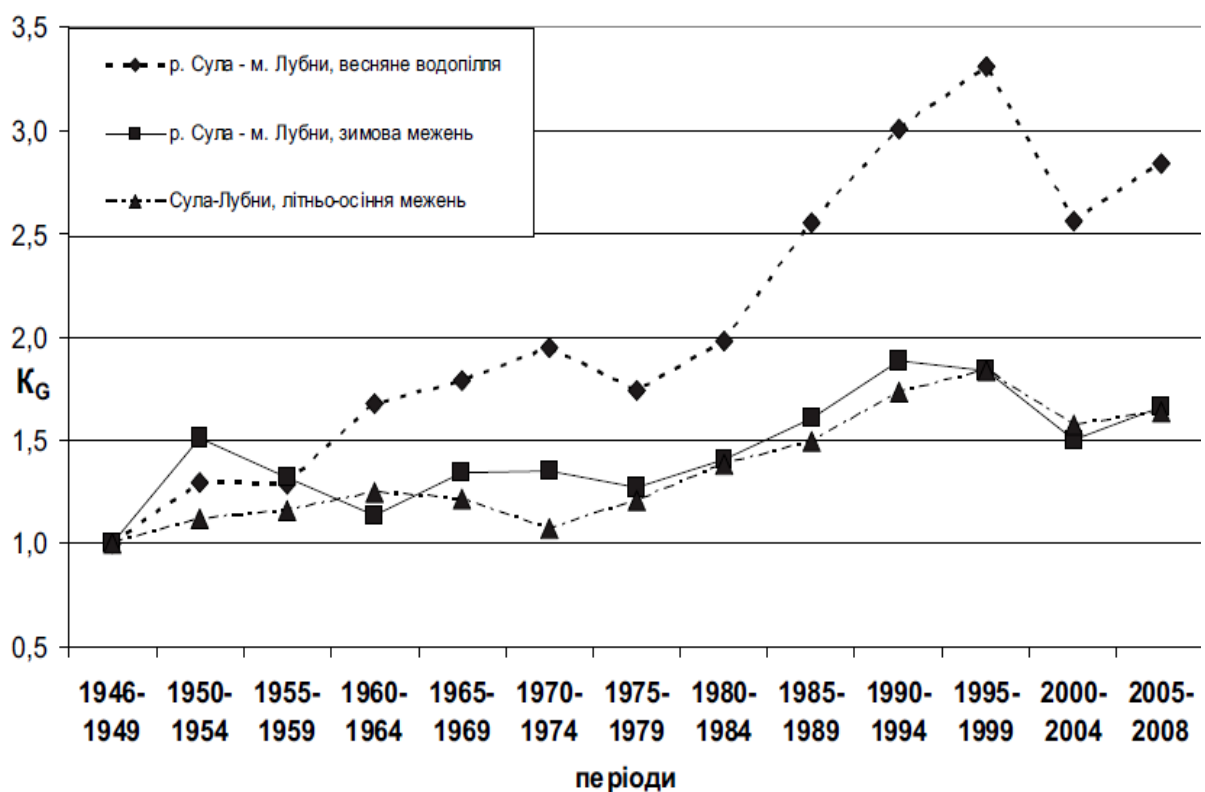


Рисунок 6.1 – Часовий розподіл величини коефіцієнту галинності для різних фаз водного режиму р. Сула - м. Лубни за період 1946-2008 рр. (за даними [9])

З рис. 6.1 видно, що найбільше значне зростання мінералізації води характерне для періоду весняного водопілля. Для меженних періодів характерна дещо інший характер багаторічних змін  $K_G$ . Характер коливань показника мінералізації майже ідентичний, як для періоду літньо-осінньої так і зимової межени [9].

## Практична частина

Вихідні дані: середньомісячні дані про якість поверхневих вод суші, середньомісячні дані про витрати води у р. Вятка - смт Аркуль.

### Хід роботи:

1. Отримаємо вихідні дані по середньомісячним концентраціям хімічних елементів у воді та середньомісячним витратам води у р. Вятка згідно варіанту (додаток А.4, додаток А.5).

2. Формуємо таблицю вихідних даних (табл.6.1) за допомогою програми Microsoft Excel та будуємо діаграми хронологічного ходу середньомісячних витрат води (приклад, рис. 6.2). Аналізуючі графіки виділяємо фази водности річки: *весняне водопілля 3-6 місяці, літньо-осіння межень 7-11 місяці, зимова межень 12-2 місяці.*

Таблиця 6.1 – Вихідні дані для розрахунку коефіцієнту галинності р.Вятка – смт Аркуль

Місяці	Середньомісячні витрати води, $Q$ , м <sup>3</sup> /с					Середньомісячні витрати води, осереднені за період 1995-1999рр.
	1995	1996	1997	1998	1999	
1	243	209	181	174	171	196
2	156	156	156	161	161	158
3	150	157	162	162	162	159
4	188	326	429	807	1132	576
5	3635	3859	3654	3298	3126	3514
6	754	586	462	414	396	522
7	256	266	347	378	375	324
8	181	175	167	167	164	171
9	136	143	141	138	143	140
10	156	151	154	162	162	157
11	226	223	139	143	143	175
12	125	138	162	147	147	144

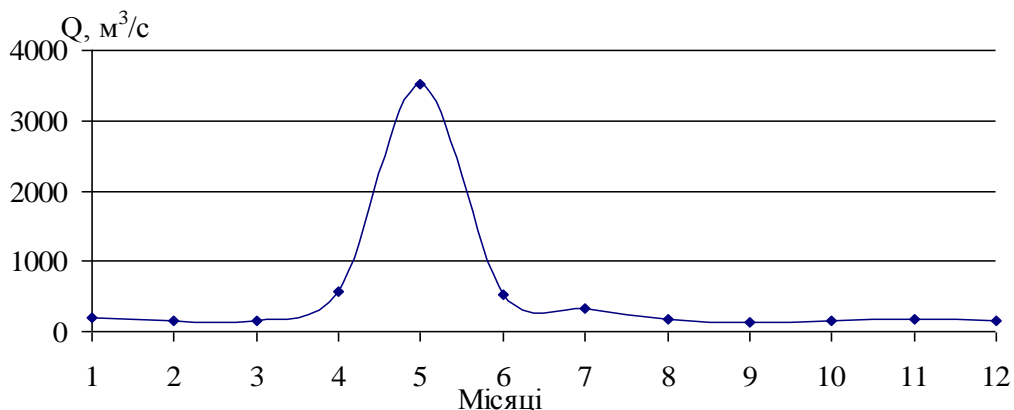


Рисунок 6.2 – Хронологічний хід середньомісячних витрат води р.Вятка – смт Аркуль (осереднених за період 1995-1999 рр.)

3. Розраховуємо  $GR$  – мінералізацію води за період умовного гідрохімічного фону. Для нашого прикладу за період з умовним фоном будемо вважати перші 5 років досліджень, тобто 1965-1969 роки (Додаток А.5, варіант 1) (табл.6.2).

4. Розраховуємо коефіцієнт галінності  $K_G$  за формулою (6.1) окремо для кожної фази водності, з цією метою складаємо таблиці 6.3,6.4.

Таблиця 6.2 – Розрахунок мінералізації води за період умовного гідрохімічного фону р.Вятка

	Сума іонів за місяць $\sum U, \text{мг/л}$				
	1965	1966	1967	1968	1969
1	1456.5	255	1150	998	980
2	634.3	324	1310	781	850
3	615.5	631	1710	702	630
4	424.5	1370	1140	1136	985
5	838.0	1215	1390	1250	1105
6	1191.3	1200	1450	1010	1200
7	1222.6	729	1420	985	905
8	1063.6	677	1260	814	670
9	1321.0	721	1650	802	750
10	900.4	1970	1010	562	1200
11	1419.2	494	758	450	1063
12	555	1100	1150	578	755
Мінералізація води за період умовного гідрохімічного фону <b><math>GR = 898 \text{ мг/л}</math></b> (середня сума іонів за 1965-1969 рр.)					

Таблиця 6.3 – Підрахунок середньої мінералізації для окремих фаз водності за досліджувані роки 1995-1999 рр. р.Вятка

з.м. – зимова межень; в.в. – весняне водопілля; л.-о.м. - літньо-осіння межень

Місяць	Сума іонів за місяць $\sum U, \text{мг/л}$									
	Роки									
	1995		1996		1997		1998		1999	
1	1472	897	270	575	1165	1218	1013	801	995	877
2	649	з.м.	339	з.м.	1325	з.м.	796	з.м.	865	з.м.
3	631	783 в.в.	646	1119 в.в.	1725	1438 в.в.	717	1040 в.в.	645	995 в.в.
4	440		1385		1155		1151		1000	
5	853		1230		1405		1265		1120	
6	1206		1215		1465		1025		1215	
7	1238	1200 л.-о.м.	744	933 л.-о.м.	1435	1235 л.-о.м.	1000	738 л.-о.м.	920	933 л.-о.м.
8	1079		692		1275		829		685	
9	1336		736		1665		817		765	
10	915		1985		1025		577		1215	
11	1434		509		773		465		1078	
12	570	з.м.	1115	з.м.	1165	з.м.	593	з.м.	770	з.м.

Таблиця 6.4 - Розрахунок коефіцієнта галинності  $K_G$  для різних фаз водності р.Вятка – смт Аркуль

Коефіцієнт галинності, $K_G$	1995	1996	1997	1998	1999
$K_G$ під час зимової межени (12-2 місяці)	1,00	0,64	1,36	0,89	0,98
$K_G$ під час весняного водопілля (3-6 місяці)	0,87	1,25	1,60	1,16	1,11
$K_G$ під час літньо-осінньої межени (7-11 місяці)	1,34	1,04	1,38	0,82	1,04
<b>Середній <math>K_G</math> за рік</b>	<b>1,07</b>	<b>0,98</b>	<b>1,45</b>	<b>0,96</b>	<b>1,04</b>

5. У таблиці 6.3 осереднюємо суми іонів для різних фаз водності окремо для кожного року. У таблиці 6.4 знаходимо коефіцієнти галинності для різних фаз водності у кожному році (за формулою 6.1).

Для 1995 року:

$$K_G (\text{з.м.}) = 897 / 898 = 1,00.$$

$$K_G (\text{в.в.}) = 783 / 898 = 0,87.$$

$$K_G (\text{л.-о.м.}) = 1200 / 898 = 1,34.$$

Для 1996 року:

$$K_G (\text{з.м.}) = 575 / 898 = 0,64.$$

$$K_G (\text{в.в.}) = 1119 / 898 = 1,25.$$

$$K_G (\text{л.-о.м.}) = 933 / 898 = 1,04.$$

Для 1997 року:

$$K_G (\text{з.м.}) = 1218 / 898 = 1,36.$$

$$K_G (\text{в.в.}) = 1438 / 898 = 1,60.$$

$$K_G (\text{л.-о.м.}) = 1235 / 898 = 1,38.$$

Для 1998 року:

$$K_G (\text{з.м.}) = 801 / 898 = 0,89.$$

$$K_G (\text{в.в.}) = 1040 / 898 = 1,16.$$

$$K_G (\text{л.-о.м.}) = 738 / 898 = 0,82.$$

Для 1999 року:

$$K_G (\text{з.м.}) = 877 / 898 = 0,98.$$

$$K_G (\text{в.в.}) = 995 / 898 = 1,11.$$

$$K_G (\text{л.-о.м.}) = 933 / 898 = 1,04.$$



6. Будуємо графік часового розподілу величини коефіцієнту галинності для різних фаз водного режиму (рис.6.3) за даними таблиці 6.4, робимо висновок.

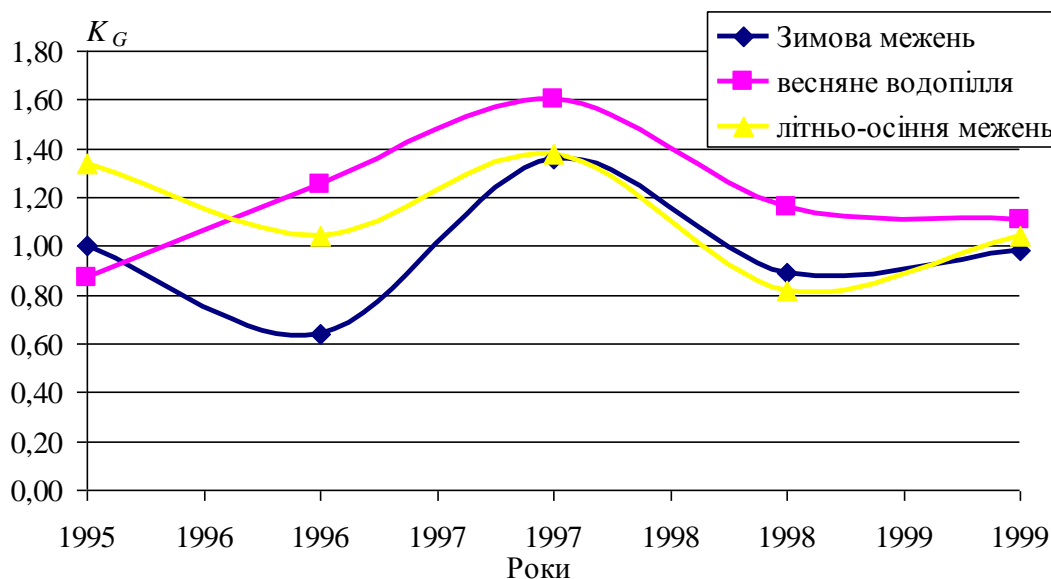


Рисунок 6.1 – Часовий розподіл величини коефіцієнту галинності для різних фаз водного режиму р.Вятка – смт Аркуль за період 1995-1999 рр.

Контрольні запитання:

1. Від яких чинників залежать показник мінералізації води та вміст головних іонів у річкових водах?
2. У чому полягає сутність коефіцієнту галинності  $K_G$ ?
3. Як розрахувати коефіцієнт галинності  $K_G$ ?
4. За яких умов вибирається референтний період?
5. Як змінюється мінералізація води на протязі року?

## ЛІТЕРАТУРА

1. Лобода Н.С. Методи статистичного аналізу у гідрологічних розрахунках і прогнозах: навч. посіб. / Одес. держ. еколог. ун-т. Одеса: Екологія. 2010. 184 с.
2. Пособие по определению расчетных гидрологических характеристик / под ред. А.В. Рождественского, А.Г. Лобанова. Ленинград: Гидрометеиздат, 1984. Ч. I. 447 с.
3. Лобода Н.С., Овчарук В.А. Гідрологічні розрахунки: конспект лекцій / Дніпропетровськ: Економіка. 2006. 175 с.
4. Лобода Н.С. Расчеты и обобщения характеристик годового стока рек Украины в условиях антропогенного влияния: моногр. / Одес. держ. еколог. ун-т. Одеса: Екологія, 2005. 208 с.
5. Лобода Н.С., Гопченко Є.Д. Стохастичні моделі у гідрологічних розрахунках: навч. посібник для студ. вищих навч. закл. / Одес. держ. еколог. ун-т. Одеса: Екологія, 2006. 200 с.
6. Сніжко С. І. Оцінка та прогнозування якості природних вод. Підручник. - К.: Ніка-Центр, 2001. - 264 с.
7. Методика екологічної оцінки якості поверхневих вод за відповідними категоріями / Романенко В.Д., Жукинський В.М., Оксіюк О.П. та ін. – К.: Символ-Т, 1998. - 28 с.
8. Школьніий Є.П., Лоева І.Д., Гончарова Л.Д. Обробка та аналіз гідрометеорологічної інформації / Одес. держ. еколог. ун-т. Одеса: 1999. 600с.
9. Хільчевський В.К., Курило С.М. Аналіз багаторічної трансформації хімічного складу річкових вод України // Гідрологія, гідрохімія і гідроекологія / за ред. докт. геогр. наук В.К. Хільчевського. Київ. нац. ун-т ім. Т.Шевченка. Київ, 2014. Т.2 (33). С. 17-28.

Додаток А.1 – Ряди даних спостережень за концентраціями хімічних елементів р.Тилігул – смт Березівка, період 1965-2014 роки

Номер варіанту		1	2	3	4	5	6	7	8
№ з/п	Роки	Магній, мг/л	Хлориди, мг/л	Хром (с вал,+б), мг/л	Цинк, мг/л	Амоній, мг/л	Мідь, мг/л	Сульфат и, SO <sub>4</sub> <sup>2-</sup> , мг/л	Нітрати, мг/л
1	1965	99,9	190	0,012	0,002	0,90	0,004	271	0,84
2	1966	65,9	230	0,018	0,003	1,76	0,002	58	0,74
3	1967	24,3	147	0,009	0,002	0,26	0,002	62	0,33
4	1968	117	33	0,015	0,001	0,28	0,003	63	0,15
5	1969	114	241	0,014	0,002	0,80	0,003	68	0,52
6	1970	107	42,9	0,009	0,027	1,04	0,005	220	1,92
7	1971	112	83,3	0,006	0,021	3,70	0,003	124	1,66
8	1972	146	167	0,004	0,017	2,95	0,010	246	0,21
9	1973	92,4	352	0,004	0,015	0,25	0,002	220	1,39
10	1974	102	213	0,004	0,014	3,38	0,002	243	0,30
11	1975	112	258	0,004	0,017	2,26	0,006	97	1,10
12	1976	82,5	176	0,004	0,015	0,34	0,005	170	1,64
13	1977	71,9	174	0,005	0,018	1,53	0,005	71	1,25
14	1978	59,3	199	0,007	0,006	4,00	0,007	209	1,45
15	1979	88,8	183	0,013	0,005	1,96	0,004	140	0,06
16	1980	23,3	179	0,012	0,004	0,50	0,003	196	0,37
17	1981	99,4	72,3	0,007	0,008	0,80	0,003	289	0,89
18	1982	74,0	237	0,009	0,003	0,63	0,004	60	0,44
19	1983	46,4	232	0,009	0,005	0,64	0,005	400	0,01
20	1984	69,5	230	0,009	0,004	0,76	0,005	236	0,00
21	1985	23,4	222	0,009	0,005	1,37	0,004	82	0,02
22	1986	127	36,7	0,013	0,004	8,00	0,002	54	0,01
23	1987	110	294	0,009	0,005	3,38	0,004	68	0,02
24	1988	90,2	294	0,016	0,008	0,02	0,005	54	0,01
25	1989	99,7	194	0,000	0,010	0,01	0,007	121	0,02
26	1990	122	262	0,010	0,007	0,02	0,005	113	0,19
27	1991	112	27,3	0,012	0,009	0,05	0,005	65	0,76
28	1992	97,5	125	0,005	0,007	0,04	0,005	238	0,48
29	1993	99,7	233	0,008	0,005	0,57	0,003	116	0,22
30	1994	93,0	172	0,007	0,007	0,01	0,004	102	0,25
31	1995	117	265	0,004	0,012	0,02	0,006	208	0,47
32	1996	97,2	233	0,007	0,008	0,20	0,005	166	0,42
33	1997	87,7	179	0,006	0,010	0,04	0,007	826	0,07
34	1998	87,5	191	0,002	0,006	0,01	0,003	36,8	0,00
35	1999	82,6	176	0,000	0,003	0,12	0,002	396	0,00

Продовження таблиці А.1

Номер варіанту		1	2	3	4	5	6	7	8
№ з/п	Роки	Магній, мг/л	Хлориди, мг/л	Хром (с вал,+б), мг/л	Цинк, мг/л	Амоній, мг/л	Мідь, мг/л	Сульфати, SO <sub>4</sub> <sup>2-</sup> , мг/л	Нітрати, мг/л
36	2000	12,0	66,2	0,003	0,006	0,04	0,004	338	0,19
37	2001	97,2	176	0,000	0,004	0,05	0,001	340	0,09
38	2002	89,9	222	0,010	0,004	0,02	0,001	360	0,00
39	2003	12,0	37,2	0,011	0,003	0,13	0,003	108	0,01
40	2004	204,6	83,0	0,007	0,003	0,04	0,002	395	0,04
41	2005	58,8	151,0	0,000	0,000	0,06	0,002	334	0,04
42	2006	121,7	110,2	0,013	0,010	0,04	0,001	343	0,51
43	2007	72,9	146,7	0,018	0,000	0,43	0,000	333	0,04
44	2008	61,8	325,3	0,010	0,003	0,01	0,001	231	0,12
45	2009	72,5	147,7	0,006	0,015	0,12	0,010	191	0,02
46	2010	61,8	319,6	0,000	0,015	0,10	0,007	37	0,05
47	2011	87,7	179	0,006	0,010	0,04	0,007	826	0,07
48	2012	87,5	191	0,002	0,006	0,01	0,003	36,8	0,00
49	2013	82,6	176	0,000	0,003	0,12	0,002	396	0,00
50	2014	12,0	66,2	0,003	0,006	0,04	0,004	338	0,19

Додаток А.2 – Нормовані відхилення від середнього значення ординат розподілу Пірсона III типу

$$\frac{x_{p\%} - \bar{x}}{\sigma} = \frac{k_{p\%} - 1}{C_V} = \hat{O}(P, C_S) \text{ (біноміальна крива розподілу)}$$

$C_S$	$P\%$											
	0,01	0,1	1,0	3,0	5,0	10	20	25	30	40	50	60
-4,0	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,49	0,49	0,46	0,41	0,31
-3,8	0,527	0,527	0,526	0,526	0,526	0,526	0,520	0,52	0,51	0,48	0,42	0,30
-3,6	0,556	0,556	0,556	0,556	0,556	0,555	0,550	0,54	0,54	0,49	0,42	0,28
-3,4	0,588	0,588	0,588	0,588	0,587	0,586	0,580	0,57	0,55	0,50	0,41	0,27
-3,2	0,625	0,625	0,625	0,625	0,625	0,621	0,610	0,59	0,57	0,51	0,41	0,25
-3,0	0,667	0,667	0,666	0,666	0,665	0,661	0,640	0,62	0,59	0,51	0,40	0,22
-2,8	0,715	0,715	0,715	0,714	0,711	0,703	0,670	0,64	0,60	0,51	0,39	0,20
-2,6	0,770	0,770	0,770	0,766	0,764	0,746	0,700	0,66	0,61	0,51	0,37	0,17
-2,4	0,835	0,833	0,830	0,826	0,820	0,792	0,720	0,67	0,62	0,51	0,35	0,17
-2,2	0,914	0,910	0,905	0,895	0,882	0,842	0,750	0,69	0,64	0,50	0,33	0,12
-2,0	1,01	1,00	0,990	0,970	0,950	0,900	0,780	0,71	0,64	0,49	0,31	0,09
-1,8	1,11	1,11	1,09	1,06	1,02	0,940	0,800	0,72	0,64	0,48	0,28	0,05
-1,6	1,26	1,24	1,20	1,14	1,10	0,990	0,810	0,73	0,64	0,46	0,25	0,02
-1,4	1,41	1,39	1,32	1,23	1,17	1,04	0,830	0,73	0,64	0,44	0,22	-0,02
-1,2	1,68	1,58	1,45	1,33	1,24	1,08	0,840	0,74	0,63	0,42	0,19	-0,05
-1,0	1,92	1,79	1,59	1,42	1,32	1,13	0,850	0,73	0,62	0,39	0,16	-0,09
-0,8	2,23	2,02	1,74	1,52	1,38	1,17	0,860	0,73	0,60	0,37	0,13	-0,12
-0,6	2,57	2,27	1,88	1,01	1,45	1,20	0,850	0,72	0,59	0,34	0,10	-0,16
-0,4	2,98	2,54	2,03	1,70	1,52	1,23	0,850	0,71	0,57	0,31	0,07	-0,19
-0,2	3,37	2,81	2,18	1,79	1,58	1,26	0,850	0,69	0,55	0,28	0,03	-0,22
0,0	3,72	3,09	2,33	1,88	1,64	1,28	0,840	0,67	0,52	0,25	0,00	-0,25
0,2	4,16	3,38	2,47	1,96	1,70	1,30	0,83	0,65	0,50	0,22	-0,03	-0,28
0,4	4,61	3,66	2,61	2,04	1,75	1,32	0,82	0,63	0,47	0,19	-0,07	-0,31
0,6	5,05	3,96	2,75	2,12	1,80	1,33	0,83	0,61	0,44	0,16	-0,10	-0,34
0,8	5,50	4,24	2,89	2,18	1,84	1,34	0,78	0,58	0,41	0,12	-0,13	-0,37
1,0	5,96	4,53	3,03	2,25	1,88	1,34	0,76	0,55	0,38	0,09	-0,16	-0,39

Продовження додатку А.2

$C_S$	$P\%$											
	0,01	0,1	1,0	3,0	5,0	10	20	25	30	40	50	60
1,2	6,41	4,81	3,15	2,31	1,92	1,34	0,73	0,52	0,35	0,05	-0,19	-0,42
1,4	6,87	5,09	3,27	2,37	1,95	1,34	0,71	0,49	0,31	0,02	-0,22	-0,44
1,6	7,31	5,37	3,39	2,42	1,97	1,33	0,68	0,46	0,28	-0,02	-0,25	-0,46
1,8	7,76	5,64	3,50	2,46	1,99	1,32	0,64	0,42	0,24	-0,05	-0,28	-0,48
2,0	8,21	5,91	3,60	2,51	2,00	1,30	0,61	0,39	0,20	-0,08	-0,31	-0,49
2,2	8,63	6,14	3,68	2,54	2,02	1,27	0,57	0,35	0,16	-0,12	-0,33	-0,50
2,4	9,00	6,37	3,78	2,60	2,00	1,25	0,52	0,29	0,12	-0,14	-0,35	-0,51
2,6	9,39	6,54	3,86	2,63	2,00	1,21	0,48	0,25	0,085	-0,17	-0,37	-0,51
2,8	9,77	6,86	3,96	2,65	2,00	1,18	0,44	0,22	0,057	-0,20	-0,39	-0,51
3,0	10,16	7,10	4,05	2,66	1,97	1,13	0,39	0,19	0,027	-0,22	-0,40	-0,51
3,2	10,55	7,35	4,11	2,66	1,96	1,09	0,35	0,15	-0,006	-0,25	-0,41	-0,51
3,4	10,9	7,54	4,18	2,66	1,94	1,06	0,31	0,11	-0,036	-0,27	-0,41	-0,50
3,6	11,3	7,72	4,24	2,66	1,93	1,03	0,28	0,064	-0,072	-0,28	-0,42	-0,49
3,8	11,67	7,97	4,29	2,65	1,90	1,00	0,24	0,032	-0,095	-0,30	-0,42	-0,48
4,0	12,02	8,17	4,34	2,65	1,90	0,96	0,21	0,010	-0,120	-0,31	-0,41	-0,46
4,2	12,40	8,38	4,39	2,64	1,88	0,93	0,19	-0,10	-0,13	-0,31	-0,41	-0,45
4,4	12,76	8,60	4,42	2,63	1,86	0,91	0,15	-0,032	-0,15	-0,32	-0,40	-0,44
4,6	13,12	8,76	4,46	2,62	1,84	0,87	0,13	-0,052	-0,17	-0,32	-0,40	-0,42
4,8	13,51	8,96	4,50	2,60	1,81	0,82	0,10	-0,075	-0,19	-0,32	-0,39	-0,41
5,0	13,87	9,12	4,54	2,60	1,78	0,78	0,068	-0,099	-0,20	-0,33	-0,38	-0,40
5,2	14,25	9,27	4,59	2,60	1,74	0,73	0,035	-0,120	-0,21	-0,33	-0,37	-0,38
5,4	14,60	9,42	4,62	2,60	1,70	0,67	0,02	-0,100	-0,21	-0,33	-0,37	-0,37
5,6	14,95	9,59	4,65	2,60	1,67	0,62	0,0	-0,120	-0,21	-0,30	-0,36	-0,36
5,8	15,32	9,70	4,70	2,60	1,64	0,57	-0,02	-0,140	-0,21	-0,30	-0,35	-0,35
6,0	15,67	9,84	4,70	2,60	1,60	0,51	-0,05	-0,150	-0,21	-0,30	-0,34	-0,34
6,2	16,04	9,95	4,71	2,60	1,56	0,47	-0,05	-0,150	-0,21	-0,30	-0,34	-0,34
6,4	16,40	10,05	4,71	2,60	1,52	0,42	-0,05	-0,150	-0,21	-0,30	-0,33	-0,39

Продовження додатку А.2

$C_S$	P%								$\hat{O}_{5\%} - \hat{O}_{95\%}$	Коефіцієнт скошеності $S = \frac{x_{5\%} - x_{95\%} - 2x_{50\%}}{x_{5\%} - x_{95\%}}$
	70	75	80	90	95	97	99	99,9		
-4,0	-0,120	-0,010	-0,21	-0,96	-1,90	-2,65	-4,34	-8,17	2,40	-0,93
-3,8	-0,095	-0,032	-0,24	-1,00	-1,90	-2,65	-4,29	-7,97	2,426	-0,91
-3,6	-0,072	-0,064	-0,28	-1,03	-1,93	-2,66	-4,24	-7,72	2,486	-0,89
-3,4	-0,036	-0,11	-0,31	-1,06	-1,945	-2,66	-4,18	-7,54	2,527	-0,86
-3,2	-0,006	-0,15	-0,35	-1,09	-1,96	-2,66	-4,11	-7,35	2,58	-0,83
-3,0	-0,027	-0,19	-0,39	-1,13	-1,97	-2,66	-4,05	-7,10	2,64	-0,80
-2,8	-0,057	-0,22	-0,44	-1,18	-2,00	-2,65	-3,86	-6,86	2,71	-0,76
-2,6	-0,085	-0,25	-0,48	-1,21	-2,00	-2,63	-3,86	-6,54	2,76	-0,71
-2,4	-0,12	-0,29	-0,52	-1,25	-2,00	-2,60	-3,78	-6,37	2,82	-0,67
-2,2	-0,16	-0,35	-0,57	-1,27	-2,02	-2,54	-3,68	-6,14	2,90	-0,62
-2,0	-0,20	-0,39	-0,61	-1,30	-2,00	-2,51	-3,60	-5,91	2,92	-0,57
-1,8	-0,24	-0,42	-0,64	-1,32	-1,99	-2,46	-3,50	-5,64	3,01	-0,51
-1,6	-0,28	-0,46	-0,68	-1,33	-1,97	-2,42	-3,39	-5,37	3,07	-0,45
-1,4	-0,31	-0,49	-0,71	-1,34	-1,95	-2,37	-3,27	-5,09	3,12	-0,39
-1,2	-0,35	-0,52	-0,73	-1,34	-1,92	-2,31	-3,15	-4,81	3,16	-0,34
-1,0	-0,38	-0,55	-0,76	-1,34	-1,88	-2,25	-3,02	-4,53	3,20	-0,27
-0,8	-0,41	-0,58	-0,79	-1,34	-1,84	-2,18	-2,89	-4,24	3,22	-0,22
-0,6	-0,44	-0,61	-0,80	-1,33	-1,80	-2,12	-2,75	-3,96	3,25	-0,17
-0,4	-0,47	-0,63	-0,82	-1,32	-1,75	-2,04	-2,61	-3,66	3,27	-0,11
-0,2	-0,50	-0,65	-0,83	-1,30	-1,70	-1,96	-2,47	-3,38	3,28	-0,05
0,0	-0,52	-0,67	-0,84	-1,28	-1,64	-1,88	-2,33	-3,09	3,28	0,00
0,2	-0,55	-0,69	-0,85	-1,26	-1,58	-1,79	-2,18	-2,81	3,28	0,06
0,4	-0,57	-0,71	-0,85	-1,23	-1,52	-1,70	-2,03	-2,54	3,27	0,11
0,6	-0,59	-0,72	-0,85	-1,20	-1,45	-1,61	-1,88	-2,27	3,25	0,17

Продовження додатку А.2

$C_S$	$P\%$								$\hat{O}_{5\%} - \hat{O}_{95\%}$	Коефіцієнт скошеності $S = \frac{x_{5\%} - x_{95\%} - 250\%}{x_{5\%} - x_{95\%}}$
	70	75	80	90	95	97	99	99,9		
0,8	-0,60	-0,73	-0,86	-1,17	-1,38	-1,52	-1,74	-2,02	3,22	0,22
1,0	-0,62	-0,73	-0,85	-1,13	-1,32	-1,42	-1,59	-1,79	3,20	0,28
1,2	-0,63	-0,74	-0,84	-1,08	-1,24	-1,33	-1,45	-1,58	3,16	0,34
1,4	-0,64	-0,73	-0,83	-1,04	-1,17	-1,23	-1,32	-1,39	3,12	0,39
1,6	-0,64	-0,73	-0,81	-0,99	-1,10	-1,14	-1,20	-1,24	3,07	0,45
1,8	-0,64	-0,72	-0,80	-0,94	-1,02	-1,06	-1,09	-1,11	3,01	0,51
2,0	-0,64	-0,71	-0,78	-0,90	-0,95	-0,97	-0,99	-1,00	2,95	0,57
2,2	-0,64	-0,69	-0,75	-0,842	-0,882	-0,895	-0,905	-0,910	2,89	0,62
2,4	-0,62	-0,67	-0,72	-0,792	-0,820	-0,826	-0,830	-0,833	2,82	0,67
2,6	-0,61	-0,66	-0,70	-0,746	-0,764	-0,766	-0,770	-0,770	2,76	0,72
2,8	-0,60	-0,64	-0,67	-0,703	-0,711	-0,714	-0,715	-0,715	2,71	0,76
3,0	-0,59	-0,62	-0,64	-0,661	-0,665	-0,666	-0,666	-0,667	2,64	0,80
3,2	-0,57	-0,59	-0,61	-0,621	-0,625	-0,625	-0,625	-0,625	2,59	0,83
3,4	-0,55	-0,57	-0,58	-0,586	-0,587	-0,588	-0,588	-0,588	2,53	0,86
3,6	-0,54	-0,54	-0,55	-0,555	-0,556	-0,556	-0,556	-0,556	2,48	0,89
3,8	-0,51	-0,52	-0,52	-0,526	-0,526	-0,526	-0,526	-0,527	2,43	0,91
4,0	-0,49	-0,49	-0,50	-0,5000	-0,500	-0,500	-0,500	-0,500	2,40	0,92
4,2	-0,47	-0,473	-0,475	-0,476	-0,476	-0,476	-0,477	-0,477	2,36	0,94
4,4	-0,451	-0,454	-0,455	-0,455	-0,455	-0,455	-0,455	-0,455	2,32	0,95
4,6	-0,432	-0,434	-0,435	-0,435	-0,435	-0,435	-0,435	-0,435	2,28	0,97
4,8	-0,416	-0,416	-0,416	-0,416	-0,416	-0,416	-0,417	-0,417	2,23	0,98
5,0	-0,399	-0,400	-0,400	-0,400	-0,400	-0,400	-0,400	-0,400	2,18	0,98
5,2	-0,384	-0,385	-0,385	-0,385	-0,385	-0,385	-0,385	-0,385	2,12	0,98
5,4	-0,37	-0,37	-0,37	-0,37	-0,37	-0,37	-0,37	-0,37	2,07	1,00



Продовження додатку А.2

$C_S$	$P\%$								$\hat{O}_{5\%} - \hat{O}_{95\%}$	Коефіцієнт скошеності $S = \frac{x_{5\%} - x_{95\%} - 2x_{50\%}}{x_{5\%} - x_{95\%}}$
	70	75	80	90	95	97	99	99,9		
5,6	-0,36	-0,36	-0,36	-0,36	-0,36	-0,36	-0,36	-0,36	2,03	1,00
5,8	-0,35	-0,35	-0,35	-0,35	-0,35	-0,35	-0,35	-0,35	1,99	1,00
6,0	-0,34	-0,34	-0,34	-0,34	-0,34	-0,34	-0,34	-0,34	1,94	1,00
6,2	-0,34	-0,34	-0,34	-0,34	-0,34	-0,34	-0,34	-0,34	1,90	1,00
6,4	-0,33	-0,33	-0,33	-0,33	-0,33	-0,33	-0,33	-0,33	1,85	1,00

Таблиця А.3 – Значення критерію Фішера  $F$  для рівня значущості 0.05 $\nu_1$  - число ступенів свободи для більшої дисперсії $\nu_2$  - число ступенів свободи для меншої дисперсії

$\nu_2$	$\nu_1$								
	12	14	16	20	24	30	40	50	75
10	2.9	2.9	2.8	2.8	2.7	2.7	2.7	2.6	2.6
11	2.8	2.7	2.7	2.7	2.6	2.6	2.5	2.5	2.5
12	2.7	2.6	2.6	2.5	2.5	2.5	2.4	2.4	2.4
13	2.6	2.6	2.5	2.5	2.4	2.4	2.3	2.3	2.3
14	2.5	2.5	2.4	2.4	2.4	2.3	2.3	2.2	2.2
15	2.5	2.4	2.3	2.3	2.3	2.3	2.2	2.2	2.2
16	2.4	2.4	2.3	2.3	2.2	2.2	2.2	2.1	2.1
17	2.4	2.3	2.3	2.3	2.2	2.2	2.1	2.1	2.0
18	2.3	2.3	2.3	2.3	2.2	2.1	2.1	2.0	2.0
19	2.3	2.3	2.2	2.2	2.1	2.1	2.0	2.0	2.0
20	2.3	2.2	2.2	2.1	2.1	2.0	2.0	2.0	1.9
21	2.3	2.2	2.2	2.1	2.1	2.0	2.0	1.9	1.9
22	2.2	2.2	2.1	2.1	2.0	2.0	1.9	1.9	1.9
23	2.2	2.1	2.1	2.0	2.0	2.0	1.9	1.9	1.8
24	2.2	2.1	2.1	2.0	2.0	1.9	1.9	1.9	1.8
25	2.2	2.1	2.1	2.0	2.0	1.9	1.9	1.8	1.8
26	2.2	2.1	2.1	2.0	2.0	1.9	1.9	1.8	1.8
27	2.1	2.1	2.0	2.0	1.9	1.9	1.8	1.8	1.8
28	2.1	2.1	2.0	2.0	1.9	1.9	1.8	1.8	1.8
29	2.1	2.1	2.0	1.9	1.9	1.9	1.8	1.8	1.7
30	2.1	2.0	2.0	1.9	1.9	1.8	1.8	1.8	1.7
32	2.1	2.0	2.0	1.9	1.9	1.8	1.8	1.7	1.7
34	2.1	2.0	2.0	1.9	1.8	1.8	1.7	1.7	1.7
36	2.0	2.0	1.9	1.9	1.8	1.8	1.7	1.7	1.7
38	2.0	2.0	1.9	1.9	1.8	1.8	1.7	1.7	1.6
40	2.0	2.0	1.9	1.8	1.8	1.7	1.7	1.7	1.6
42	2.0	1.9	1.9	1.8	1.8	1.7	1.7	1.6	1.6
44	2.0	1.9	1.9	1.8	1.8	1.7	1.7	1.6	1.6
46	2.0	1.9	1.9	1.8	1.8	1.7	1.7	1.6	1.6
48	2.0	1.9	1.9	1.8	1.7	1.7	1.6	1.6	1.6
50	2.0	1.9	1.9	1.8	1.7	1.7	1.6	1.6	1.6
100	1.9	1.8	1.8	1.7	1.6	1.6	1.5	1.5	1.4
200	1.8	1.7	1.7	1.6	1.6	1.5	1.7	1.4	1.4
$\infty$	1.8	1.6	1.6	1.6	1.5	1.5	1.4	1.4	1.3

Таблиця А.4 – Середньомісячні витрати води у р. Вятка - смт Аркуль, період 1965-2014 роки

Місяць	Витрати води осереднені за місяць, Q, м <sup>3</sup> /с									
	Роки									
	Варіант 1					Варіант 2				
	1965	1966	1967	1968	1969	1970	1971	1972	1973	1974
1	47,7	58,8	93,6	51,0	184	385	156	205	470	15,2
2	54,0	51,1	54,2	46,1	154	161	147	19,7	45,1	14,2
3	56,3	53,4	64,9	48,3	152	162	133	165	239	59,7
4	99,5	767	2424	58,2	1821	3540	173	1570	2957	249
5	589	468	891	156	2520	3859	859	550	1011	327
6	582	165	226	110	428	806	256	301	391	278
7	128	155	245	87,7	292	378	192	431	591	312
8	56,5	95,4	315	53,6	158	186	136	596	1264	318
9	77,8	258	437	190	146	159	136	380	459	320
10	312	350	881	200	150	164	121	331	361	306
11	225	238	730	35,4	154	226	108	268	319	202
12	79,2	176	1479	104	140	170	125	267	297	247
	Варіант 3					Варіант 4				
	1975	1976	1977	1978	1979	1980	1981	1982	1983	1984
1	47,7	53,7	40,3	59,0	56,7	55,5	55,4	55,4	55,2	59,0
2	54,0	54,5	53,7	50,8	51,7	51,7	52,6	53,6	52,4	50,8
3	56,3	57,5	54,5	50,0	49,0	50,4	49,4	48,3	49,7	50,0
4	99,5	333	44,0	60,0	61,2	65,5	58,2	59,4	72,6	60,0
5	589	1143	265	799	850	865	850	809	749	799
6	582	1058	224	181	193	209	206	181	165	181
7	128	210	64,3	212	193	181	162	150	141	212
8	56	113	28,6	71,7	71,7	66,4	63,8	61,2	61,2	71,7
9	78	137	44,8	193	242	239	226	219	209	193
10	312	872	57,8	262	262	273	287	280	276	262
11	225	378	109	478	462	433	402	363	265	478
12	79,2	105	62,1	150	143	143	143	145	145	150
	Варіант 5					Варіант 6				
	1985	1986	1987	1988	1989	1990	1991	1992	1993	1994
1	47,7	53,7	40,3	40,3	41,1	41,1	44,8	45,5	46,3	53,7
2	54,0	54,5	53,7	54,5	54,5	53,7	53,7	53,7	53,7	53,7
3	56,3	57,5	54,5	54,5	54,5	55,2	56,0	56,0	56,7	57,5
4	99,5	333	44,0	61,3	59,8	56,7	50,7	49,2	46,3	307
5	589	1143	265	265	289	327	383	334	299	822
6	582	1058	224	1058	1050	982	688	555	511	248
7	128	210	64,3	200	187	180	170	153	143	74,1
8	56	113	28,6	64,3	61,0	64,3	100	97,0	83,9	28,6
9	78	137	44,8	64,3	93,7	104	123	130	137	48,0
10	312	872	57,8	71	104	150	187	170	137	419
11	225	378	109	361	378	314	297	300	299	117
12	79,2	105	62,1	97,7	94,1	93,1	88,7	86,9	86,1	63,5

Продовження таблиці А.4

Місяць	Витрати води осереднені за місяць, Q, м <sup>3</sup> /с									
	Роки									
	Варіант 7					Варіант 8				
	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004
1	243	209	181	174	171	170	168	156	385	156
2	156	156	156	161	161	147	148	152	161	147
3	150	157	162	162	162	162	162	133	162	133
4	188	326	429	807	1132	2790	2914	3521	3540	173
5	3635	3859	3654	3298	3126	2428	1842	996	3859	859
6	754	586	462	414	396	361	323	259	806	256
7	256	266	347	378	375	361	323	215	378	192
8	181	175	167	167	164	151	154	138	186	136
9	136	143	141	138	143	148	148	154	159	136
10	156	151	154	162	162	159	154	138	164	121
11	226	223	139	143	143	143	125	114	226	108
12	125	138	162	147	147	144	142	131	170	125
	Варіант 9					Варіант 10				
	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014
1	470	414	395	340	287	264	204	62,6	15,5	205
2	15,1	14,9	14,8	14,4	14,5	14,4	14,4	27,4	45,1	19,7
3	59,7	97,3	109	149	171	172	174	182	215	165
4	249	278	292	339	1338	2029	2432	2381	1368	1570
5	1011	868	828	618	536	514	511	406	342	550
6	320	312	312	312	296	294	280	282	302	301
7	505	591	591	533	551	493	381	344	389	431
8	485	604	706	1264	1057	1068	454	318	482	596
9	448	379	372	358	365	367	422	356	333	380
10	316	306	312	318	347	335	325	349	354	331
11	319	207	211	268	288	272	288	295	282	268
12	273	277	270	263	272	270	263	252	282	267

Таблиця А.5 –Значення місячних сум іонів у воді р. Вятка -  
сmt. Аркуль, період 1965-2014 роки

Місяць	Сума іонів за місяць $\sum U, \text{мг/л}$									
	Роки									
	Варіант 1					Варіант 2				
	1965	1966	1967	1968	1969	1970	1971	1972	1973	1974
1	1456.5	255	1150	998	980	369	456	845	1050	769
2	634.3	324	1310	781	850	438	525	1005	833	639
3	615.5	631	1710	702	630	745	832	1405	754	419
4	424.5	1370	1140	1136	985	1484	1571	835	1188	774
5	838.0	1215	1390	1250	1105	1329	1416	1085	1302	894
6	1191.3	1200	1450	1010	1200	1314	1401	1145	1062	989
7	1222.6	729	1420	985	905	843	930	1115	1037	694
8	1063.6	677	1260	814	670	791	878	955	866	459
9	1321.0	721	1650	802	750	835	922	1345	854	539
10	900.4	1970	1010	562	1200	2084	2171	705	614	989
11	1419.2	494	758	450	1063	608	695	453	502	852
12	555	1100	1150	578	755	1214	1301	845	630	544
	Варіант 3					Варіант 4				
	1975	1976	1977	1978	1979	1980	1981	1982	1983	1984
1	1157	155	850	698	680	267	156	545	750	469
2	334	224	1010	481	550	336	225	705	533	339
3	316	531	1410	402	330	643	532	1105	454	119
4	125	1270	840	836	685	1382	1271	535	888	474
5	538	1115	1090	950	805	1227	1116	785	1002	594
6	891	1100	1150	710	900	1212	1101	845	762	689
7	923	629	1120	685	605	741	630	815	737	394
8	764	577	960	514	370	689	578	655	566	159
9	1021	621	1350	502	450	733	622	1045	554	239
10	600	1870	710	262	900	1982	1871	405	314	689
11	1119	394	458	150	763	506	395	153	202	552
12	255	1000	850	278	455	1112	1001	545	330	244
	Варіант 5					Варіант 6				
	1985	1986	1987	1988	1989	1990	1991	1992	1993	1994
1	1257	205	940	848	920	319	306	830	950	619
2	434	274	1100	631	790	388	375	990	733	489
3	416	581	1500	552	570	695	682	1390	654	269
4	225	1320	930	986	925	1434	1421	820	1088	624
5	638	1165	1180	1100	1045	1279	1266	1070	1202	744
6	991	1150	1240	860	1140	1264	1251	1130	962	839
7	1023	679	1210	835	845	793	780	1100	937	544
8	864	627	1050	664	610	741	728	940	766	309
9	1121	671	1440	652	690	785	772	1330	754	389
10	700	1920	800	412	1140	2034	2021	690	514	839
11	1219	444	548	300	1003	558	545	438	402	702
12	355	1050	940	428	695	1164	1151	830	530	394

Продовження таблиці А.5

Місяць	Сума іонів за місяць $\sum U, \text{мг/л}$									
	Роки									
	Варіант 7					Варіант 8				
	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004
1	1472	270	1165	1013	995	384	471	860	1065	784
2	649	339	1325	796	865	453	540	1020	848	654
3	631	646	1725	717	645	760	847	1420	769	434
4	440	1385	1155	1151	1000	1499	1586	850	1203	789
5	853	1230	1405	1265	1120	1344	1431	1100	1317	909
6	1206	1215	1465	1025	1215	1329	1416	1160	1077	1004
7	1238	744	1435	1000	920	858	945	1130	1052	709
8	1079	692	1275	829	685	806	893	970	881	474
9	1336	736	1665	817	765	850	937	1360	869	554
10	915	1985	1025	577	1215	2099	2186	720	629	1004
11	1434	509	773	465	1078	623	710	468	517	867
12	570	1115	1165	593	770	1229	1316	860	645	559
	Варіант 9					Варіант 10				
	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014
1	1507	305	1200	1048	1030	419	506	895	1100	819
2	684	374	1360	831	900	488	575	1055	883	689
3	666	681	1760	752	680	795	882	1455	804	469
4	475	1420	1190	1186	1035	1534	1621	885	1238	824
5	888	1265	1440	1300	1155	1379	1466	1135	1352	944
6	1241	1250	1500	1060	1250	1364	1451	1195	1112	1039
7	1273	779	1470	1035	955	893	980	1165	1087	744
8	1114	727	1310	864	720	841	928	1005	916	509
9	1371	771	1700	852	800	885	972	1395	904	589
10	950	2020	1060	612	1250	2134	2221	755	664	1039
11	1469	544	808	500	1113	658	745	503	552	902
12	605	1150	1200	628	805	1264	1351	895	680	594