МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

для виконання практичних робіт

по вивченню дисципліни

«МЕТОДИ БАГАТОВИМІРНОГО СТАТИСТИЧНОГО АНАЛІЗУ ПРИ ВИРІШЕННІ ГІДРОЕКОЛОГІЧНИХ ЗАДАЧ»

Одеса – 2018

Практична робота № 1

«Побудова автокореляційної функції для подовжньої складової швидкості течії. Визначення часу проходження одного турбулентного вихора. Визначення розміру турбулентного вихора»

Швидкість течії у річках неоднакова на різних проміжках потоку і змінюється, як по ширині, так і по вертикалі водного перерізу. Сучасні прилади (осцилограф) дають змогу виміряти і записати пульсаційні зміни швидкості течії в часі, тому розрізняють миттєву швидкість і середню швидкість, яку часто називають місцевою швидкістю у точці потоку.

Миттєва швидкість (М) – швидкість у певній точці потоку в дану мить. Вона змінюється в часі за величиною і напрямом.

Розподіл швидкостей течії води в ріці залежить від типу ріки, морфологічних особливостей, нахилу водної поверхні, нерівності русла. У водному перерізі русла по вертикалі найменші швидкості спостерігаються біля дна (вплив нерівностей русла), а до поверхні спочатку спостерігається зростання швидкості, а потім уповільнення. Максимальна швидкість у ріках спостерігається поблизу поверхні, або на віддалі 0.2 Н (Н – глибина вертикалі) від поверхні. Якщо на вертикалі відкласти величини швидкостей і з'єднати їх плавною лінією, то одержана лінія буде профілем швидкостей по вертикалі.

Турбулентний потік являє собою сукупність накладених на усереднений рух вихорів (збурень) різних масштабів. Самі великі вихори виходять внаслідок нестійкості усередненого руху. Ці вихори розпадаються на дрібніші, і т.д. Процес послідовного подрібнення турбулентних збурень обмежений меншими вихорами. При вивченні руху великих вихорів молекулярною в’язкістю рідини можна знехтувати, при русі не малих вихорів облік молекулярної в’язкості необхідний. Очевидно, що максимальний

масштаб вихорів визначається розмірами розглянутого потоку, а мінімальний – в'язкістю рідини.

Поняття «*масштаб турбулентності*» виражає характерний розмір який є в потоці турбулентних створень. Обчисленні масштаби, які характеризують розміри найбільш крупних низькочастотних вихорів, можна назвати ще «*зовнішнім масштабом турбулентності*».

Миттєва швидкість турбулентного потоку є величиною випадковою, отже для її обробки та розрахунків широко застосовують теорію випадкових процесів і теорію ймовірності.

У якості міри розсіювання випадкової величини відносно її середнього арифметичного значення у математичній статистиці широко використовують поняття середньоквадратичного відхилення

$$\sigma_u \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{n}(u_j - \bar{u})^2}{n}}, \qquad (1.1)$$

де σ_u - стандарт випадкової величини; u_j - миттєва швидкість в точці у j-ий момент часу; $\bar{u}$ - усереднена за довгий період часу швидкість у розглянутій точці; n - число вимірювань миттєвих швидкостей, яке за величиною дорівнює тривалості інтервалу осереднення (n=300).

Використовуючи гіпотезу про «*заморожену турбулентність*», суть якої полягає в тому, що індивідуальні зміни турбулентності збурень, які переносяться середнім потоком, малі, і можна припустити що вихорі переміщуються із середньою швидкістю потоку. Відповідно:

$$l = \bar{u}\,\tau_0, \qquad (1.2)$$

де *l*–зовнішній масштаб турбулентних збурень; $\bar{u}$ - усереднена швидкість в даній точці; τ_0 - час нульової кореляції.

Слід зазначити, що таким чином визначають поздовжні розміри великомасштабних вихорів, для характеристики малих збурень використовується «внутрішній масштаб турбулентності»

Хід роботи.

1) Вносимо вихідні дані по результатам вимірювання швидкості течії в точці (згідно варіанту) у програму Excele. Дані (300 значень) заносимо у стовпчик підряд.
2) Для розрахунку коефіцієнту автокореляції виконуємо зсув ряду даних на одне значення (часовий зсув τ).
3) Далі за допомогою функції “кореляція” виконуємо розрахунок автокореляції подовжної складової швидкості течії.
4) Коефіцієнт автокореляції повинен досягнути від”ємних значень, на цьому зсув τ закінчується, розрахунки припиняються.
5) З отриманих даних будуємо нормовану часову автокореляційну функцію (вісь абсцис – τ, вісь ординат – $r(\tau)$).
6) Далі розраховуємо зовнішній масштаб турбулентних збурень за формулою (1.2).

Вихідні дані

Варіант 1

Таблиця миттєвих швидкостей , см/с

Вертикаль № 1, точка № 1,

H=2,62 м, h=2,52 м, T=300 с; Δt = 1с

Ряд	Стовпчик											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	24	33	37	33	22	37	26	35	33	22	28	26
2	25	35	24	35	26	35	24	33	28	22	26	27
3	22	42	26	26	26	37	26	24	28	35	22	25
4	28	44	33	26	26	37	28	37	29	31	20	28
5	22	48	37	34	33	44	24	39	26	31	24	26
6	27	50	33	39	33	44	22	33	31	30	26	24
7	27	48	28	35	26	45	26	26	26	26	26	26
8	27	67	26	35	28	39	26	33	31	20	26	35
9	33	46	37	33	28	44	22	31	31	21	27	26
10	29	37	33	35	33	28	22	31	28	22	31	35
11	29	37	28	33	33	28	22	26	33	22	24	35
12	31	37	34	37	22	24	26	28	24	26	33	37
13	42	37	28	37	25	24	35	28	26	28	33	22
14	37	44	26	37	28	28	26	33	31	31	31	31
15	42	35	35	39	26	35	26	34	24	28	31	31
16	44	28	35	33	24	28	28	28	31	22	28	36
17	46	33	35	33	22	28	33	26	31	32	22	39
18	39	31	37	26	24	34	26	25	28	28	33	39
19	37	26	37	28	24	44	33	26	26	28	28	40
20	33	24	31	33	26	44	28	26	28	33	28	42
21	24	37	26	26	22	37	28	33	28	30	26	42
22	22	44	22	24	33	28	22	31	31	35	24	42
23	27	33	34	24	24	33	26	33	31	33	24	44
24	26	33	37	22	33	28	33	24	28	26	26	33
25	33	33	33	24	26	33	26	35	20	31	33	31

Варіант 2

Таблиця миттєвих швидкостей , см/с

Вертикаль № 1, точка № 2,

H=2,62 м, h=2,09 м, T=300 с; Δt = 1с

Ряд	Стовпчик											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	37	49	45	47	37	49	39	36	39	31	41	31
2	39	47	39	49	39	47	35	26	35	31	44	27
3	34	47	45	49	39	47	35	28	37	35	39	27
4	28	55	43	49	39	49	43	37	35	31	39	33
5	36	55	49	47	39	46	39	43	26	31	39	39
6	43	55	47	49	39	49	37	39	28	33	40	45
7	43	49	43	49	35	39	43	45	35	39	41	55
8	39	49	39	45	33	43	45	43	35	35	39	54
9	49	47	49	47	35	43	37	37	35	33	39	49
10	47	49	54	47	35	43	39	37	33	33	45	55
11	43	47	46	47	26	45	39	37	33	37	43	51
12	43	53	49	43	33	45	37	45	31	39	33	49
13	43	54	49	45	43	45	33	43	31	48	35	39
14	43	53	49	37	39	49	37	41	31	41	35	43
15	41	49	45	45	39	43	43	37	28	31	39	47
16	37	49	43	45	39	45	45	37	24	37	33	51
17	37	45	47	45	45	47	47	43	24	40	37	53
18	47	45	47	43	49	45	43	55	28	40	28	51
19	43	45	47	39	57	45	39	49	31	39	28	45
20	49	43	47	37	57	45	37	41	27	39	30	47
21	49	45	43	39	55	43	35	37	27	41	27	47
22	47	43	45	39	55	43	43	31	28	41	31	41
23	49	45	47	39	49	37	49	33	31	45	28	43
24	53	45	49	37	49	39	49	37	28	41	31	43
25	53	43	47	39	49	39	43	39	27	48	27	45

Варіант 3

Таблиця миттєвих швидкостей , см/с

Вертикаль № 2, точка № 3,

H=7,15 м, h=4,29 м, T=300 с; Δt = 1с

Ряд	Стовпчик											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	58	64	58	56	68	60	64	64	72	61	58	57
2	64	58	61	54	68	64	68	63	69	63	59	62
3	62	57	59	54	62	66	69	64	68	67	59	66
4	60	56	58	58	62	67	67	65	67	66	61	61
5	52	58	56	63	60	66	66	64	66	64	64	66
6	47	60	56	60	58	66	64	64	64	64	59	65
7	58	66	56	62	58	64	58	62	64	65	60	67
8	62	68	56	58	60	66	62	62	65	63	56	68
9	58	58	58	58	60	66	68	60	66	62	50	69
10	60	60	60	58	60	69	64	62	64	64	42	67
11	60	62	56	60	57	70	62	63	65	64	51	64
12	56	62	56	60	52	72	62	64	66	62	54	63
13	60	62	54	60	55	73	59	63	66	62	52	62
14	58	62	52	62	56	75	61	64	66	62	56	64
15	56	56	52	64	61	75	62	66	66	61	51	65
16	55	58	47	62	63	70	64	68	64	66	49	66
17	55	60	49	66	67	70	64	68	62	65	50	69
18	56	60	54	64	64	69	61	68	64	65	52	66
19	64	62	56	65	60	72	60	66	62	64	54	65
20	64	58	54	64	55	70	57	67	62	54	69	65
21	58	58	58	68	54	66	65	65	60	56	58	62
22	63	58	56	68	56	63	64	64	58	58	58	62
23	67	58	60	68	56	64	67	67	59	60	60	60
24	66	52	60	68	58	67	67	67	60	62	57	64
25	64	54	58	68	62	66	67	67	61	61	54	62

Варіант 4

Таблиця миттєвих швидкостей , см/с

Вертикаль № 2, точка № 2,

H=7,15 м, h=5,72 м, T=300 с; Δt = 1с

Ряд	Стовпчик											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	53	59	53	51	63	55	59	59	67	56	53	52
2	59	53	56	49	63	59	63	58	64	58	54	57
3	57	52	54	49	57	61	64	59	63	62	54	61
4	55	51	53	53	57	62	62	60	62	61	56	56
5	47	53	51	58	55	61	61	59	61	59	59	61
6	42	55	51	55	53	61	59	59	59	59	54	60
7	53	61	51	57	53	59	53	57	59	60	55	62
8	57	63	51	53	55	61	57	57	60	58	51	63
9	53	53	53	53	55	61	63	55	61	57	45	64
10	55	55	55	53	55	64	59	57	59	59	37	62
11	55	57	51	55	52	65	57	58	60	59	46	59
12	51	57	51	55	47	67	57	59	61	57	49	58
13	55	57	49	55	50	68	54	58	61	57	47	57
14	53	57	47	57	51	70	56	59	61	57	51	59
15	51	51	47	59	56	70	57	61	61	56	46	60
16	50	53	42	57	58	65	59	63	59	61	44	61
17	50	55	44	61	62	65	59	63	57	60	45	64
18	51	55	49	59	59	64	56	63	59	60	47	61
19	59	57	51	60	55	67	55	61	57	59	49	60
20	59	53	49	59	50	65	52	62	57	49	64	60
21	53	53	53	63	49	61	60	60	55	51	53	57
22	58	53	51	63	51	58	59	59	53	53	53	57
23	62	53	55	63	51	59	62	62	54	55	55	55
24	61	47	55	63	53	62	62	62	55	57	52	59
25	59	49	53	63	57	61	62	62	56	56	49	57

Варіант 5

Таблиця миттєвих швидкостей , см/с

Вертикаль № 1, точка № 5,

H=2,62 м, h=0,20 м, T=300 с; Δt = 1с

Ряд	Стовпчик											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
I	55	47	57	55	55	49	53	63	55	6I	57	58
2	55	43	57	55	53	47	5I	59	56	6I	59	57
3	55	43	55	57	53	57	49	55	57	62	59	57
4	57	43	55	55	59	65	49	55	58	53	57	57
5	55	43	57	55	53	65	53	55	59	59	59	59
6	55	43	55	54	49	57	53	55	55	60	60	57
7	53	45	53	53	53	63	57	55	53	60	59	63
8	53	47	57	49	53	6I	55	55	53	59	59	6I
9	53	53	55	47	53	55	53	53	53	6I	59	63
I0	53	53	57	49	53	55	49	55	53	6I	57	59
II	5I	55	56	53	47	55	53	55	5I	6I	57	63
I2	53	55	56	53	45	56	5I	47	55	59	57	63
I3	5I	57	59	53	49	56	55	57	6I	59	56	57
I4	5I	63	47	53	47	57	55	57	6I	57	59	57
I5	59	63	49	59	49	59	55	57	6I	57	6I	59
I6	59	59	49	59	49	59	53	57	6I	57	60	59
I7	55	56	57	57	55	47	44	5I	6I	58	59	6I
I8	55	53	55	55	49	55	57	54	59	59	57	6I
I9	49	53	47	55	47	55	57	56	6I	55	55	63
20	49	53	45	57	49	55	57	63	57	57	55	59
2I	47	55	49	55	49	59	49	63	59	55	55	53
22	46	55	55	55	54	57	55	59	59	55	59	5I
23	49	55	55	55	54	63	55	56	57	55	55	53
24	47	57	55	55	54	59	63	55	59	55	57	53
25	49	57	57	55	54	55	65	55	60	57	57	55

Варіант 6

Таблиця миттєвих швидкостей , см/с

Вертикаль № 2, точка № 1,

H=7,15 м, h=7,05 м, T=300 с; Δt = 1с

Ряд	Стовпчик											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
I	33	35	28	33	35	42	33	27	24	38	22	33
2	28	33	28	27	3I	42	33	24	24	33	32	30
3	39	34	28	28	30	46	35	28	20	33	2I	34
4	33	35	22	28	32	4I	38	33	20	25	23	3I
5	28	38	20	28	33	32	34	4I	24	27	23	27
6	33	34	2I	26	35	4I	3I	42	32	25	26	30
7	34	36	26	26	3I	38	44	35	23	23	3I	30
8	28	35	33	47	3I	33	39	32	24	3I	38	24
9	34	35	33	47	33	3I	39	38	28	35	45	36
I0	3I	35	33	4I	33	35	42	39	30	35	3I	46
II	28	33	3I	39	33	3I	46	33	20	46	37	26
I2	39	32	3I	35	33	34	46	32	26	39	28	32
I3	39	33	3I	33	3I	32	44	3I	26	38	28	33
I4	44	33	3I	33	32	3I	42	35	30	38	28	30
I5	39	39	28	35	34	34	37	35	28	3I	30	24
I6	44	28	28	33	3I	44	36	35	3I	37	33	24
I7	44	37	37	39	33	44	42	38	33	37	36	22
I8	42	26	33	37	45	35	40	39	3I	37	24	23
I9	42	28	24	36	42	39	36	38	3I	39	3I	27
20	47	26	39	35	46	30	3I	33	3I	25	26	33
2I	44	26	3I	39	44	3I	3I	34	3I	25	26	34
22	42	22	28	39	43	33	35	36	28	22	25	3I
23	44	20	28	4I	42	42	3I	3I	37	37	24	32
24	44	26	33	42	38	28	44	26	35	24	23	32
25	46	3I	26	35	42	33	28	24	38	24	22	32

Варіант 7

Таблиця миттєвих швидкостей , см/с

Вертикаль № 2, точка № 2,

H=7,15 м, h=5,72 м, T=300 с; Δt = 1с

Ряд	Стовпчик											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
I	53	49	45	35	4I	35	47	43	34	43	26	32
2	47	47	49	36	35	4I	43	43	34	4I	24	3I
3	5I	53	47	35	35	43	49	44	37	35	24	33
4	5I	47	47	33	45	44	48	47	32	33	27	37
5	53	49	39	28	4I	47	47	42	35	37	22	47
6	49	36	40	33	4I	46	46	42	32	43	26	49
7	37	37	34	33	44	45	43	46	34	45	33	50
8	3I	37	33	49	4I	49	44	45	34	5I	37	49
9	39	43	33	45	45	45	43	45	28	45	35	44
I0	33	45	28	47	45	45	43	43	36	43	37	45
II	37	49	37	47	42	5I	47	36	37	43	37	46
I2	37	5I	33	49	46	4I	5I	37	36	4I	28	43
I3	43	49	3I	48	43	45	5I	4I	39	50	28	35
I4	47	4I	33	5I	43	43	54	40	45	49	37	40
I5	44	39	3I	5I	39	49	57	39	49	49	30	45
I6	42	39	33	45	4I	45	52	39	47	45	33	43
I7	39	37	37	48	4I	4I	54	37	45	47	36	40
I8	44	39	39	49	40	40	54	36	43	47	39	35
I9	4I	39	39	40	43	40	59	37	43	4I	42	35
20	39	39	33	35	39	4I	47	35	45	4I	40	39
2I	37	37	39	38	45	36	49	34	46	45	38	39
22	46	37	37	39	43	39	52	36	45	45	35	4I
23	43	39	35	39	4I	4I	48	43	48	45	3I	37
24	47	46	35	4I	4I	45	43	43	43	35	34	37
25	45	4I	37	4I	4I	49	33	37	43	28	33	32

Варіант 8

Таблиця миттєвих швидкостей , см/с

Вертикаль № 2, точка № 3,

H=7,15 м, h=4,29 м, T=300 с; Δt = 1с

Ряд	Стовпчик											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
I	58	64	58	56	68	60	64	64	72	6I	58	57
2	64	58	6I	54	68	64	68	63	69	63	59	62
3	62	57	59	54	62	66	69	64	68	67	59	66
4	60	56	58	58	62	67	67	65	67	66	6I	6I
5	52	58	56	63	60	66	66	64	66	64	64	66
6	47	60	56	60	58	66	64	64	64	64	59	65
7	58	66	56	62	58	64	58	62	64	65	60	67
8	62	68	56	58	60	66	62	62	65	63	56	68
9	58	58	58	58	60	66	68	60	66	62	50	69
I0	60	60	60	58	60	69	64	62	64	64	42	67
II	60	62	56	60	57	70	62	63	65	64	5I	64
I2	56	62	56	60	52	72	62	64	66	62	54	63
I3	60	62	54	60	55	73	59	63	66	62	52	62
I4	58	62	52	62	56	75	6I	64	66	62	56	64
I5	56	56	52	64	6I	75	62	66	66	6I	5I	65
I6	55	58	47	62	63	70	64	68	64	66	49	66
I7	55	60	49	66	67	70	64	68	62	65	50	69
I8	56	60	54	64	64	69	6I	68	64	65	52	66
I9	64	62	56	65	60	72	60	66	62	64	54	65
20	64	58	54	64	55	70	57	67	62	54	69	65
2I	58	58	58	68	54	66	60	65	60	56	58	62
22	63	58	56	68	56	63	62	64	58	58	58	62
23	67	58	60	68	56	64	64	67	59	60	60	60
24	66	52	60	68	58	67	67	67	60	62	57	64
25	64	54	58	68	62	66	66	67	6I	6I	54	62

Варіант 9

Таблиця миттєвих швидкостей , см/с

Вертикаль № 2, точка № 4,

H=7,15 м, h=1,43 м, T=300 с; Δt = 1с

Ряд	Стовпчик											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
I	67	63	63	63	65	67	63	56	63	63	59	67
2	63	63	6I	63	70	67	64	59	64	64	57	67
3	65	63	6I	63	70	65	62	57	64	63	56	65
4	63	63	6I	65	72	67	59	56	63	64	55	64
5	63	6I	59	65	72	65	56	56	63	64	54	6I
6	63	63	57	70	73	66	53	59	62	65	56	64
7	59	63	57	72	7I	69	64	55	65	65	56	66
8	59	63	59	72	67	70	56	57	62	63	59	65
9	59	63	59	6I	67	70	56	59	63	63	59	64
I0	59	65	6I	65	67	67	59	56	63	64	56	63
II	57	52	6I	63	69	69	60	55	62	65	56	63
I2	65	65	6I	63	69	70	46	57	63	64	56	62
I3	57	65	59	6I	67	67	6I	57	63	65	56	63
I4	59	63	57	63	67	69	60	57	63	63	52	63
I5	59	6I	67	63	69	66	59	62	63	67	50	63
I6	59	6I	6I	63	70	67	6I	63	63	66	47	63
I7	63	6I	67	65	70	65	57	67	63	67	45	63
I8	62	59	6I	66	72	65	59	66	6I	66	56	62
I9	65	55	63	66	69	66	59	69	6I	66	59	6I
20	65	54	63	66	72	67	6I	67	63	6I	6I	62
2I	65	63	63	65	73	69	60	65	62	6I	66	6I
22	64	65	6I	67	73	63	59	67	63	63	66	60
23	63	6I	6I	65	72	65	59	70	62	60	65	60
24	6I	63	59	65	70	65	60	66	63	57	66	6I
25	63	63	63	65	67	63	6I	65	63	59	66	6I

Варіант 10

Таблиця миттєвих швидкостей , см/с

Вертикаль № 2, точка № 5,

H=7,15 м, h=0,20 м, T=300 с; Δt = 1с

Ряд	Стовпчик											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
I	67	65	59	73	65	68	62	65	63	66	56	67
2	65	63	57	69	67	7I	63	67	63	67	6I	67
3	63	64	60	69	69	69	63	69	60	65	62	67
4	63	63	59	69	69	68	62	66	60	67	60	68
5	6I	59	59	67	67	67	63	65	6I	67	63	68
6	60	6I	63	69	67	67	63	65	65	67	63	68
7	59	6I	57	69	67	72	53	64	65	65	65	66
8	57	6I	57	69	65	7I	65	6I	66	65	63	65
9	59	6I	59	67	65	69	63	64	63	65	63	63
I0	59	6I	63	67	65	70	65	65	63	64	63	63
II	6I	63	63	67	65	68	63	64	64	65	64	62
I2	6I	63	67	67	69	68	63	64	62	65	65	63
I3	6I	63	63	66	68	66	63	63	62	67	66	65
I4	6I	63	63	63	67	64	62	64	63	67	67	64
I5	65	63	6I	65	67	65	6I	67	63	65	69	65
I6	62	6I	66	65	69	65	62	69	6I	67	67	63
I7	62	6I	66	67	70	63	63	67	59	66	67	63
I8	64	56	69	67	7I	65	59	69	6I	54	58	65
I9	65	55	67	66	7I	63	58	67	60	68	67	65
20	65	55	67	65	70	65	58	66	63	59	67	67
2I	64	59	63	63	70	65	56	68	64	57	66	66
22	64	57	69	63	72	63	6I	67	63	57	68	64
23	64	53	69	65	7I	65	63	64	65	6I	68	65
24	64	53	67	67	70	64	62	63	65	62	67	65
25	65	55	69	67	69	63	65	65	66	59	69	65

Варіант 11

Таблиця миттєвих швидкостей , см/с

Вертикаль № 3, точка № 1,

H=6,51 м, h=6,41 м, T=300 с; Δt = 1с

Ряд	Стовпчик											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
I	35	4I	4I	42	33	35	32	39	34	30	43	33
2	64	38	4I	38	34	39	37	4I	35	25	39	32
3	4I	37	37	35	39	42	34	42	44	34	45	3I
4	38	34	34	35	44	42	37	39	44	28	4I	26
5	40	4I	44	37	42	33	35	35	39	32	35	3I
6	35	42	45	4I	44	36	37	39	45	30	33	30
7	33	39	46	42	47	38	34	48	4I	35	34	42
8	3I	4I	47	39	44	44	36	45	44	36	32	38
9	33	37	39	45	44	37	35	50	39	36	27	44
I0	39	39	39	42	42	33	33	48	39	35	32	42
II	42	35	39	45	39	37	37	49	37	37	3I	48
I2	37	39	4I	46	37	38	4I	43	36	39	35	42
I3	4I	39	4I	46	35	45	36	43	35	39	39	4I
I4	38	42	35	48	35	38	39	42	33	34	39	46
I5	36	37	45	48	34	38	35	39	34	39	37	4I
I6	37	39	46	38	33	37	33	44	37	35	35	38
I7	46	37	46	37	33	37	32	44	38	33	3I	44
I8	39	42	48	36	32	43	30	42	4I	3I	44	44
I9	39	4I	4I	38	33	43	33	42	46	38	44	46
20	46	36	48	3I	34	42	33	39	42	35	42	43
2I	45	36	46	35	36	39	36	38	34	33	38	46
22	48	46	53	35	42	35	3I	36	36	33	42	48
23	48	47	50	37	42	35	3I	37	38	37	44	44
24	47	42	50	38	37	30	42	3I	38	43	42	42
25	45	37	46	43	33	28	43	34	34	45	38	43

Варіант 12

Таблиця миттєвих швидкостей , см/с

Вертикаль № 3, точка № 2,

H=6,51 м, h=5,20 м, T=300 с; Δt = 1с

Ряд	Стовпчик											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
I	47	59	60	5I	57	45	5I	55	54	53	45	58
2	49	52	62	54	53	43	5I	57	53	5I	47	56
3	47	60	6I	58	5I	40	5I	58	55	5I	47	55
4	50	59	64	57	5I	42	5I	59	53	55	47	5I
5	5I	53	6I	55	52	39	5I	55	54	59	49	52
6	49	55	60	53	50	44	53	55	5I	53	49	5I
7	48	56	59	53	5I	43	55	55	53	6I	48	49
8	53	56	56	53	50	43	53	55	45	59	55	53
9	5I	50	55	54	46	46	54	5I	47	63	50	55
I0	6I	5I	59	55	49	45	53	55	47	6I	48	49
II	6I	55	58	54	5I	47	53	53	43	56	47	5I
I2	55	56	64	53	53	49	58	5I	49	56	45	55
I3	6I	59	63	54	56	5I	6I	52	45	56	45	47
I4	60	56	63	55	58	53	55	50	52	56	45	5I
I5	59	54	59	53	54	57	49	5I	52	57	4I	53
I6	56	57	59	5I	56	56	57	47	50	57	42	53
I7	55	55	60	49	54	53	54	49	50	56	4I	5I
I8	57	55	62	5I	54	49	54	48	5I	53	5I	49
I9	59	56	60	5I	57	49	55	50	45	48	49	49
20	58	54	57	53	56	50	55	5I	43	52	43	47
2I	6I	58	55	55	55	48	57	55	48	57	40	4I
22	59	57	47	55	53	47	59	53	45	53	44	45
23	50	58	47	53	53	47	56	53	45	53	52	49
24	57	59	5I	54	49	49	54	54	45	53	55	47
25	56	60	45	56	48	5I	55	53	49	47	56	53

Варіант 13

Таблиця миттєвих швидкостей , см/с

Вертикаль № 3, точка № 3,

H=6,51 м, h=3,91 м, T=300 с; Δt = 1с

Ряд	Стовпчик											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
I	56	58	62	60	55	52	53	62	64	66	56	64
2	57	56	65	64	52	49	55	62	64	65	56	66
3	6I	58	67	63	56	54	56	6I	62	62	62	64
4	54	55	66	62	52	44	60	62	64	62	6I	64
5	60	56	66	62	53	45	63	62	64	59	58	64
6	59	64	64	57	54	46	63	62	62	63	60	64
7	56	66	58	59	52	47	62	62	62	62	57	54
8	52	68	6I	56	49	47	66	58	59	63	55	47
9	58	69	58	58	56	52	64	60	60	62	56	54
I0	60	65	57	60	58	54	64	56	64	58	58	47
II	62	64	59	58	58	50	63	54	62	56	54	47
I2	64	64	6I	56	58	56	64	50	6I	57	57	54
I3	64	62	62	55	57	60	60	54	60	56	62	50
I4	63	65	62	57	58	56	62	58	6I	54	54	58
I5	64	63	64	58	56	55	59	58	6I	54	55	54
I6	63	60	63	57	56	52	58	54	57	58	52	52
I7	63	62	6I	58	58	57	58	52	57	59	5I	52
I8	60	58	6I	60	60	54	55	52	60	58	52	52
I9	60	63	62	64	59	55	54	54	63	54	54	54
20	64	65	60	64	58	54	57	54	64	53	57	56
2I	62	66	59	56	55	52	56	64	62	54	58	54
22	59	64	58	58	5I	54	60	6I	60	58	60	54
23	62	63	58	56	52	58	60	64	62	58	60	50
24	59	64	58	55	50	56	58	64	63	56	62	52
25	60	64	58	56	47	52	6I	60	65	56	64	52

Варіант 14

Таблиця миттєвих швидкостей , см/с

Вертикаль № 3, точка № 4,

H=6,51 м, h=1,30 м, T=300 с; Δt = 1с

Ряд	Стовпчик											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
I	55	56	65	63	59	56	59	6I	70	56	66	64
2	55	59	6I	65	59	57	62	63	67	54	6I	57
3	53	62	6I	63	55	56	6I	63	63	59	65	67
4	54	63	6I	63	56	55	64	6I	62	56	62	65
5	56	63	62	63	57	54	67	6I	6I	57	62	65
6	53	63	63	6I	55	53	65	60	57	59	57	65
7	52	62	62	59	55	54	63	59	57	59	5I	50
8	56	63	6I	60	52	53	62	60	59	6I	56	47
9	56	63	6I	59	59	56	6I	59	6I	63	59	47
I0	59	63	6I	57	59	59	59	6I	59	63	57	45
II	59	63	60	56	59	63	59	63	59	63	59	47
I2	57	6I	57	57	6I	59	60	62	60	6I	59	47
I3	60	60	59	55	60	60	57	63	59	57	62	47
I4	60	6I	59	52	59	59	57	65	59	57	63	45
I5	62	60	57	52	60	59	56	65	56	6I	63	52
I6	6I	59	56	52	6I	59	56	64	57	6I	63	54
I7	59	59	59	52	6I	54	55	65	55	6I	60	52
I8	60	59	57	55	6I	56	55	65	52	57	6I	52
I9	6I	59	55	56	6I	55	59	64	50	57	60	52
20	60	59	57	59	62	56	6I	65	50	59	6I	54
2I	6I	60	56	6I	63	57	6I	63	50	59	6I	6I
22	6I	6I	6I	60	63	6I	64	63	53	59	6I	65
23	60	62	6I	60	60	62	62	67	53	6I	6I	63
24	56	64	63	59	60	62	63	66	53	6I	62	6I
25	54	65	63	60	57	63	62	70	54	65	63	57

Варіант 15

Таблиця миттєвих швидкостей , см/с

Вертикаль № 3, точка № 5,

H=6,51 м, h=0,20 м, T=300 с; Δt = 1с

Ряд	Стовпчик											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
I	6I	69	7I	65	62	60	65	65	67	52	65	64
2	6I	65	7I	65	63	6I	65	66	63	5I	63	65
3	52	64	72	64	6I	6I	65	65	63	57	63	65
4	63	64	68	65	63	63	67	67	65	6I	62	65
5	67	63	67	63	63	66	68	67	65	59	6I	65
6	67	65	63	63	65	63	7I	69	63	58	63	65
7	67	65	63	60	65	62	70	68	62	55	6I	65
8	6I	65	62	57	65	57	67	67	65	58	6I	59
9	59	67	6I	56	6I	60	67	67	64	6I	60	63
I0	64	68	58	57	62	6I	65	69	65	65	6I	6I
II	64	68	58	60	6I	75	64	67	63	67	62	55
I2	64	69	59	63	6I	69	65	69	65	62	64	6I
I3	64	65	59	65	6I	6I	65	67	65	64	63	58
I4	65	64	59	67	60	6I	65	68	62	59	63	59
I5	66	62	59	65	58	63	65	67	63	59	65	55
I6	66	59	60	65	59	63	67	70	64	6I	65	63
I7	66	64	59	65	6I	64	69	68	60	63	66	65
I8	65	65	62	65	6I	65	67	67	59	63	66	6I
I9	63	64	62	63	64	63	64	68	57	62	63	65
20	66	64	6I	65	59	63	63	68	56	6I	64	65
2I	63	65	57	6I	59	63	63	67	56	63	63	6I
22	65	65	59	65	6I	63	62	65	55	65	63	67
23	67	60	6I	64	65	64	65	63	52	65	65	59
24	68	60	63	62	65	64	65	62	52	66	65	63
25	7I	67	63	65	65	63	65	60	5I	64	67	63

Практична робота № 2

«Визначення часу добігання об'ємів води від верхнього створа до нижнього на основі взаємної кореляційної функції»

Оцінка здатності річок Псел та Ворскла до самоочищення

Якщо відомі коефіцієнт самоочищення та часдобігання від верхнього створу до нижнього, можна установити концентрацію забруднюючої речовини у нижньому створі, із завчасністю яка дорівнює τ.

$$C_H = C_B 10^{-\frac{\tau K_C}{2.3}} = C_B e^{-\tau K_C} \quad , \tag{1}$$

де $C_в$ – концентрація забруднюючої речовини у верхньому створі; $C_н$ - концентрація забруднюючої речовини у нижньому створі; τ – час добігання; $К_С$ – сумарний коефіцієнт самоочищення (В.Г.Стріттера)

Визначення часу добігання між верхнім та нижнім створами відбувалося на основі розрахунків взаємної кореляційної функції:

$$r_{xy}(\tau) = \frac{K_{xy}(\tau)}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{\sum_{i=1}^{n-\tau} (x_i - \overline{x_i})(y_{i+\tau} - \overline{y}_{i+\tau})}{\sigma_x \sigma_y (n - \tau_{зсув} - 1)}, \tag{2}$$

де $r_{xy}(\tau)$ - кореляційна функція при зсуві $\tau_{зсув}$; $\bar{x}, \bar{y}$ - середні арифметичні значення рядів X, Y ; σ_x, σ_y - середні квадратичні відхилення двох рядів спостережень довжиною n.

При цьому ряд Q_H зсувається у часі відносно ряду Q_B, тобто формулу (4.14) можна представити у вигляді:

$$r_{xy}(\tau) = \frac{K_{Q_B Q_H}(\tau)}{\sigma_{Q_B}\sigma_{Q_H}} = \frac{\sum_{i=1}^{n-\tau}(Q_{Bi} - \overline{Q_B})(Q_{Hi+\tau} - \overline{Q}_H)}{\sigma_{Q_B}\sigma_{Q_H}(n - \tau_{зсув} - 1)}\ , \qquad (3)$$

де Q_{Bi} – витрати води у верхньому створі в час і; Q_{Hi} – витрати води у нижньому створі в часі і+τ; $\sigma_{Q_B}, \sigma_{Q_H}$ - середні квадратичні відхилення для витрат води у верхньому та нижньому створах, відповідно.

Час добігання мас води від верхнього створу до нижнього визначався як таке значення часу, при якому $r_{xy}(\tau)$ досягала свого максимального значення (рис.1, рис.2).

Під рядами випадкових величин Х та У слід розуміти ряд стоку (витрат води) у верхньому створі Q_B та нижньому - Q_H.

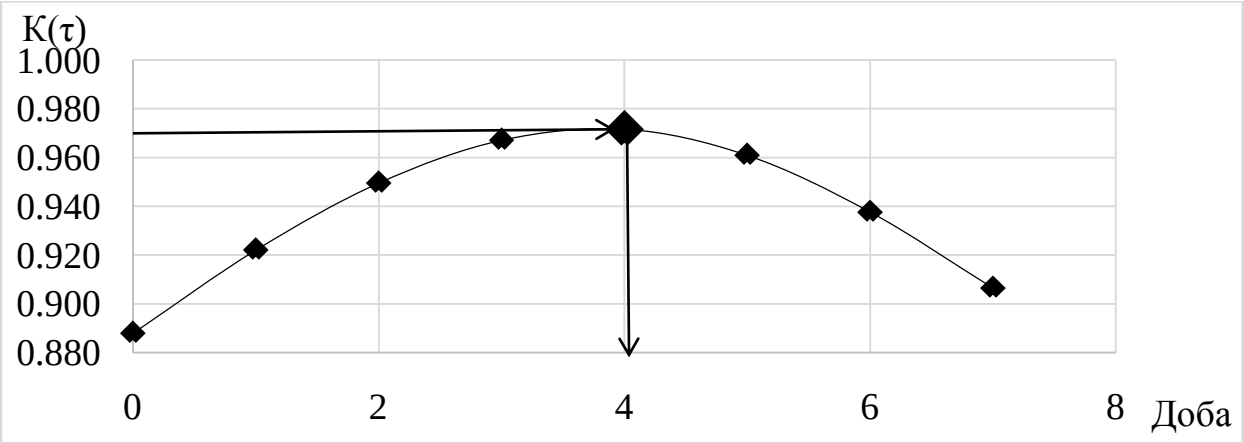

Рис 1 Хід взаємної кореляційної функції при зсуві у часі ряду стоку

р. Псел – м. Суми відносно ряду стоку р. Псел – с. Крупець

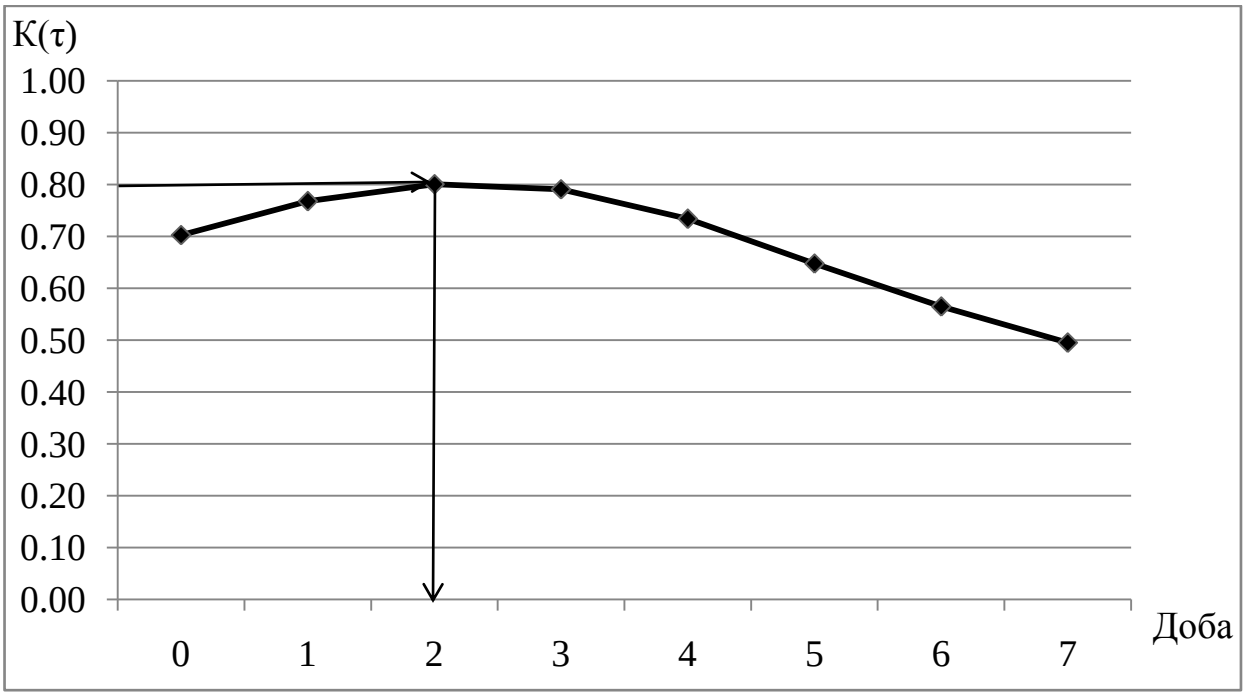

Рис. 2 Хід взаємної кореляційної функції при зсуві у часі ряду стоку

р. Ворскла – с. Чернеччина відносно ряду стоку р. Ворскла – с. Козинка

За результатами цих розрахунків та побудов отримані зведені значення змін часу добігання води від верхнього створу до нижнього, а також побудовані схеми змін τ по довжині річок (рис.3; 4). За цими схемами та табл. 1; 2 та отримані графіки (рис.5 , рис.6), на базі яких можна встановити час добігання для проміжних створів, на яких не організовані спостереження.

Таблиця 1

Зміни часу добігання по довжині річки Псел

Ділянка	Довжина ділянки від витоку, км	Час добігання від верхнього створу до нижнього τ, доба
м. Обоянь - с. Крупець	4700	2
с. Крупець - м. Суми	7770	4
м. Суми - м. Гадяч	11300	1
м. Гадяч - с. Запсілля	21800	9

Таблиця 2

Зміни часу добігання по довжині річки Ворскла

Ділянка	Довжина ділянки від витоку, км	Час добігання від верхнього створа до нижнього τ, доба
с. Яковлівка – с. Козинка	95.5	1
с. Козинка – с. Чернеччина	105	2
с. Чернеччина – м. Полтава	156.5	2

м. Полтава– м. Кобеляки	208.0	1

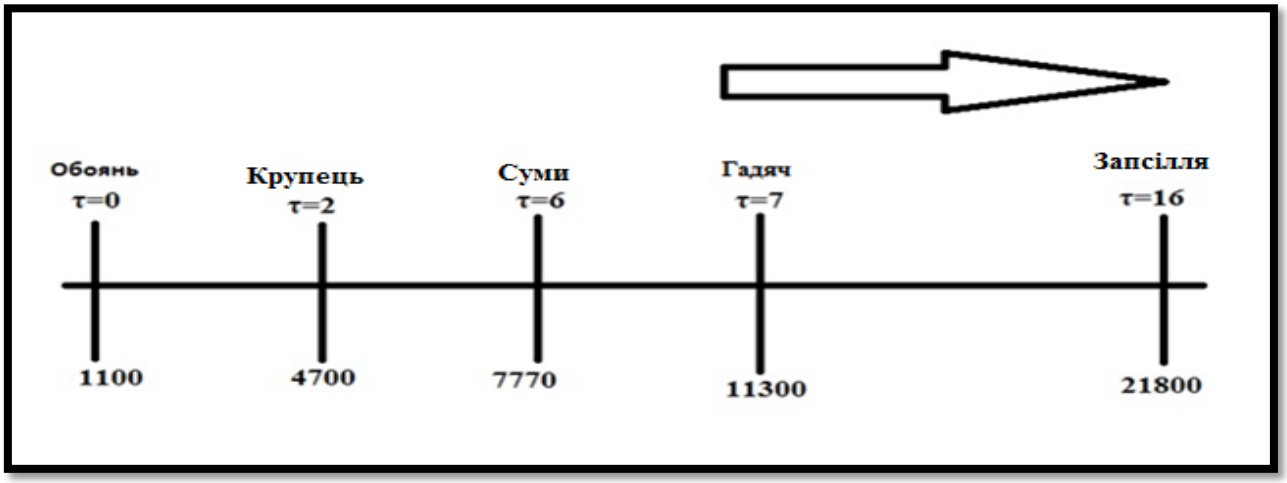

Рис. 3 Схема ділянки річки Псел (м. Обоянь – с. Запсілля)

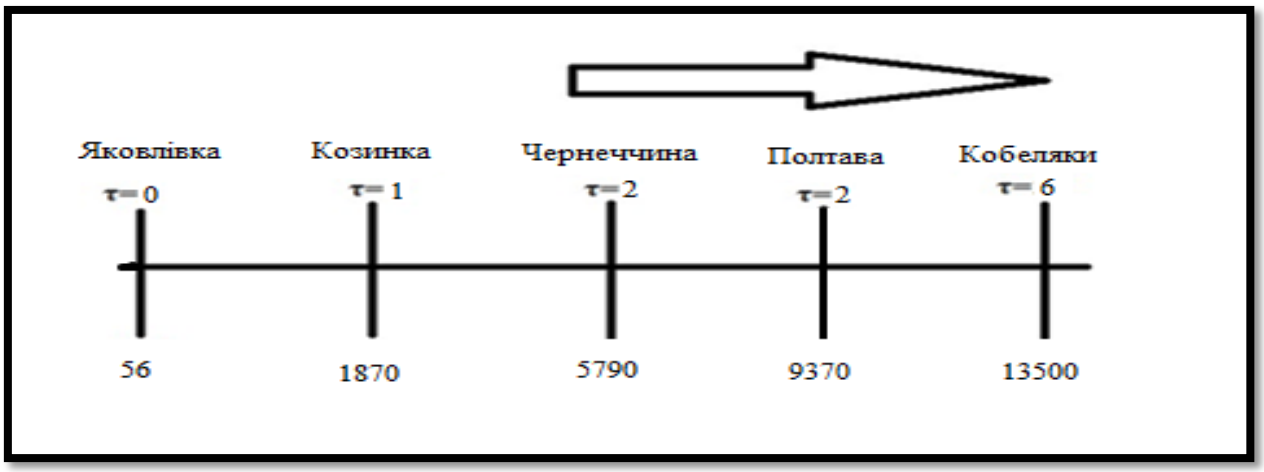

Рис. 4 Схема ділянки річки Ворскла (с. Яковлівка – м. Кобеляки)

Для визначення характеристик самоочищення були розглянуті випадки, коли відбувалося зменшення спостереженої концентрації забруднюючої речовини на шляху від верхнього створу до нижнього (Додаток О табл.О.6 – О.9), а час між спостереженнями був близький до τ.

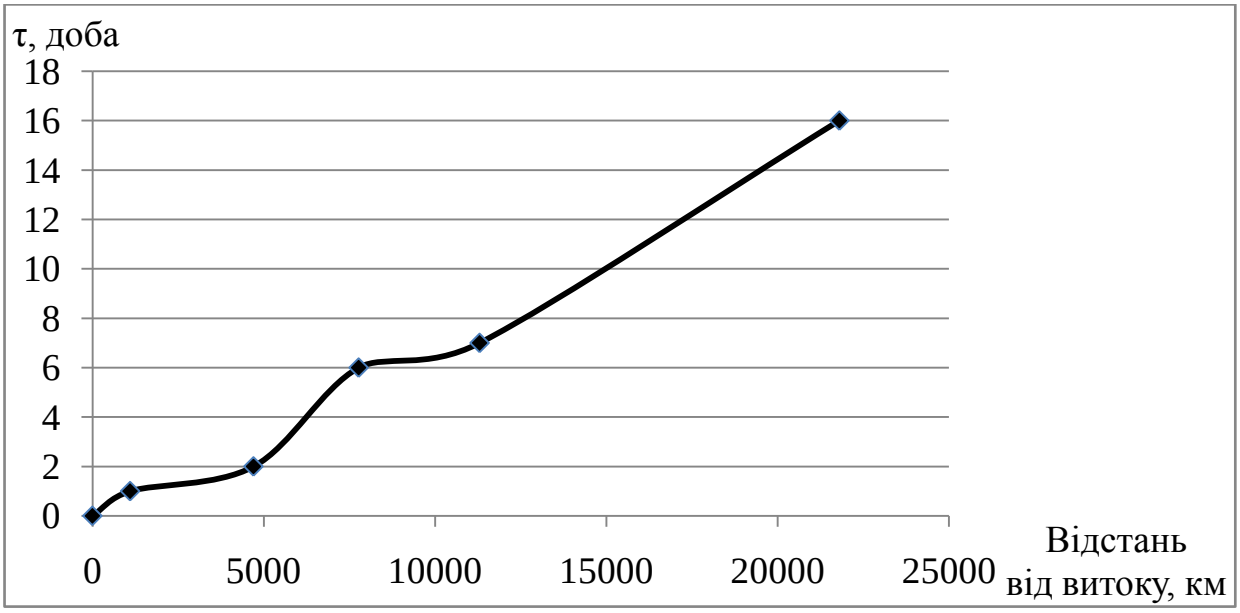

Рис. 5 Зміна часу добігання по довжині річки Псел

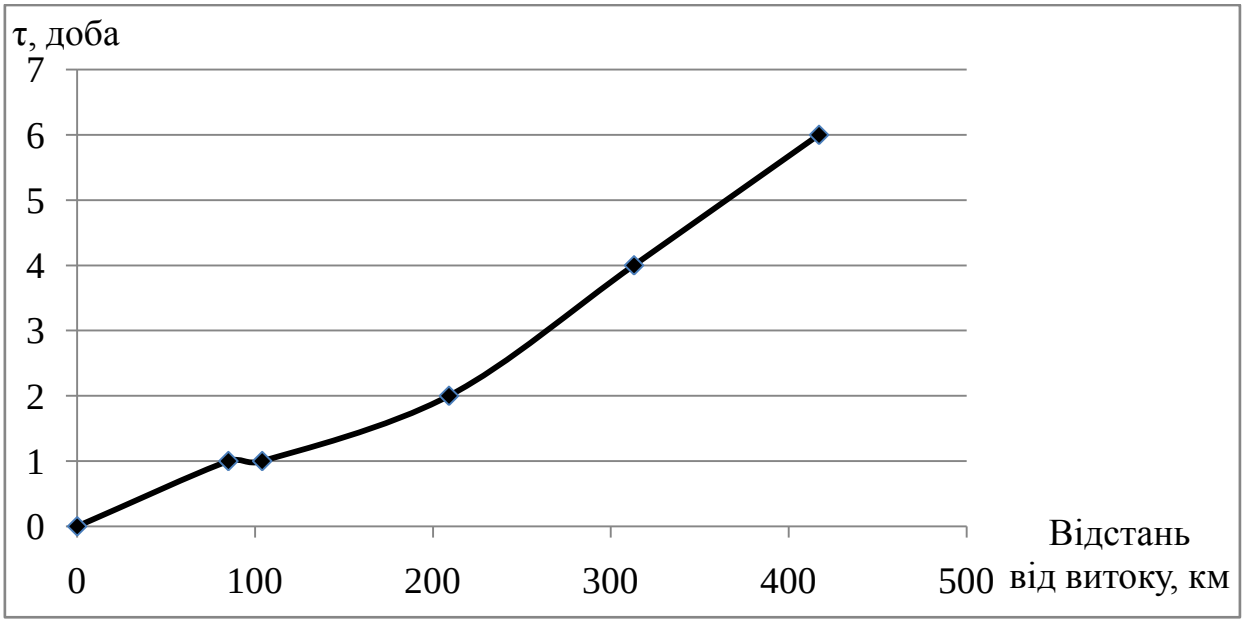

Рис. 6 Зміна часу добігання по довжині річки Ворскла

Приклад прогнозу значення концентрацій забруднюючих речовин C'_H через час τ, після того як вони спостерігалися у верхньому створі, наведені у табл.3

Таблиця 3

Розрахунки показників самоочищення (Коефіцієнта Стрітера, прогнозні значення) р. Ворскла - м. Полтава - р. Ворскла - м. Кобеляки

Рік	Дата	Хімічна речовина	$C_в$, мг/дм^3	K_C Стріттера	$C_н(\tau=2)$
1991	20.03	Fe^{2+}	2.13	0.716096	0.507793
	21.03	Cu^{2+}	0.006	0.40501	0.002667
1992	16.03	Cl^-	77.7	0.005196	76.89584
	20.03	SO_4^{2-}	214	0.066453	187.3393
	16.07	Mg^{2+}	0.122	1.56751	0.005288
	16.07	Ca^{2+}	73.1	0.691003	18.32503
1993	10.05	HCO_3^-	447	0.194195	303
	12.05	Мін	787	0.06137	696
1994	10.05	Mg^{2+}	0.033	0.835309	0.006197
	10.05	Ca^{2+}	89	0.006757	87.80404
	14.11	Mg^{2+}	0.0232	0.409325	0.010222

	15.11	Ca^{2+}	96.4	0.038017	89.33444
1995	5.03	HCO_3^-	323	0.146276	240.9938
	7.03	Ca^{2+}	107	2.338057	0.991495
1996	3.10	Mg^{2+}	0.0171	0.089309	0.0143

Продовження таблиці 4.24

	5.10	SO_4^{2-}	110	0.037711	102
		Fe^{2+}	1.15	0.23387	0.72
2000	12.12	Mg^{2+}	19	0.07046	16.5
	14.12	Cl^-	66.6	0.219669	42.9
		SO_4^{2-}	96.8	0.154107	71.1
		HCO_3^-	321	0.033791	300
		Ca^{2+}	105	0.024368	100
		Мін	660	0.080279	562
2003	16.02	Mg^{2+}	0.0146	0.11941	0.011495
	19.02	SO_4^{2-}	94.1	0.043401	86.26804
2004	10.03	SO_4^{2-}	120	0.273034	69.46408
	13.04	Mg^{2+}	0.0117	0.043626	0.010721
2005	12.05	Mg^{2+}	0.0149	0.398328	0.006711
	12.05	Cl^-	93.6	0.822098	18.04712
		Мін	670	0.03335	626.7224
	7.11	Cl^-	126	0.110457	101

	9.11	Ca^{2+}	74.5	0.021927	71.3
		Мін	874	0.124619	681

Розрахунки показників самоочищення (Коефіцієнта Стрітера, прогнозні значення) р. Псел - м. Суми - р. Псел - с. Запсілля

Рік	Дата	Хімічна речовина	$C_в$ мг/дм^3	K_CСтриттер	$C_н(\tau=10)$
1994	9.11	Ca^{2+}	0.0964	0.00258	0.093942
	20.11				
2007	5.05	Cl^-	79.4	0.016373	67.39572
	16.05	Мін	841	0.023673	663.5411

ПРАКТИЧНА РОБОТА № 3

Визначення регресійної та залишкової складових при побудові рівняння лінійної парної регресії. Визначення відповідності побудованої регресійної моделі даним спостережень.

Оцінка коефіцієнта кореляції, який відображає тісноту лінійного зв'язку між рядами спостережень, які представляють собою спостережені сукупності випадкових величин Y та X, записується у вигляді

$$\hat{r}_{xy} = r = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 (y_i - \bar{y})^2}}, \qquad (1.11)$$

Оцінка параметра a рівняння лінійної парної регресії виражається через коефіцієнт кореляції і середнє квадратичне відхилення випадкових величин Y та X, розрахованих за даними спостережень і позначеними як і S_y та S_x

$$a = r\frac{S_y}{S_x}. \qquad (1.12)$$

Математична модель множинної лінійної регресії представляється рівнянням виду

$$\tilde{y}_i - \bar{y} = b_1(x_{1i} - \bar{x}_1) + b_2(x_{2i} - \bar{x}_{2)} + b_3(x_{3i} - \bar{x}_{3)} \ldots + b_k(x_{ki} - \bar{x}_{k)} \qquad (1.13)$$

де $\tilde{y}_i - \bar{y}$ - центровані значення залежної величини (предіктанта);

$x_{ji} - \bar{x}_j$ - центровані значення j - того аргументу (предіктора);

$b_1, b_2, b_3, \ldots b_k$ - коефіцієнти рівняння множинної лінійної регресії;

k - число предікторов.

Ідентифікація структури і параметрів рівняння множинної лінійної регресії виконується, виходячи з принципу найменших квадратів за (1.4), як і для випадку парної лінійної регресії. Результуючі формули для розрахунку коефіцієнтів рівняння множинної лінійної регресії за даними спостережень мають вид

$$b_j = \frac{\sigma}{\sigma_j} \frac{D_{0j}}{D_{00}}, \qquad (1.14)$$

де σ - оцінка середнього квадратичного відхилення досліджуваної характеристики y;

σ_j - оцінка середнього квадратичного відхилення j-того предіктора;

D_{0j} - мінор визначника розширеної матриці коефіцієнтів кореляції, у якого викреслений перший рядок і стовпець, який відповідає змінній j, вказаній в мінорі;

D_{00} - мінор визначника розширеної матриці коефіцієнтів кореляції, у якого викреслений перший рядок і перший стовпець.

Елементами початкового визначника є коефіцієнти парної кореляції між предікторами r_{ij} і коефіцієнти парної кореляції r_{oj} між предіктантом і предікторами. При цьому визначник розширеної матриці кореляцій другого порядку записується у вигляді

$$D = \begin{vmatrix} 1 & r_{01} & r_{02} \\ r_{10} & 1 & r_{12} \\ r_{20} & r_{21} & 1 \end{vmatrix}, \qquad (1.15)$$

а мінори цього визначника записуються таким чином

$$D_{00} = \begin{vmatrix} 1 & r_{12} \\ r_{21} & 1 \end{vmatrix}, \qquad (1.16)$$

$$D_{01} = \begin{vmatrix} r_{10} & r_{12} \\ r_{20} & r1 \end{vmatrix}, \qquad (1.17)$$

$$D_{02} = \begin{vmatrix} r_{10} & 1 \\ r_{20} & r_{21} \end{vmatrix} \qquad (1.18)$$

У записах виду (1.15-1.18) r_{0j} - коефіцієнт кореляції між предіктантом (0) та предіктором (j).

Рівняння лінійної множинної регресії для двох предікторів буде мати вигляд

$$\tilde{y}_i - \bar{y} = b_1(x_{1i} - \bar{x}_1) + b_2(x_{2i} - \bar{x}_2), \quad (1.19)$$

де

$$b_1 = \frac{\sigma}{\sigma_1}\frac{D_{01}}{D_{00}} \quad (1.20)$$

$$b_2 = \frac{\sigma}{\sigma_2}\frac{D_{02}}{D_{00}} \quad (1.21)$$

Рівняння (1.19) може бути записане і таким чином

$$\tilde{y}_i = b_1 x_{1i} + b_2 x_{2i} + b_0, \quad (1.22)$$

де

$$b_0 = \bar{y} - b_1\bar{x}_1 - b_2\bar{x}_2, \quad (1.23)$$

причому $\bar{y}$ - середнє арифметичне значення предіктанта;

$\bar{x}_1$ та $\bar{x}_2$ - середні арифметичні значення предікторів X_1 та X_2.

Середнє квадратичне відхилення $\sigma_{\tilde{y}}$ спостережених даних від обчислених за рівнянням множинної лінійної регресії може бути визначене за наступною залежностю

$$\sigma_{\tilde{y}} = \sigma\sqrt{1-R^2}\,, \qquad (1.24)$$

де R - коефіцієнт множинної лінійної кореляції, який обчислюється за рівнянням

$$R = \sqrt{1-\frac{D}{D_{00}}}\,, \qquad (1.25)$$

причому D - визначник розширеної матриці коефіцієнтів кореляції.

Якщо парні коефіцієнти кореляції, які характеризують лінійний зв'язок між двома залежними випадковими величинами, змінюються від -1 до 1, то повний коефіцієнт кореляції рівняння множинної регресії змінюється від 0 до 1.

Лінійна залежність відсутня при $r = 0$ і $R = 0$. У разі функціональної залежності $R = 1{,}0$. Чим більше коефіцієнт множинної кореляції, тим більшою мірою адекватності характеризується модель множинної регресії.

Оцінити міру адекватності можна і іншим шляхом, наприклад, шляхом перевірки статистичної гіпотези про те, що залишкова дисперсія (дисперсія вхідних даних, яка не описується рівнянням регресії) незначущо відрізняється від дисперсії предіктанта. Якщо така гіпотеза приймається, то прогноз (розрахунок) по моделі не відрізняється від випадкового.

1 ПРИКЛАД РОЗРАХУНКІВ

Розглянуто 40 водозборів у басейні р. Уссурі (табл. 2.1). До розрахунків залучений пакет статистичних програм „Microstat”.

Завдання: добрати оптимальні предіктори та отримати розрахункове рівняння множинної лінійної регресії для визначення середньобагаторічної величини річного стоку невивчених у гідрологічному відношенні водозборів басейну р. Уссурі.

Як потенційні предіктори розглядаються логарифм площі водозборів $lg(F+1)$; норма річних опадів $\overline{X}$; середня висота водозборів $H_{сер}$; заболоченість $f_б$; залісеність $f_л$; умовна довгота λ; умовна широта φ.

На першому етапі розраховуються коефіцієнти лінійної парної кореляції між предіктантом та усіма предікторами. Обирається предіктор, який має найбільш тісний зв’язок з предіктантом $(\overline{q})$.

У розглянутому випадку таким предіктором визнається умовна довгота λ: $r_{\overline{q}\lambda} = 0{,}692$.

Таблиця 2.1 – Вихідні дані застосовані для річок водозбору р. Уссурі.

N пп	$\overline{q}$, л/с·км^2	$lg(F+1)$	$\overline{X}$, мм	$H_{сер}$, м	$f_б$, %	$f_л$, %	λ, см	φ, см
88	17.2	3.44	813	679	-	100	9.3	10.1
45	8.64	3.03	823	260	19	81	4.0	5.9
46	11.4	1.93	848	340	8	92	3.2	6.3
48	8.72	2.69	764	176	12	78	3.9	8.3

81	10.6	3.83	886	670	0.5	100	8.2	6.0
83	12.3	4.27	881	685	0.5	100	8.8	7.8
85	12.1	4.36	871	601	5	95	8.1	8.7
92	10.3	3.28	823	205	17	83	6.6	9.9
93	10.3	3.67	831	373	4	96	5.5	7.1
96	11.1	3.25	977	445	-	94	6.1	7.4
97	13.8	2.63	1005	591	-	100	6.2	6.9
98	12.5	3.07	1180	568	-	100	6.1	6.2
100	9.74	3.41	914	403	2	98	5.4	6.6
105	12.4	4.12	956	790	0.5	100	12.4	11.4
107	11.4	4.33	919	560	4	93	9.9	11.8
1	9.34	3.71	924	879	-	91	3.6	3.8

Продовження таблиці 2.1

N пп	$\bar{q}$, л/с·км^2	$lg(F+1)$	$\bar{X}$, мм	$H_{сер}$, м	$f_б$, %	$f_л$, %	λ, см	φ, см
2	8.95	4.39	802	435	5	96	4.3	5.2
12	10.8	2.73	904	879	-	91	4.1	1.1
13	9.84	3.24	843	729	-	89	3.3	1.3
16	9.19	3.97	832	558	1	91	4.0	2.5
20	1.6	3.06	907	811	-	98	4.3	1.8
24	9.61	3.06	907	811	-	98	5.4	3.0
25	9.22	3.53	852	578	0.5	94	5.3	3.2

34	9.33	3.39	843	552	-	94	1.3	1.8
36	7.79	3.71	810	402	6	82	1.5	3.0
38	9.78	2.88	892	573	-	97	1.9	2.1
39	9.94	2.97	931	635	-	99	0.7	1.5
41	7.2	2.79	739	235	6	76	1.2	3.4
227	10.7	2.35	907	810	-	100	2.8	1.4
228	8.01	1.26	860	619	-	100	3.7	2.3
230	8.12	1.97	854	599	-	100	0.6	1.6
231	9.08	2.13	853	591	-	98	1.1	2.1
232	6.87	1.54	809	416	0.5	98	1.2	3.4
113	10.1	2.86	889	264	8	88	6.6	13.9
114	8.36	2.16	817	218	7	88	6.3	13.8
119	8.73	3.37	816	189	17	81	9.1	15.0
127	15.9	4.39	1048	629	0.5	94	12.2	15.7
128	13.3	3.49	1022	948	-	97	14.2	13.6
130	13.3	3.05	1040	350	-	99	9.3	13.3
131	11.3	2.70	905	216	10	81	10.2	15.7

Отримане рівняння лінійної парної регресії має наступний вигляд

$$\bar{q} = 0.440\lambda + 8.03;$$
$$\sigma_{\tilde{q}} = 1.61 \qquad (2.1)$$

Підраховуються повна дисперсія предіктанта й регресійна та залишкова складові повної дисперсії

$$\sigma_{\bar{q}}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(q_i - \bar{q})^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^{40}(q_i - \bar{q})^2}{39} = \frac{189}{39} = 4.85 \qquad (2.2)$$

$$\sigma_p^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(\tilde{q}_i - \bar{q})^2}{n-1} = \frac{90.4}{39} = 2.32 \qquad (2.3)$$

$$\sigma_{зал}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(q_i - \tilde{q}_i)^2}{n-1} = \frac{98.5}{39} = 2.51 \qquad (2.4)$$

Підраховується критерій Фішера за (1.34)

$$F = \frac{189/39}{98.5/38} = \frac{4.85}{2.59} = 1.87 \qquad (2.5)$$

$\nu = 39; \nu = 38; F_{kp} = 1.7$ (додаток А) $F > F_{kp}$

Отже нульова гіпотеза про те, що залишкова дисперсія незначуще відрізняється від загальної відкидається.

Надалі розраховуються частинні коефіцієнти кореляції між предіктанотом $\bar{q}$ та предікторами, які не увійшли до рівняння (2.5):

$$
\begin{aligned}
&r_{\bar{q},lg(F+1)\bullet\lambda} = 0.16;\\
&r_{\bar{q},\bar{x}\bullet\lambda} = 0.44;\\
&r_{\bar{q},H\bullet\lambda} = 0.40;\\
&r_{\bar{q},f_\delta\bullet\lambda} = 0.45;\\
&r_{\bar{q},f_л\bullet\lambda} = 0.46;\\
&r_{\bar{q},\varphi\bullet\lambda} = 0.26
\end{aligned}
\qquad (2.6)
$$

До складу оптимальних предікторів додається $f_л$ (залісеність). Цей предіктор має найбільш тісний зв'язок з $\bar{q}$, за умови, що вплив довготи урахований ($r_{\bar{q},f_л\bullet\lambda} = 0.46$).

Рівняння множинної лінійної кореляції між нормою річного стоку та двома обраними оптимальними предікторами має вигляд

$$
\begin{aligned}
&\bar{q} = 0.105 f_л + 0.420\lambda - 1.66;\\
&\sigma_{\tilde{q}} = 1.44; \qquad R = 0.768
\end{aligned}
\qquad (2.7)
$$

Коефіцієнт кореляції зростає від 0.692 до 0.768.

Регресійна складова, що показує, яка частина дисперсії величини $\bar{q}$ описується її залежністю від λ та $f_л$, збільшується й становить 2.94, а залишкова складова зменшується до 2.09.

Критерій Фішера приймає значення

$$F = \frac{189/39}{77.3/37} = \frac{4.85}{2.09} = 2.32 \qquad (2.8)$$

При $\nu_1 = 39$ та $\nu_2 = 37$ $F_{kp} = 1.8.$

Оскільки $F > F_{kp}$, розрахунки по моделі будуть відрізнятися від випадкових.

Знов обчислюються частинні коефіцієнти кореляції між предіктантом $\bar{q}$ та предікторами, які не увійшли до рівняння (2.7)

$$\begin{aligned} &r_{\bar{q},lg(F+1)\bullet\lambda,f_л} = 0.25; \\ &r_{\bar{q},\bar{X}\bullet\lambda,f_л} = 0.27; \\ &r_{\bar{q},H\bullet\lambda,f_л} = 0.13; \\ &r_{\bar{q},f_\delta\bullet\lambda,f_л} = 0.14; \\ &r_{\bar{q},\varphi\bullet\lambda,f_л} = 0.00 \end{aligned} \qquad (2.9)$$

Найбільший частинний коефіцієнт кореляції за умови, що вплив довготи та залісеності урахований, установлений між нормою річного стоку ($\bar{q}$) та нормою опадів ($\bar{X}$).

Оскільки величина частинного коефіцієнта кореляції $r_{\bar{q},\bar{x}\bullet\lambda,f_л}$ має невисоке значення , то необхідно перевірити його значущість за формулами

$$t = \frac{r_{xy}}{\sqrt{\sigma^2_{r_{xy}}}} \ , \tag{2.10}$$

$$\sigma_{r_{xy}} = \frac{1 - r^2_{xy}}{\sqrt{n-1}} \ , \tag{2.11}$$

де t - критерій Стьюдента.

$$\sigma_{r_{\bar{q},\bar{x}\bullet\lambda,f_л}} = \frac{1-0.27^2}{\sqrt{40-1}} = \frac{1-0.0729}{6.24} = \frac{0.927}{6.24} = 0.149 \tag{2.12}$$

$$t = \frac{0.27}{0.149} = 0.85 \tag{2.13}$$

Критичне значення t для рівня значущості 0.05 та числа степенів свободи 40-1=39 дорівнює 3 (додаток Б).

Отже при $t < t_{kp}$ нульова гіпотеза про те, що $r_{x,y}$ не відрізняється від нуля ($H_0 : r_{xy} = 0$) не відхиляється, тобто частинний коефіцієнт кореляції $r_{\bar{q},\bar{x}\bullet\lambda,f_л}$ =0.25 не розглядається як значущий і подальшого набору оптимальних предікторів не відбувається. Слід зазначити, що у більшості пакетів статистичних програм відбувається перевірка значущості всіх частинних коефіцієнтів кореляції.

Після виконання перевірки частинних коефіцієнтів кореляції на їх значущість. Як розрахункове приймається рівняння (2.7).

На основі отриманого розрахункового рівняння виконуються перевірні розрахунки, які зводяться у таблицю.

На основі результатів розрахунків обчислюється відносна похибка $\delta_i = \frac{(y_i - \tilde{y}_i)}{y_i} \cdot 100\%$ та середнє арифметичне значення її абсолютних величин.

Таблиця 2.2 – Оцінка похибки перевірних розрахунків

N	$\bar{q}_i$	$\tilde{\bar{q}}_i$	$\Delta\bar{q} = \bar{q}_i - \tilde{\bar{q}}_i$	$\delta_i = \frac{\Delta\bar{q}_i}{\bar{q}_i} \cdot 100\%$
1	17.20	12.76	4.44	25.80
2	8.64	8.53	0.11	1.23
3	11.40	9.35	2.04	17.80
4	8.72	8.17	0.54	6.20
5	10.60	12.29	-1.69	-15.90
6	12.30	12.55	-0.24	-1.95
7	12.10	11.72	0.37	3.05
8	10.30	9.83	0.46	4.50
9	10.30	10.74	-0.44	-4.27
10	11.10	10.78	0.31	2.88
11	13.80	11.45	2.34	16.90
12	12.50	11.41	1.08	8.64
13	9.74	10.90	-1.16	-11.90
14	12.40	14.06	-1.66	-13.38

15	11.40	12.27	-0.87	-7.63
16	9.34	9.41	-0.07	-0.75
17	8.95	10.23	-1.28	-14.30
18	10.80	9.62	1.17	10.83
19	9.84	9.08	0.76	7.72
20	9.19	9.58	-0.39	-4.24
21	11.60	10.44	1.15	9.90
22	9.61	10.90	-1.29	-13.40
23	9.22	10.44	-1.22	-13.20
24	9.33	8.76	0.56	6.00
25	7.79	7.58	0.20	2.56
26	9.78	9.33	0.44	4.59
27	9.94	9.03	0.90	9.05
28	7.20	6.83	0.36	5.13
29	10.70	10.02	0.67	6.26

Продовження таблиці 2.2

N	$\bar{q}_i$	$\tilde{q}_i$	$\Delta\bar{q} = \bar{q}_i - \tilde{q}_i$	$\delta_i = \frac{\Delta\bar{q}_i}{\bar{q}_i} \cdot 100\%$
30	8.01	10.40	-2.39	-29.80
31	8.12	9.10	-0.98	-12.06
32	9.08	9.10	-0.02	-0.22

33	6.87	9.14	-2.27	-33.04
34	10.10	10.36	-0.26	-2.57
35	8.36	10.23	-1.87	-22.36
36	8.73	10.67	-1.94	-22.22
37	15.90	13.34	2.55	16.03
38	13.30	14.50	-1.20	-9.00
39	13.30	12.65	0.64	4.86
40	11.30	11.14	0.16	1.42

$|\delta|_{cep}$=10.08

Додаток А

Значення критерію Фішера F для рівня значущості 0.05

ν_1 - число ступенів свободи для більшої дисперсії

ν_2 - число ступенів свободи для меншої дисперсії

ν_2	ν_1								
	12	14	16	20	24	30	40	50	75
10	2.9	2.9	2.8	2.8	2.7	2.7	2.7	2.6	2.6
11	2.8	2.7	2.7	2.7	2.6	2.6	2.5	2.5	2.5
12	2.7	2.6	2.6	2.5	2.5	2.5	2.4	2.4	2.4
13	2.6	2.6	2.5	2.5	2.4	2.4	2.3	2.3	2.3
14	2.5	2.5	2.4	2.4	2.4	2.3	2.3	2.2	2.2
15	2.5	2.4	2.3	2.3	2.3	2.3	2.2	2.2	2.2
16	2.4	2.4	2.3	2.3	2.2	2.2	2.2	2.1	2.1
17	2.4	2.3	2.3	2.3	2.2	2.2	2.1	2.1	2.0
18	2.3	2.3	2.3	2.3	2.2	2.1	2.1	2.0	2.0
19	2.3	2.3	2.2	2.2	2.1	2.1	2.0	2.0	2.0
20	2.3	2.2	2.2	2.1	2.1	2.0	2.0	2.0	1.9
21	2.3	2.2	2.2	2.1	2.1	2.0	2.0	1.9	1.9
22	2.2	2.2	2.1	2.1	2.0	2.0	1.9	1.9	1.9
23	2.2	2.1	2.1	2.0	2.0	2.0	1.9	1.9	1.8
24	2.2	2.1	2.1	2.0	2.0	1.9	1.9	1.9	1.8
25	2.2	2.1	2.1	2.0	2.0	1.9	1.9	1.8	1.8

26	2.2	2.1	2.1	2.0	2.0	1.9	1.9	1.8	1.8
27	2.1	2.1	2.0	2.0	1.9	1.9	1.8	1.8	1.8
28	2.1	2.1	2.0	2.0	1.9	1.9	1.8	1.8	1.8
29	2.1	2.1	2.0	1.9	1.9	1.9	1.8	1.8	1.7
30	2.1	2.0	2.0	1.9	1.9	1.8	1.8	1.8	1.7
32	2.1	2.0	2.0	1.9	1.9	1.8	1.8	1.7	1.7
34	2.1	2.0	2.0	1.9	1.8	1.8	1.7	1.7	1.7
36	2.0	2.0	1.9	1.9	1.8	1.8	1.7	1.7	1.7
38	2.0	2.0	1.9	1.9	1.8	1.8	1.7	1.7	1.6
40	2.0	2.0	1.9	1.8	1.8	1.7	1.7	1.7	1.6
42	2.0	1.9	1.9	1.8	1.8	1.7	1.7	1.6	1.6
44	2.0	1.9	1.9	1.8	1.8	1.7	1.7	1.6	1.6
46	2.0	1.9	1.9	1.8	1.8	1.7	1.7	1.6	1.6
48	2.0	1.9	1.9	1.8	1.7	1.7	1.6	1.6	1.6
50	2.0	1.9	1.9	1.8	1.7	1.7	1.6	1.6	1.6
100	1.9	1.8	1.8	1.7	1.6	1.6	1.5	1.5	1.4
ν_2	ν_1								
	12	14	16	20	24	30	40	50	75
200	1.8	1.7	1.7	1.6	1.6	1.5	1.7	1.4	1.4
∞	1.8	1.6	1.6	1.6	1.5	1.5	1.4	1.4	1.3

Додаток Б

Значення критерію Стьюдента при рівні значущості 0.05

Число ступенів свободи	Рівень значущості 0.05	Число ступенів свободи	Рівень значущості 0.05
1	12.70	18	2.10
2	4.30	19	2.09
3	3.18	20	2.09
4	2.78	21	2.08
5	2.57	22	2.07
6	2.45	23	2.07
7	2.36	24	2.06
8	2.31	25	2.06
9	2.26	26	2.06
10	2.23	27	2.05
11	2.20	28	2.05
12	2.18	29	2.05
13	2.16	30	2.04
14	2.14	40	2.02
15	2.13	60	2.00
16	2.12	120	1.98
17	2.11		

Практична робота № 4

ВИЗНАЧЕННЯ ФРАКТАЛЬНОЇ РОЗМІРНОСТІ НА БАЗІ ЗАСТОСУВАННЯ СТРУКТУРНОЇ ФУНКЦІЇ

Теоретична частина

Для характеристики локальної структури турбулентності А.Н.Колмогоров ввів поняття структурної функції. Вона являє собою дисперсні різниці швидкостей потоку в двох точках, що знаходяться на відстані один від одного Δx:

$$M_u(\Delta x) = [U(x)-U(x+\Delta x)]^2 \qquad (4.1)$$

Різниця швидкостей в двох точках виникає в тих випадках, коли в потоці є турбулентні створення, масштаб яких менше або однаковий з величиною Δx. Якщо розмір обурення істотно більше Δx, то точки знаходяться всередині турбулентного створення , і разність швидкостецй в зазначених точках буде незначною. Якщо ж Δx велике $U(x)$ *і* $U(x+\Delta x)$ стають незалежними, а саме структурна функція досягає стану насичення і при подальшому збільшенні інтервал Δx коливається незначно.

Користуючись *методом розмірності*, А.Н.Колмогоров прийшов до закону "*однієї третини*", згідно з яким зміна швидкості на протязі деякої малої відстані пропорційно цій відстані в ступені 1/3, тобто

$$\Delta U=C(E\Delta x)^{1/3} \qquad (4.2)$$

Або

$$M_u(\Delta x) = CE^{2/3}\,\Delta x^{2/3}, \qquad (4.3)$$

що виражає закон 2/3, встановлений А.Н.Колмогоровим.

Використовуючи гіпотезу "*замороженої турбулентності*" Д.Тейлора, яка полягає у тому, що переносимі вихори мають властивості збереження і пасивності відношенню руху усередненного потоку, замінимо $\Delta x = \bar{U}\tau$, тобто перейдемо до тимчасової структурної функції.

Тоді

$$M_u(\tau) = CE^{2/3}\,U^{-2/3}\tau^{2/3}, \qquad (4.4)$$

Позначивши $CE^{2/3}\,U^{-2/3} = A$, отримаємо

$$M_u(\tau) = A\tau^{2/4.} \qquad (4.5)$$

Тут A - коефіцієнт , характеризуємий диссипацією енергії турбулентності.

В сучасній стохастичній гідрології масштабування та пов'язане з ним визначення фрактальних розмірностей більшості гідрометеорологічних величин може бути отримано в результаті дослідження часової або просторової варіації величини, яка вивчається, в часі або просторі з кроком s. *Під варіацією мається на увазі зміна досліджуваної характеристики на деякому часовому інтервалі або заданій відстані, яку частіше за все представляють у вигляді статистичної функції наступного вигляду*

$$\sqrt{\mathrm{M(s)}} = \mathrm{F_2(s)} \sim \mathrm{s^H} \qquad (4.6)$$

Функція M(s) *має назву структурної функції і являє собою просторову або часову дисперсію випадкової функції.* Із (4.6) витікає, що функція $F_2(s)$ являє собою квадратний корінь з відомої в статистичній гідрології структурної функції $M(s)$, яка застосовується при дослідженні гідрометеорологічних величин, чия стаціонарність носить локальний характер й зберігається на порівняно невеликих інтервалах зміни аргументу. Структурну функцію визначають як математичне сподівання квадрата різниці перерізів випадкової функції. Якщо реалізація ергодичного випадкового процесу задана в дискретних точках вимірювання, то структурна функція має вигляд

$$M(s) = \frac{1}{(n-s)} \sum_{i=1}^{n-s} (\Delta x_i - \Delta x_{i+s})^2 = 2\left[\sigma_x^2 - B(s)\right] \qquad (4.7)$$

де n - число вимірювань;

σ_x^2 -дисперсія;

$B(s)$-автоковаріаційна функція, яка розраховується за формулою:

$$B(s) = \frac{1}{(n-s)} \sum_{i=1}^{n-s} (\Delta x_i \cdot \Delta x_{i+s}). \qquad (4.8)$$

Нормована автоковаріаційна функція має вигляд

$$R(\tau) = \frac{B(\tau)}{\sigma_x^2} \qquad (4.9)$$

і *називається автокореляційною*. Коли $\tau = 0$, $R(\tau) = 1$, $M_u(\tau)=0$ оскільки автоковаріаційна функція при $s = 0$ дорівнює дисперсії процеса $R(0) = \sigma_x^2$. Коли $R(\tau)=0$, то $M_u(\tau)=4$. Автокореляційна функція стаціонарної випадкової функції симетрична $R(\tau) = R(-s)$ і є фунцією лише різниці двох аргументів $t_1 - t_2 = s$.

Нормована структурна функція записується у вигляді

$$m(s) = \frac{M(s)}{\sigma_x^2} = 2\left[1 - R(s)\right] \tag{4.10}$$

Або

$$M(\tau) = 2[1-R(\tau)]. \tag{4.11}$$

й змінюється від 0 до 4.

Якщо розглянути область від $R(s) = 1$ до $R(s) = 0$, коли s змінюється від 0 до $+\infty$, то справедливим буде такий запис нормованої структурної функції

$$m(s) = \frac{\frac{1}{2}M(s)}{\sigma_x^2} = 1 - R(s). \tag{4.12}$$

Тоді при $R(s) = 1$ нормована структурна функція $m(s)$ буде наближуватись до нуля, й при $R(s) = 0$ - до одиниці. Коли ж s змінюється від 0 до $-\infty$, то значення $m(s)$ будуть змінюватися від нуля до 4.

Структурні функції можуть бути *як часовими, так і просторовими*. Остання є математичним сподіванням квадрата різниці досліджуваної характеристики в двох точках, які знаходяться на відстані ΔL одна від

одної. Просторова структурна функція використовувалася А.Н. Колмогоровим для масштабування турбулентних утворень, де швидкість потоку розглядалася як розрахункова характеристика.

Практична частина.

1) Використовуючи результати розрахунків автокореляційної функції з першого завдання розрахувати структурну функцію за формулою (4.11):

$M(\tau=0) = 2[1-1]=0.$

$M(\tau=1) = 2[1-....].$

$M(\tau=2) = 2[1-...].$

$M(\tau=3) = 2[1-...]$

…..

Останнє значення τ відповідає випадку, коли автокореляційна функція стала від'ємною.

2) Знаходимо фрактальну розмірність шляхом побудови графіка за степеневим рівнянням.

Вихідні дані

Вихідні дані беруться згідно варіанту з практичної роботи № 1 «Побудова автокореляційної функції для подовжньої складової швидкості течії. Визначення часу проходження одного турбулентного вихора. Визначення розміру турбулентного вихора».

Практична робота № 5.

Визначення повної, випадкової та географічної складових просторового розподілу гідрологічної чи гідроекологічної характеристики на базі методу сумісного аналізу даних. Обгрунтування способу узагальнення розглядуваної характеристики у просторі. Уточнення характеристик за даними методу сумісного аналізу

5.1 Теоретичні основи

У гідроекологічних розрахунках найчастіше використовується математична модель стоку, яка описує його ймовірністну природу. Такого роду моделі включають до себе ряд гіпотез, які дозволяють звести розрахунки до статистичної оцінки декількох параметрів моделі: середнє арифметичне значення досліджуваної гідрометеорологічної величини, коефіцієнт варіації Cv, коефіцієнт асиметрії Cs, коефіцієнт автокореляції $r(1)$.

Навіть при довгих рядах спостережень оцінки окремих статистичних параметрів визначаються з великою погрішністю, тобто є статистично незначущими. До числа таких параметрів відносяться насамперед коефіцієнти автокореляції $r(1)$ й асиметрії Cs , а також розрахункове відношення Cs / Cv.

Обмеженість у часі наявних спостережень по більшості рядів стоку річок України породжує статистичну нестійкість цих параметрів, що може бути ефективно компенсоване за рахунок додаткової інформації про просторові закономірності розподілу розглядуваних характеристик річкового стоку. *Для підвищення надійності оцінок статистичних параметрів за вибірковими даними рекомендується виконувати їхнє просторове узагальнення.* За допомогою методу, запропонованого С.М. Крицким і М.Ф. Менкелем (1981,1982), можна обґрунтувати характер цього узагальнення.

Суть методу зводиться до визначення географічної і випадкової складових загальної просторової дисперсії розглядуваного статистичного параметра A:

$$\sigma_{П}^2 = \sigma_{Г}^2 + \sigma_{B}^2 \ , \qquad (5.1)$$

де $\sigma_{П}^2$ - повна складова дисперсії параметра;

$\sigma_{Г}^2$ - географічна складова дисперсії параметра;

σ_{B}^2 - випадкова складова дисперсії параметра.

При цьому повна просторова дисперсія параметра оцінюється за формулою

$$\sigma_{П}^2 = \frac{\sum_{j=1}^{k} (A_j - A_{CEP})^2}{k-1} \ , \qquad (5.2)$$

де k - число об’єктів (водозборів), об'єднаних в одну групу;

j - порядковий номер розглядуваного об’єкту (водозбору);

A_j - індивідуальна оцінка параметра (оцінка, виконана для окремого водозбору);

A_{CEP} - осереднена в межах виділеної групи оцінка параметра.

Випадкова складова просторової дисперсії параметра визначається як осереднена за групою виділених об'єктів дисперсія індивідуальної оцінки параметра

$$\sigma_{B}^2 = \frac{\sum_{j=1}^{k} \sigma_{Aj}^2}{k} \ , \qquad (5.3)$$

де σ_{Aj} - середнє квадратичне відхилення індивідуальної оцінки параметра A.

Географічна складова знаходиться за допомогою зворотного розрахунку з (5.1):

$$\sigma_{\Gamma}^2 = \sigma_{\Pi}^2 - \sigma_B^2 . \tag{5.4}$$

Якщо виконується умова

$$\frac{\sigma_B^2}{\sigma_{\Pi}^2} > \frac{\sigma_{\Gamma}^2}{\sigma_{\Pi}^2} , \tag{5.5}$$

то можна зробити висновок, що просторовий розподіл досліджуваного параметра в більшій мірі визначається випадковими властивостями поєднуваних вибірок і в меншій - зміною фізико-географічних умов формування стоку по території. Таким чином, при виконанні (5.5) приймається рішення, що вибіркові оцінки параметрів можуть бути осереднені в межах досліджуваної території. Необхідно підкреслити, що *якість об'єднання тим вища, чим менший внесок географічної складової у повну просторову дисперсію параметра.* Географічна складова є, власне кажучи, оцінкою статистичної неоднорідності вихідного матеріалу. Коли оцінки вибіркових параметрів дуже великі, географічна складова дисперсії, обчислена зворотним розрахунком за (5.4), може приймати негативні значення. У цьому випадку внесок випадкової складової у повну просторову дисперсію параметра може бути прийнятий рівним 100% , а географічної – 0,00%.

Середнє квадратичне відхилення осередненої у просторі оцінки статистичного параметра розраховується за співвідношенням

$$\sigma_{CEP} = \sqrt{\frac{\sigma_B^2}{k} + \sigma_\Gamma^2} \tag{5.6}$$

Величина σ_{CEP} поряд з умовою (5.5) також є критерієм якості об'єднання. Осереднена оцінка параметра визнається статистично достовірною, коли виконується умова

$$A_{CEP} > 2\sigma_{CEP} \tag{5.7}$$

У ході послідовного об'єднання параметрів можна виявити ряди, статистичні властивості яких відрізняються від властивостей об'єднуваної сукупності: у міру збільшення числа поєднуваних об'єктів k при незначному зростанні географічної складової σ_Γ^2 дисперсія осредненого у межах поєднуваної сукупності параметра σ_{CEP}^2 відповідно до виразу (5.6) повинна зменшуватися. "Сплеск" в убутній функції $\sigma_{CEP}^2 = \varphi(k)$ свідчить про те, що досліджуваний параметр k -того ряду стоку значно відрізняється від осередненої оцінки та значень відповідного параметру інших рядів. Для таких рядів у наступних розрахунках рекомендується використовувати не осереднену, а уточнену оцінку параметра, за винятком випадків, коли ряд є статистично неоднорідним унаслідок водогосподарських перетворень або відноситься до іншого району із своїми статистичними властивостями.

Для оцінки якості розрахунків також використовуються так звані допустимі відносні середні квадратичні відхилення $\varepsilon_{ДОП.}$ визначення параметра A за вибірковими даними. Якщо $\varepsilon_A \le \varepsilon_{ДОП.}$, то вибіркове значення параметра приймається до розрахунку. Величина ε_A визначається за формулою

$$\varepsilon_A = \frac{\sigma_A}{A} \cdot 100\% \ , \tag{5.8}$$

де σ_A - середнє квадратичне відхилення оцінки параметра A.

Для статистичних параметрів, що розраховуються по спостереженим даним з великим середньоквадратичним відхиленням, осереднена в межах поєднуваної сукупності оцінка є більш достовірною, ніж індивідуальна. Осереднені у межах статистично однорідних районів оцінки статистичних параметрів рекомендуються до використання при побудові стохастичних моделей, а також при описуванні статистичних розподілів характеристик стоку тих водозборів, на яких спостереження за стоком відсутні.

Уточнена по сукупності розглянутих об'єктів оцінка статистичного параметра розраховується на основі виразу

$$A_j' = \frac{A_j \sigma_{CEP}^2 + A_{CEP} \sigma_j^2}{\sigma_{CEP}^2 + \sigma_j^2}\ , \qquad (5.9)$$

де A_j' - уточнена оцінка індивідуального значення параметра A_j з урахуванням інформації, що увійшла в поєднувану сукупність;

A_j - вхідне значення параметра по j-тому розглянутому об'єкту (водозбору);

σ_j^2 - дисперсія параметра A_j по j-тому розглянутому об'єкту (водозбору);

A_{CEP} - осереднена в межах виділеної групи об'єктів оцінка параметра A;

σ_{CEP}^2 - дисперсія осередненої у межах виділеної групи об'єктів оцінки статистичного параметра.

Середнє квадратичне відхилення уточненого значення параметра визначається на основі наступної формули, отриманої за методом статистичних іспитів

$$\sigma_j' = \frac{\sigma_j \sigma_{CEP}}{\sqrt{\sigma_j^2 + \sigma_{CEP}^2}}\ , \qquad (5.10)$$

де σ'_j - середнє квадратичне відхилення уточненого параметра A'_j по j-тому розглянутому об'єкту (водозбору);

σ_j - середнє квадратичне відхилення параметра A_j по j-тому розглянутому об'єкту (водозбору).

Таким чином, метод С.М. Крицкого та М.Ф. Менкеля дозволяє вирішувати багато задач географічного узагальнення. Наприклад, задача вибору способу географічного узагальнення може бути вирішена при розгляді умови (5.5). Якщо умова виконується, то як спосіб географічного узагальнення вибирається районування, тобто осереднення розглядуваної характеристики у межах виділеної території, якщо не виконується – картування досліджуваної характеристики у вигляді карти ізоліній. Визначення меж географічного узагальнення може спиратися на виконання умови (5.7) та аналіз залежності $\sigma^2_{CEP} = \varphi(k)$. *Зростання географічної складової повної просторової дисперсії параметра буде тим інтенсивнішим, чим ширше межі просторового узагальнення.*

Слід зазначити, що перед застосуванням методу бажано провести попередній аналіз вхідної інформації, використовуючі для виділення початкових угрупувань вже існуючі географічні узагальнення, наприклад фізико-географічне районування або районування за синхронністю коливань стоку.

На першому етапі узагальнень може бути прийнята гіпотеза про те, що не тільки крива розподілу, а й статистичні параметри усіх розглядуваних річок належать до однієї генеральної сукупності. Надалі для окремих параметрів межі установлених статистично однорідних районів можуть розширюватися. Чим більший вплив підстильної поверхні на формування стоку, тим, як правило, меньші просторові масштаби виділених районів.

5.2 Метод сумісного аналізу гідрохімічних показників води малих річок басейну Нижнього Дністра

При розгляді можливості поєднання водозбори малих річок Нижнього Дністра в один гідрологічний район чотирьох водозборів, що належать до басейну Нижнього Дністра, було виконано статистичне опрацювання рядів мінералізації р. Білочі, Кучурган, Окна та Ягорлик, у період з 2000 по 2012рр. Таблиця вихідних даних малих річок Нижнього Дністра (таблиця 4.1) містить початкову інформацію для розрахунку результатів застосування методу сумісного аналізу щодо мінералізації даних водойм .

Таблиця 4.1- вихідні дані малих річок Нижнього Дністра

Назва річки	Мсер (мг/дм³)	σ²Мсер	Cυ	σ² Cυ	Cs/Cv	σ Cs/Cv
Білочі	806	201459	0,56	0,008	6,36	1,44
Кучурган	2343	1045872	0,44	0,004	4,33	1,50
Окна	1062	270916	0,49	0,006	4,72	1,49
Ягорлик	961	115018	0,35	0,003	14,4	1,64

Параметри об'єднаної сукупності:

Мсер=1293 мг/дм³; Cυср = 0,46; (Cs/Cv)ср = 7,45

Таблиця 4.2 містить результати застосування методу сумісного аналізу даних малих річок Нижнього Дністра для обґрунтування способу просторового узагальнення мінералізації, коефіцієнта варіації Cυ та відношення Cs/Cv для водозборів даних річок.

Таблиця 4.2 – Результати застосування методу сумісного аналізу

Показник	Дисперсія

		Повна	Випадкова	Середня
середнє	значення	501016	9645	491371
	%	100	1,92	98,08
Cυ	значення	0,0074	0,07	-0,064
Cs/Cv	значення	22,26	0,69	21,57
	%	100	3,12	96,88

За методом сумісного аналізу, виходячи з таблиці 3.2 було встановлено, що випадкова складова розподілу мінералізації по території становить 1,92% а географічна - 98,08%. Так як внесок географічної складової перевищує 70%, то просторові узагальнення можуть бути представлені у вигляді карти ізоліній, як для мінералізації, так і для співвідношення Cs/Cv. Виділення районів, у даному випадку, які б вказували на дискретність розподілу характеристики та надавали б можливість осереднювати характеристики не можливе.

Також, використовуючи метод сумісного аналізу, гідрохімічні показники були перевірені на відповідність умові $\frac{\sigma^2_{вип}}{\sigma^2_{пов}} * 100\% \frac{\sigma^2_{вип}}{\sigma^2_{пов}} * 100\% \geq 70\%$, результати розрахунків за методом сумісного аналізу наведені в таблиці В.1 додатку В.

Дослідження показали, що узагальнення водозборів малих річок Нижнього Дністра з виконанням районування можливе за такими показниками як СПАР, нітрити, нафтопродукти, гідрокарбонати та БСК5. Це дає змого осереднити дані значення по чотирьох річках і розповсюджувати дані значення на всю територію, по якій протікають дані річки. Для інших досліджуваних показників таблиці В.1, включаючи мінералізацію, рекомендується застосовувати картування, тобто побудову карти ізоліній.

Таблиця В.1 - Результати розрахунків за методом сумісного аналізу для річок Білочі, Окна, Кучурган та Ягорлик у період 2000-2012рр.

Показник	Назва річки	Середні значення (мг/дм³)	Дисперсія, %	
			$\frac{\sigma^2_{вип}}{\sigma^2_{пов}}$	$\frac{\sigma^2_{геогр}}{\sigma^2_{пов}}$
1	2	3	4	5
Водневий показник	Білочі	7,85	56,5	43,5
	Кучурган	7,70		
	Окна	7,90		
	Ягорлик	7,76		
Азот омонійний	Білочі	0,17	42,1	57,9
	Кучурган	0,66		
	Окна	0,72		
	Ягорлик	0,16		
Азот нітратів	Білочі	4,76	9,42	90,58
	Кучурган	1,54		
	Окна	11,0		
	Ягорлик	5,83		
Бск	Білочі	3,49	100	0
	Кучурган	4,70		
	Окна	3,87		
	Ягорлик	4,75		
Гідро-карбонати	Білочі	423	100	0
	Кучурган	450		

	Окна	442		
	Ягорлик	449		
Завислі речовини	Білочі	62,1	23,6	76,4
	Кучурган	47,9		
	Окна	69,7		
	Ягорлик	38,6		
Калій	Білочі	7,73	6,62	93,4
	Кучурган	24,9		
	Окна	15,1		
	Ягорлик	6,98		
Кальцій	Білочі	87,7	6,28	93,72
	Кучурган	142		
	Окна	117		
	Ягорлик	70,6		
1	2	3	4	5
Магній	Білочі	52,9	2,30	97,70
	Кучурган	214		
	Окна	70,9		
	Ягорлик	74,3		
Натрій	Білочі	57,7	2,31	97,69
	Кучурган	270		
	Окна	78,7		
	Ягорлик	97,2		
Нафто-продукти	Білочі	0,07	100	0
	Кучурган	0,07		

	Окна	0,05		
	Ягорлик	0,04		
Нітрати	Білочі	23,3	4,24	95,76
	Кучурган	4,74		
	Окна	53,1		
	Ягорлик	12,2		
Нітрити	Білочі	0,08	87,17	12,82
	Кучурган	0,19		
	Окна	0,20		
	Ягорлик	0,03		
Сухий залишок	Білочі	605	4,06	95,93
	Кучурган	2134		
	Окна	1050		
	Ягорлик	742		
Розчинений кисень	Білочі	8,85	52,4	47,6
	Кучурган	7,05		
	Окна	7,15		
	Ягорлик	7,41		
СПАР	Білочі	0,16	84,13	15,87
	Кучурган	0,20		
	Окна	0,25		
	Ягорлик	0,34		
Сульфати	Білочі	122	1,90	98,1
	Кучурган	832		
	Окна	237		

	Ягорлик	178		
Фосфати	Білочі	0,32	14,6	85,4
	Кучурган	0,29		
	Окна	0,69		
	Ягорлик	0,25		
1	2	3	4	5
Хлориди	Білочі	58,5	1,92	98,07
	Кучурган	414		
	Окна	96,1		
	Ягорлик	92,0		
ХСК	Білочі	42,9	8,02	91,98
	Кучурган	115		
	Окна	51,9		
	Ягорлик	47,4		

Практична робота № 6

«Побудова дискримінантної функції лінійного виду. Визначення числа Махалонобіса.»

Дискримінантний аналіз є статистичний метод, який дозволяє вивчати різницю між двома або більше групами об'єктів по декількох змінних одночасно.

У теорії розпізнавання образів задача класифікації формулюється таким чином: на основі відомостей про окремих представників різних класів навчаючої системи із характерними для них ознаками (предікторами) необхідно знайти вирішальне правило, за яким той чи інший об'єкт може бути віднесеним до одного з класів.

Сформульована задача є типовою задачею розпізнавання образів. Суть її полягає у тому, що, по-перше, необхідно розділити весь простір образів на два підпростори, у першому з яких явище відбувається, а в другому – ні. По-друге, треба побудувати правило, за допомогою котрого можна віднести образ, який підлягає розпізнаванню, до того чи іншого підпросторів.

Нехай ми маємо множину V векторів-предікторів (образів), що складають простір зображень Rv. Припустимо, що цей простір розділяється на два підпростори R_{v1} і R_{v2} . У першому з них розташовується множина V_1 образів X, при яких явище відбувається, а у другому - множина V_2 образів X, коли явище не відбувається. Ясно, що

$$V_1 \cup V_2 = V, V_1 \cap V = \mathrm{O} \qquad (6.1)$$

Поперед усього, як зазначалося вище, треба побудувати поверхню, яка б розділяла підпростори R_{V1} і R_{V2} . Наведемо для пояснення прості приклади.

Нехай простір буде двовимірним $R_V = R_V (x_1, x_2)$ (рис.6.1). Тоді ми маємо на площині (x_1, x_2) лінію $x_1 = f (x_2)$, що розділяє підпростір R_{V1} від підпростору R_{V2} . Досить простим буде і випадок трьохвимірного простору

$R_V = R_V(x_1, x_2, x_3)$ (рис.6.2). У цьому випадку підпростори R_{V1} і R_{V2} розділяє деяка поверхня у трьохвимірному просторі, рівняння якої має вид $x_3=\varphi(x_1, x_2)$.

Більш складні умови виникають, коли розглядаються образи із багатовимірного простору $R_V = R_V(x_1,x2,\ldots,x_n)$. Поверхня, що розділяє цей простір на підпростори R_{V1} і R_{V2} називається розділяючою гіперповерхнею, а її рівняння має вид:

$$F(x_1,x2,\ldots,x_n) = 0. \qquad (6.2)$$

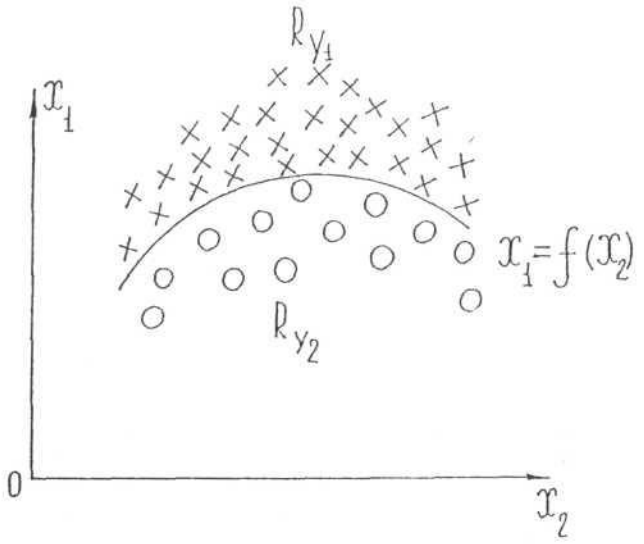

Рисунок 6.1 - Образи і розділяюча функція в двовимірному просторі

Надалі отримується правило, за допомого якого є підстава віднести вектор X, що підлягає розпізнаванню, до підпростору R_{V1}, або підпростору R_{V2}. Це правило називають розв'язувальним правилом. Якщо відповідно до нього

приймається рішення, що $X \in R_{V1}$, то явище прогнозується, якщо приймається рішення, що , $X \in R_{V2}$, то явище не прогнозується. Етап, який складається з побудови розділяючої гіперповерхні та розв'язувального правила, носить назву етапа навчання.

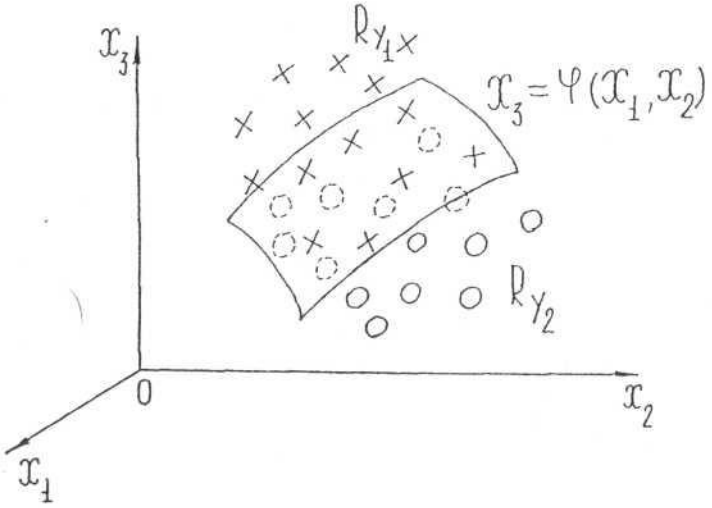

Рисунок 6.2 – Образи та розділяюча поверхня в трьохвимірному просторі

Прийняття рішення про належність вектора X до підпросторів R_{V1} чи R_{V2} називають *етапом розпізнавання*. Множина V векторів-предікторів, на основі якої реалізуються перелічені етапи, називається *навчаючою сукупністю*. Крім неї, створюється ще й перевірна сукупність, яка використовується для перевірки адекватності моделі альтернативного прогнозу. Саме розв'язувальне правило може бути представлене у вигляді деякої математичної функції, яку назвемо дискримінантною.

Функції, які забезпечують можливість віднесення об'єкта, який підлягає класифікації, до однієї з виділених груп, називають дискримінантними.

Застосування дискримінантного аналізу, з однієї сторони, передбачає принципову розділимість класів, а з іншої сторони, допускає їх часткову "перекриваємість". Таким чином, рішення про віднесення явища або об'єкту

до того чи іншого класу приймається з тією чи іншою долею похибки. Розглянемо основні ідеї теорії розпізнавання образів (*Школьний Є.П., Лоєва І.Д., Гончарова Л.Д.,1999*). Позначимо через H_1 гіпотезу, що образ $X \in V_1$. Альтернативною буде гіпотеза H_2, про те, що $X \in V_2$. Задача розпізнавання полягає у тому, що треба знайти правило, яке дозволяє обгрунтовано прийняти гіпотезу H_1 або H_2. Всіляка процедура перевірки гіпотез передбачає, що приймаючи те чи інше рішення, ми можемо припустити помилку 1-го чи 2-го роду. Нагадаємо, що помилку 1-го роду ми припускаємо, коли відкидаємо правильну гіпотезу. Помилка 2-го роду пов'язана з прийняттям невірної гіпотези. Помилку другого роду ще називають "похибкою хибної тривоги".

Будемо вважати, що відомими є умовні ймовірності класів V_1 і V_2:

$$P\left(x_1, x_2, ..., x_n / V_1\right) \tag{6.3}$$

та

$$P\left(x_1, x_2, ..., x_n / V_2\right) \tag{6.4}$$

Позначимо ймовірність помилки 1-го роду через P_a, а 2-го роду через P_b. Знаючи ймовірності (6.3) та (6.4), а також апріорні ймовірності $P(V_1)$ і $P(V_2)$ класів V_1 і V_2, можна розрахувати ймовірності помилок 1-го й 2-го роду.

Розв'язувальне правило або дискримінантна функція будується на основі функції подібності

$$\lambda\left(x_1, x_{2,...,} x_n\right) = \frac{P\left(x_1, x_{2,...,} x_n / V_1\right)}{P\left(x_1, x_{2,...,} x_n / V2\right)} \tag{6.5}$$

а величину

$$\frac{\delta_b P(V_2)}{\delta_a P(V_1)} = \theta \tag{6.6}$$

називають порогом.

Таким чином, ми прийшли до такого розв'язувального правила:

$$\text{вектор } X \in V_1, \text{ якщо } \lambda(x_1, x_2, \ldots, x_n) > \theta \tag{6.7}$$

$$\text{вектор } X \in V_2, \text{ якщо } \lambda(x_1, x_2, \ldots, x_n) < \theta. \tag{6.8}$$

Якщо є підстави вважати, що $\delta_a = \delta_b$ і $P(V_1) = P(V_2)$, то $\theta = 1$ й розв'язувальне правило має вид:

$$\begin{gathered}\text{вектор } X \in V_1, \text{ якщо } \lambda(x_1, x_2, \ldots, x_n) > 1, \\ \\ \text{вектор } X \in V_2, \text{ якщо } \lambda(x_1, x_2, \ldots, x_n) < 1\end{gathered} \tag{6.9}$$

Отже розв'язувапьне правило базується на нерівності

$$\frac{P(x_1, x_{2,\ldots,} x_n / V_1)}{P(x_1, x_{2,\ldots,} x_n / V_2)} > \frac{\delta_b P(V_2)}{\delta_a P(V_1)}, \tag{6.10}$$

яка може бути представленою у логарифмичному виді

$$\ln \frac{P(x_1, x_2, \ldots., x_n / V_1)}{P(x_1, x_2, \ldots, x_n / V_2)} > \ln \frac{\delta_b P(V_2)}{\delta_a P(V_1)} \tag{6.11}$$

Функцію виду

$$F(x_1, x_{2,\ldots,} x_n) = \ln P(x_1, x_{2,\ldots,} x_n / V_1) - \ln P(x_1, x_{2,\ldots,} x_n / V_2) + \frac{\delta_a P(V_1)}{\delta_b P(V_2)} \tag{6.12}$$

називають дискримінантною функцією .

Якщо використовується дискримінантна функція, то розв'язувальне правило приймає вид:

$$X \in V_1, якщо F(x_1, x_2, ..., x_n) > 0; \quad (6.13)$$

$$X \in V_2, якщо F(x_1, x_2, ..., x_n) < 0; \quad (6.14)$$

Ясно, що рівняння $F(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$ є рівнянням розділяючої поверхні для підпросторів R_{V1} і R_{V2} .

Спрощена дискримінантна функція розраховується за формулою:

$$F = a_1 x_1 + a_2 x_2 + ... + a_m x_m + a_0, \quad (6.15)$$

де $A=(a_1, a_2, ..., a_m)$ – вектор коефіцієнтів дискримінантної функції;

$X=(x_1, x_2, ..., x_m)$ – вектор - предиктор;

m – кількість виміряних ознак.

Прогноз за дискримінантною функцією випускається таким чином:

якщо $F(x_1, x_2, ..., x_n) \geq 0$ *– прогнозується поява досліджуваного явища;*

якщо $F(x_1, x_2, ..., x_n) < 0$ *– досліджуване явище не прогнозується.*

Критерієм якості проведення розділяючої поверхні є число Махаланобіса, яке характеризує відстань між центрами класів. При

побудові лінійної дискримінантної функції число Махаланобіса визначається за матричним рівнянням виду

$$\Delta = (\mu_1 - \mu_2)' K^{-1} (\mu_1 - \mu_2), \tag{6.16}$$

або

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n} (\mu_{1i} - \mu_{2i})^2 / \sigma_i^2. \tag{6.17}$$

Чим більше число Махаланобіса, тим меньше ймовірність похибки класифікації. При Δ=11 ймовірність похибки класифікації досягає 5%.

Оцінка точності прогнозу виконується шляхом розрахунку забезпеченості допустимої похибки прогнозу

$$p = \frac{n - m}{n} \cdot 100\%, \tag{6.18}$$

де p – забезпеченість прогнозу; n – загальна кількість перевірочних прогнозів; m – кількість прогнозів, що не виправдались.

Прогноз вважається «добрим», якщо забезпеченість ≥ 85% і «задовільним», якщо забезпеченість становить 84-60%.

Таблиця 6.1 - Класи якості води в залежності від значення ІЗВ [32]

Клас якості води	**Стан води**	**Значення ІЗВ**
I	Дуже чисті	ІЗВ ≤ 0,3
II	Чисті	0,3 < ІЗВ < 1,0
III	Помірно забруднені	1,0 < ІЗВ < 2,5
IV	Забруднені	2,5 < ІЗВ < 4,0
V	Брудні	4,0 < ІЗВ < 6,0

VI	Дуже брудні	6,0 < ІЗВ < 10,0
VII	Надзвичайно брудні	ІЗВ > 10,0

Вихідні дані

Варіант 1

Середньорічні концентрації забруднюючих речовин та їх гранично допустимі концентрації ГДК

Р.Тилігул – смт.Березівка (вище селища)

	Азот аммон., мг/л	Азот нитрит., мг/л	O2, мг/л	Cr+6,мкг/л	Нафтопродукти, мг/л	БПК5 мг O2/л	ІЗВ
1990	2,26	0,03	10,86	7,44		6,26	2,98
1991	1,96	0,01	11,60	2,70	0,01	9,06	2,16
1992	0,57	0,00	12,75	7,00	0,13	2,65	2,12
1993	3,38	0,02	12,40	10,30	0,00	2,55	3,59

2001	0,02	0,01	12,58	6,00	0,00	2,54	1,33
2002	0,04	0,00	12,48	7,25	0,03	2,63	1,58
2003	0,20	0,00	12,21	3,60	0,04	2,52	1,09
2005	0,07	0,00	12,73	4,67	0,03	2,42	1,16
2007	0,10	0,00	9,13	3,15	0,02	2,44	0,92
2008	0,12	0,01	9,63	3,00	0,02	2,23	0,92
гдк	0,39	0,02	6,00	1,00	0,05	2,25	

Побудувати дискримінантну функцію за класами якості поверхневих вод (чиста) та (забруднена-брудна) згідно розрахунків $ІЗВ = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{C_i}{ГДК_i}$, де C_i – концентрація компонента,мг/дм^3; n - кількість показників ,що використовуються для розрахунку індексу ІЗВ, n=6, $ГДК_i$ – встановлена величина нормативу для відповідного типа водного об'єкта, мг/дм^3.

Варіант 2

Середньорічні концентрації забруднюючих речовин та їх гранично допустимі концентрації ГДК

Р.Тилігул – смт.Березівка (нижче селища)

	Азот аммон., мг/л	Азот нитрит., мг/л	O2, мг/л	Cr+6,мкг/л	Нафтопродукти, мг/л	БПК5 мг O2/л	ІЗВ
1990	2,20	0,02	11,02	7,00	0,00	6,42	2,81
1991	0,48	0,01	11,85	7,90	0,00	9,25	2,35
1992	0,88	0,02	12,50	3,67	0,00	2,64	1,43
1993	3,49	0,02	12,07	15,70	0,00	2,56	4,54

2001	0,03	0,00	12,29	5,30	0,00	2,54	1,20
2002	0,11	0,01	12,90	6,35	0,03	2,54	1,55
2003	0,03	0,00	12,90	2,50	0,06	2,61	0,90
2005	0,02	0,00	12,80	6,12	0,03	2,40	1,42
2007	0,11	0,00	9,09	3,23	0,03	2,45	0,97
2008	0,28	0,01	9,56	5,68	0,03	2,24	1,49
гдк	0,39	0,02	6,00	1,00	0,05	2,25	

Побудувати дискримінантну функцію за класами якості поверхневих вод (чиста) та (забруднена-брудна) згідно розрахунків $ІЗВ = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{C_i}{ГДК_i}$, де C_i – концентрація компонента,мг/дм^3; n - кількість показників ,що використовуються для розрахунку індексу ІЗВ, n=6, $ГДК_i$ – встановлена величина нормативу для відповідного типа водного об'єкта, мг/дм^3.

Практична робота № 7

«Розрахунки згладженої характеристики за даними про перші компоненти її розкладання в базиси власних векторів матриць коваріацій і кореляцій»

Установити фізичний зміст компонент можливо на основі пошуку зв'язків статистичної структури гідрологічних полів у вигляді складових базисних функцій із стокоформувальними чинниками.

Для Північно-Західної України установлені такі зв'язки між ваговими коефіцієнтами перших компонент розкладання полів річного стоку та стокоформувальними чинниками (Лобода Н.С., 2005):

$$W_{1i} = -0{,}000884\overline{E}_{mi} + 0{,}000361\overline{X}_i + 0{,}660; \quad R = 0{,}884 \qquad (7.16)$$

$$W_{2i} = -0{,}00150\overline{E}_{mi} - 0{,}00290\overline{X}_i + 3{,}014; \quad R = 0{,}734 \qquad (7.17)$$

$$W_{3i} = 0{,}00180\overline{E}_{mi} + 1{,}450; \; r = -0{,}788, \qquad (7.18)$$

де W_{pi} - вагові коефіцієнти, що відображують внесок p - тої компоненти в формування стоку i - того об'єкта) при використанні коваріаційної матриці; $\overline{E}_{mi}$ - річна норма максимально можливого випаровування для i - того об'єкта;

$\overline{X}_i$ - річна норма опадів для i - того объекта.

Зміст отриманих рівнянь можна інтерпретувати наступним чином: перші три компоненти розкладання полів річного стоку Північно-Західної України за ПОФ є математичним відображенням кліматичних процесів, які відбуваються на розглядуваній території.

Фізичне навантаження вагових коефіцієнтів залежить від просторових масштабів поєднуваних рядів та характеру розглядуваної території. Наприклад, пошук зв'язків між ваговими навантаженнями на перші компоненти розкладання та показниками кліматичних чинників й чинників підстильної поверхні для Українських Карпат показав, що найбільш оптимальним предиктором при розрахунках річного стоку з водозборів Українських Карпат є висота місцевості. Саме висота місцевості має найбільш тісний кореляційний зв'язок із значеннями вагових коефіцієнтів $W_{1i}(x, y)$ на першу, найбільш інформаційну, складову. Висота місцевості у даному випадку є інтегральним показником впливу кліматичних факторів, насамперед, опадів та випаровування, на формування річного стоку гірських районів. Вагові коефіцієнти $W_{2i}(x, y)$

на другу компоненту розкладання мають тісний зв'язок з логарифмом площі водозборів $\lg(F)$, а на третю компоненту - із залісеністю ($f_Л$). Отримані результати свідчать про те, що фізичні процеси, представлені другою та третьою компонентами, обумовлюють мезомасштабні зміни характеристик стоку у просторі, які можуть бути пов'язані із азональними $\lg(F)$ та інтразональними $f_Л$ чинниками (Лобода Н.С., 2006).

Застосування методу головних компонент до аналізу синхронності коливань стоку

7.2 Загальні положення

Мета та задачі

При вивченні розділу дисципліни „Методи просторового узагальнення гідрологічної інформації", який має назву „Метод головних компонент у гідрологічних розрахунках", студенти повинні отримати вміння та знання щодо застосування методу головних компонент до аналізу синхронності коливань стоку.

Метою методичних вказівок є закріплення студентами знань при вивченні теми "Аналіз синхронності коливань стоку на основі метода головних компонент" у теоретичному розділі "**Узагальнення інформації за методами багатовимірного статистичного аналізу".**

Задача методичних вказівок – вироблення практичних навичок при застосуванні методу головних компонент до аналізу коливань стоку за синхронністю.

У результаті вивчення теми „Аналіз синхронності коливань стоку на основі метода головних компонент " студенти повинні:

знати

- фізичну інтерпретацію компонент розкладання полів стоку за природними ортогональними функціями;

вміти

- виділяти райони та підрайони з синфазними та синхронними коливаннями стоку.

Згідно з програмою дисципліни „Методи просторового узагальнення гідрологічної інформації" на вивчення теми „Аналіз синхронності коливань стоку на основі метода головних компонент" відведено 2 години лекційного курсу та 4 години практичних занять.

До модульного контролю виконання практичних робіт входять відповіді на такі питання.

7.3 Теоретичні положення

Дослідження, які були виконані Н.П. Смирновим та В.Л.Скляренко (1986), Лободою Н.С. (1998) по аналізу просторової структури багаторічних коливань стоку та районування територій за характером цих коливань, дозволили установити зв'язок між першими базисними функціями розкладання полів стоку за ПОФ та відповідними базисними функціями кліматичних характеристик (температури повітря, тиск, опади). Це дозволило зробити висновки про те, що структура полів кліматичних характеристик та полів стоку визначається одними й тими ж фізичними процесами, якими є атмосферні процеси. При аналізі річного стоку першій компоненті розкладання гідрометеорологічних полів за ПОФ відповідають глобальні атмосферні процеси, другій та третій – процеси синоптичного масштабу. Як правило, перші компоненти розкладання полів гідрометеорологічних величин є математичним представленням впливу на їх формування процесів атмосферної циркуляції. Чим більший порядок компоненти, тим менший масштаб процесу, який вона відображує. Так, водогосподарські перетворення у межах водозборів є процесами мезо- та мікромасштабу, отже їх вплив на формування полів стоку проявляється на рівні четвертої або п'ятої компонент (Лобода,2005).

Як правило перший, найбільш значущий атмосферний процес, якій відповідає першій компоненті розкладання за ПОФ, приводить до одночасного зменшення або збільшення стоку на всіх річках, які розглядаються. Вагове навантаження на першу компоненту зберігає знак, що може розглядатися як показник синфазності коливань стоку.

Синфазність та асинфазність – це однаковий або протилежний хід коливань водності у групах років.

Синхронність та асинхронність – однаковий або протилежний хід водності по рокам.

Зміна знаку базисної функції показує, що наслідки впливу другого за значимістю атмосферного процесу на формування стоку по обидві сторони від нульової ізолінії коливаються у протифазі. Щоб зрозуміти, як атмосферні процеси впливають на клімат, розглянемо такий атмосферний процес як Північне Атлантичне Коливання (ПАК). ПАК одночасно викликає сухість клімату південно-східної Європи та підвищену вологість у Скандинавії у роки, коли індекс (кількісна характеристика) цього коливання має позитивне значення, й , навпаки, коли індекс ПАК приймає від'ємні значення, у південно-східній Європі спостерігається підвищена зволоженість, а у Скандинавії – підвищена сухість. Оскільки Північне Атлантичне Коливання є проявом процесу атмосферної циркуляції і його коливання викликають зміни клімату, то воно може бути причиною відповідних змін у коливаннях стоку.

7.4. За даними розкладання полів річного стоку по ПОФ виділити райони з синхронними коливаннями стоку (приклад)

Вихідні дані. Аналізується кореляційна матриця, побудована для 20-ти рядів річного стоку басейну р.Уссурі за період сумісних спостережень, починаючи з 1960 року й закінчуючи 1986 роком, тобто довжина розглянутих рядів становить 27 років. Басейн р.Уссурі знаходиться у зоні дії повітряних течій східно-азиатської мусоної системи (Л.Д. Гончарова, Е.М. Серга, Є.П. Школьний, 2005). У північній частині переважає дія мусона помірних широт, у південній – субтропічних. Зона мусону помірних широт розташовується між 45° *пн.ш.* та 65° *пн.ш.*

Отримані результати. Внесок перших компонент у загальну дисперсію вихідних даних дорівнює: 63% для першої компоненти, 20% - для другої та 5% - для третьої (*Лобода Н.С., Нгуєн Ву Ань, 2006*). Внесок перших двох компонент становить 83%, а перших трьох- 88%. Отже, перших двох компонент достатньо для описування статистичної структури усього поля даних.

Аналіз результатів. Оскільки для виявлення просторових закономірностей зміни базисних функцій перших компонент розкладання за природними ортогональними функціями необхідні дані про координати центрів тяжіння водозборів, досліджуваний водозбір був вкритий координатною "сіткою" й положення центрів тяжіння було представлене у вигляді умовних координат (рис.7.1). Знак вагових коефіцієнтів першої компоненти розкладання не змінюється (табл.7.1), що інтерпретується як однорідний вплив найбільш масштабного фізичного процесу на формування полів річного стоку.

Зазвичай, перша компонента розкладання розглядається як статистичне відображення дії атмосферних процесів глобального масштабу. Вагові коефіцієнти другої компоненти змінюють знак, що у літературних джерелах (*Д.Л.Смірнов, В.Л. Скляренко,1986*) інтерпретується як існування різниці у закономірностях коливань характеристик стоку на різних ділянках території, обумовленої процесами синоптичного масштабу.

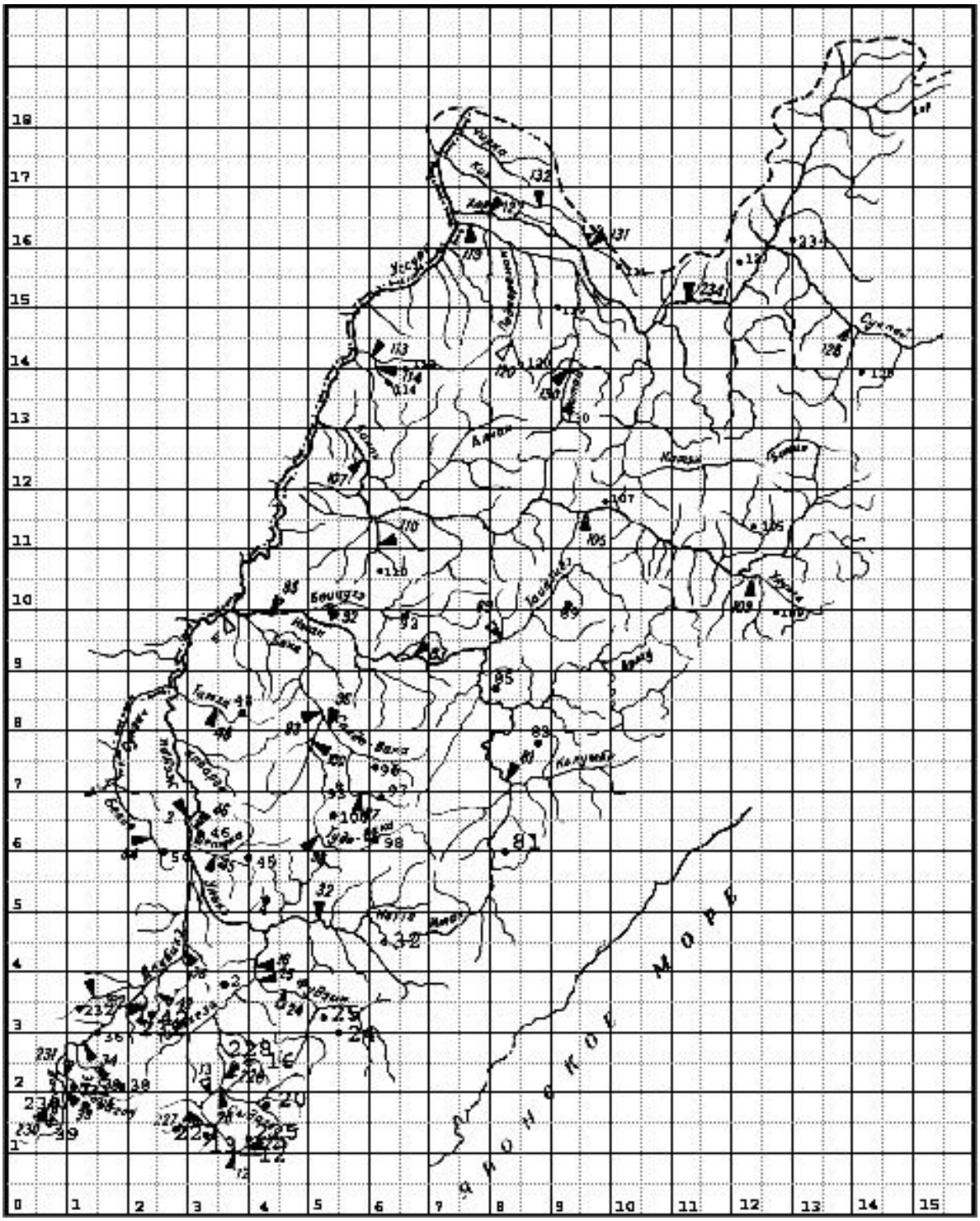

Рис. 7.1 - Координатна сітка, гидрологічні пости та центри тяжіння водозборів для басейну р.Уссурі

Таблиця 7.1- Значення перших базисних функцій рокладання полів річного стоку у басейні р.Уссурі

Номер за картою	Річка –пост	U_1	U_2	U_3
2	р.Уссурі-пос.Кировський	0,2582	0.2184	0,0398
12	р.Улахе-с.Березняки	0,2587	0.2592	0,4140
20	р.Сидагоу-с.Извілінка	0,2208	0,2684	0,3047
25	р.Фудзін-с.Уборка	0,2566	0,2193	0,1200
36	р.Даубіхе-с.Яковлівка	0,2266	0,2933	-0,0678
42	р.Хоніхеза-с.Варфоломєєвка	0,2465	0,2414	0,0768
45	р.Шетуха-с.Криловка	0,2359	0,1001	-0,3672
48	р.Тамга-с.Тамга	0,2446	0,0027	-0,3074
83	р.Іман-с.Картун	0,2317	-0,0645	-0,1489
85	р. Іман-пос. Вагутон	0,2406	-0,0745	-0,1916
89	р.Сібічі-с. Сібічі	0,2078	-0,2371	-0,1818
93	р.Вака-с.Ракітне	0,1819	0,0402	-0,2741
98	р.Тудо-Вака-с.Аріадне	0,2067	0,0836	-0,3054
107	р.Бікін-ст.Звєньєва	0,2290	-0,2414	0,0145
114	р.Горбун-с.Пушкіно	0,1943	-0.3282	0,1602
119	р.Подхорьонок-с.Дормідонтівка	0,1914	-0,3282	0,1762
120	р.Правий Подхорьонок – лзу. Медвежий Ключ	0,2159	-0,3268	0,1797
128	р.Сукпай-мет.ст.Сукпай	0,2337	-0,2188	0,2627

продовження табл.7.1

131	р.Кія-с.Марусіно	0,2038	-0,3472	0,1932
204	р.Каменка-пос. Каменський	0,1548	0,2030	0,1436

Інакше кажучи, другий за значущістю фізичний процес обумовлює прояв несинхронності у коливаннях характеристик стоку. **Нульова ізолінія базисної функції розглядається як лінія розділу між районами**

з синхронними чи синфазними коливаннями стоку і поділяє територію водозбору р. Уссурі навпіл (рис.7.2).

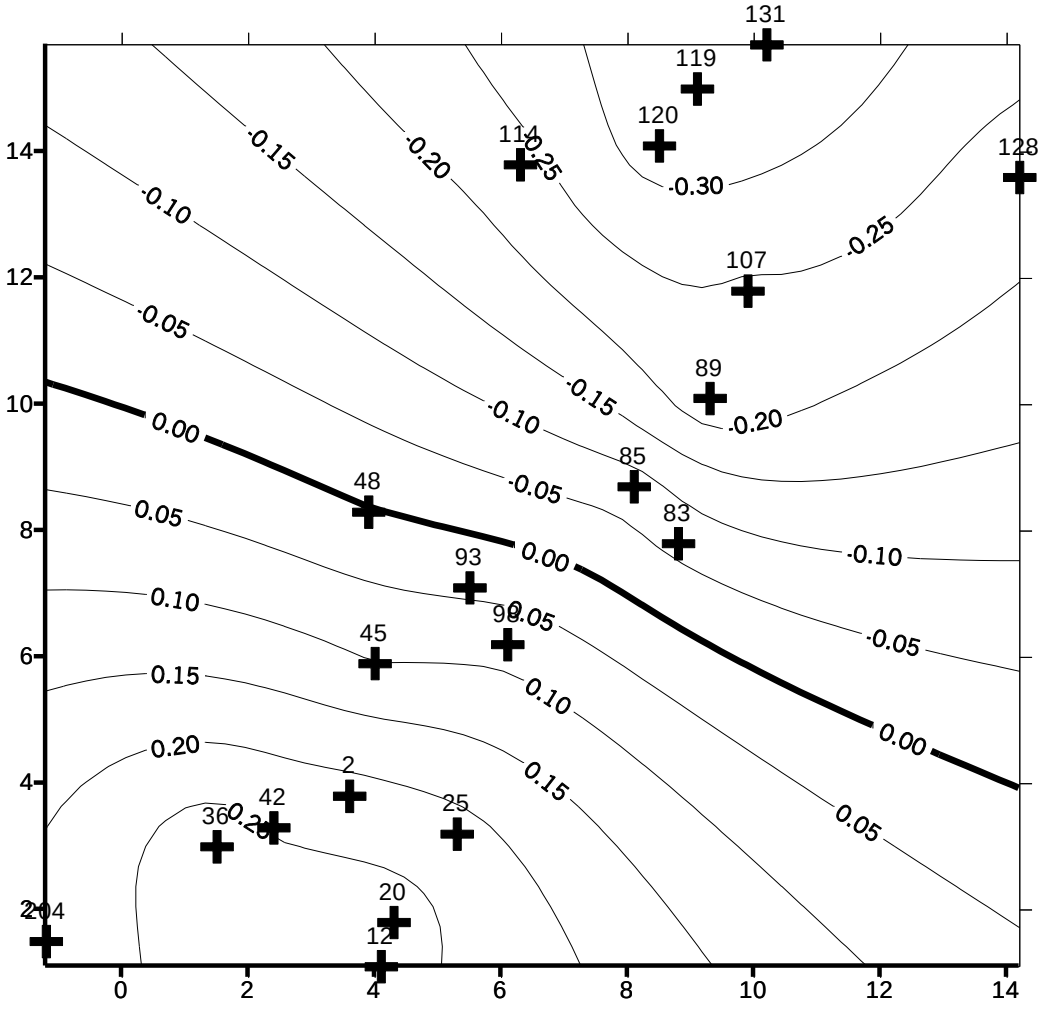

Рис.7.2 Схема розподілу U_2 у басейні р.Уссурі
(+ - центри тяжіння водозборів)

Різницю у коливаннях стоку між північчю та півднем можна пояснити тим, що південна частина басейну р.Уссурі знаходиться у області дії субтропічних мусонів, а північна - в області впливу мусонів помірних широт. Тобто другий за значимістю фізичний процес інтерпретується як атмосферний процес синоптичного масштабу.

Правильність прийнятих рішень щодо районування за синхронністю підтверджується підрахунками осередненого у просторі коефіцієнта кореляції, який для усього басейну р.Уссурі дорівнює 0,52, для района 1 – 0,77 та для района 2 – 0,79.

ВИРІШЕННЯ ЗАДАЧ ФІЛЬТРАЦІЇ ГІДРОЕКОЛОГІЧНОЇ ІНФОРМАЦІЇ

7.4. Загальні положення

Мета та задачі

При вивченні розділу дисципліни „Методи просторового узагальнення гідрологічної інформації", який має назву „Метод головних компонент у гідрологічних розрахунках", студенти повинні отримати вміння та знання щодо можливості фільтрації вихідної інформації.

Метою методичних вказівок є закріплення студентами знань при вивченні теми "Задача фільтрації вихідної інформації за методом головних компонент" у теоретичному розділі "**Узагальнення інформації за методами багатовимірного статистичного аналізу".**

Задача методичних вказівок – вироблення практичних навичок при застосуванні методу головних компонент до фільтрації полів стоку.

У результаті вивчення теми „ Задача фільтрації вихідної інформації за методом головних компонент " студенти повинні:

знати

- теоретичне вирішення задачі переходу від перших компонент до згладженого ряду досліджуваної величини;

вміти

- розраховувати ряди стоку на основі даних про перші компоненти розкладання за ПОФ.

Згідно з програмою дисципліни „Методи просторового узагальнення гідрологічної інформації" на вивчення теми „Задача фільтрації вихідної інформації за методом головних компонент" відведено 8 годин лекційного курсу та 8 годин практичних занять.

До модульного контролю виконання практичних робіт входять відповіді на такі питання.

7.5 Теоретичні положення

Гідрометеорологічні поля формуються під дією атмосферних процесів різного масштабу: макропроцесів, пов'язаних із планетарними рухами мас повітря; процесів, обумовлених атмосферною циркуляцією (синоптичними процесами); процесів мезомасштабу, а також дрібномасштабних флуктуацій, пов'язаних з погрішностями вимірів та недоліками первинної обробки результатів спостережень. При необхідності виключити вплив малоінформативних фізичних процесів на формування гідрометеорологічних полів використовують математичний апарат, вже викладений в завданні 1, роблячи зворотний перехід від компонентів до значень досліджуваної величини.

Будь-який елемент матриці вихідних центрованих та нормованих значень φ_{ij} (на i -тім розглянутім об'єкті в j - тий момент часу) може бути розрахований, якщо проблему власних векторів вирішено

$$\varphi_{ij} = \sum_{k=1}^{m} U_{ki} z_{kj}, \text{ при } i = \overline{1,m}; j = \overline{1,n}, \qquad (7.1)$$

де φ_{ij} - складові j -того випадкового вектора (поля) центрованих та нормованих вихідних даних, яке підлягало розкладанню за природними ортогональними функціями;

U_{ki} - вагові коефіцієнти, які відображають внесок i -того об'єкта в кожну k -ту компоненту або складові власних векторів матриці кореляцій;

z_{kj} - складові k -тої компоненти розкладання;

m - число об'єктів;

n - довжина вихідних рядів.

Складові вектора-рядка матриці компонентів Z [z_{k1} z_{k2} · · z_{kp} · · · z_{kn}] ***можуть бути представлені як функції часу і мають назву амплітудних функцій. Амплітудні функції є загальними для всіх об'єктів, вони не залежать від координат і є функціями часу***

$$z_{kj} = f(t) = z_k(t). \qquad (7.2)$$

Щоб мати краще уявлення про амплітудну функцію, розглянемо хронологічний графік першої амплітудної функції розкладання полів річного стоку річок України, а також близько розташованих річок Центральної та Південної Європи (рис.7.1). Цей хронологічний графік відображає характер коливання стоку річок, який формується під впливом найбільш великомасштабного фізичного процесу.

Для інтерпретації фізичного змісту перших компонент розкладання виконують пошук зв'яків між першими амплітудними функціями та індексами процесів атмосферної циркуляції. Наприклад, установлено, що перша амплітудна функція полів річного стоку Центральної та Південної Європи зв'язана з індексом атмосферної циркуляції, який характеризує Арктичне коливання (рис.7.2). Цей індекс визначається за полями тиску Північної Півкулі (20^o-90^o півн.ш.) у зимовий сезон (грудень-березень).

Розв'язання задачі фільтрації вихідної інформації полягає у розрахунках досліджуваної величини на основі тільки перших компонент розкладання поля за ПОФ. Як вже відмічалося, перші компоненти містять у собі основну частку всієї вихідної інформації. Отримане зворотним розрахунком поле вихідних даних є згладженим,

оскільки відображає головні особливості просторово-часового розподілу досліджуваної величини.

При розгляді тільки перших компонентів розкладання, в яких утримується основна частина інформації вихідних полів, вираз (7.1) перетворюється до виду

$$\tilde{\varphi}_{ij} = \sum_{k=1}^{p} U_{ki} z_{kj}, \text{ при } i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n} \tag{7.3}$$

де $\tilde{\varphi}_{ij}$ - відфільтровані або згладжені значення центрованих та нормованих величин стоку;

p - число перших компонентів.

Матрична форма запису (7.3) має вигляд

$$\tilde{\varphi}_i = U \cdot \tilde{Z}_i, \tag{7.4}$$

де $\tilde{\varphi}_i$ - відфільтрований вектор або поле центрованих та нормованих значень вихідної величини;

U - матриця власних векторів;

$\tilde{Z}_i$ - відфільтрований вектор компонент.

$z_1(t)$

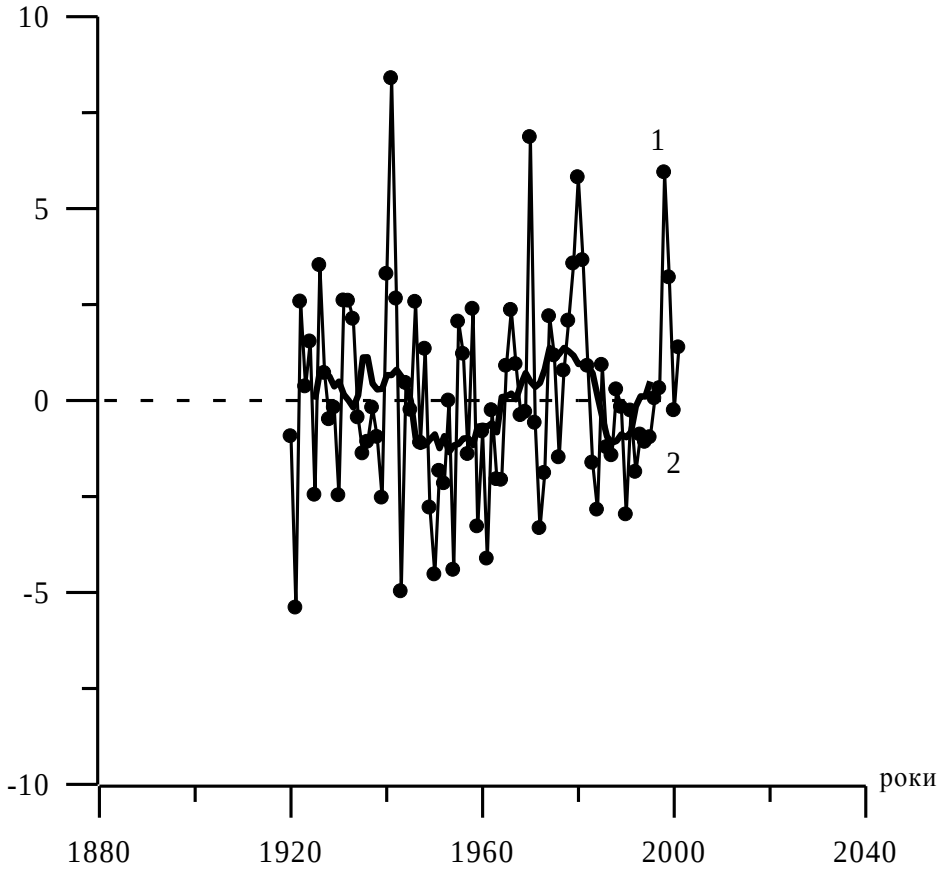

Рис. 7.3 Перша амплітудна функція коливань полів річного стоку річок України та Центральної й Південної Європи

1- хронологічний хід;2 - згладжений за 11-річками ряд

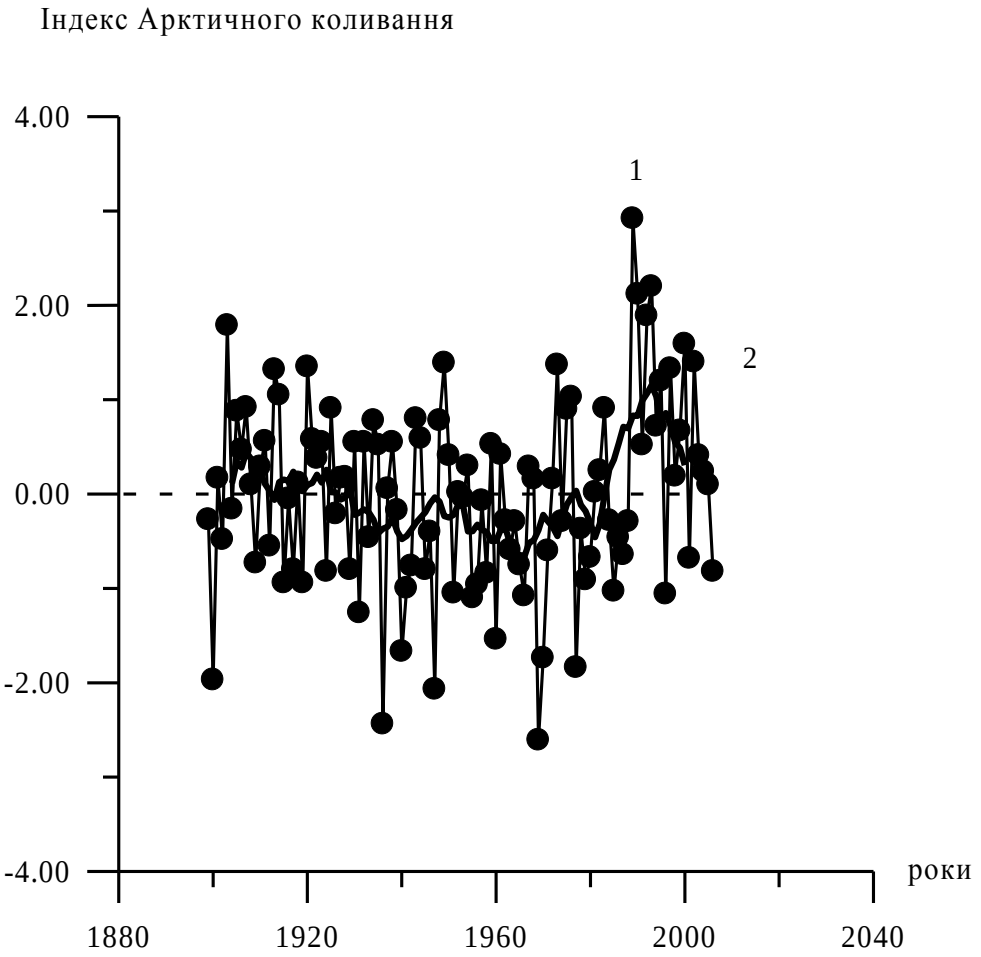

Рис.7.4. – Індекс Арктичного коливання (грудень-березень)

1-хронологічний хід;
2- згладжений за 11-річками ряд

Перехід до величини $\tilde{x}_{ij}$ здійснюється за виразом

$$\tilde{x}_{ij} = \bar{x}_i + \sigma_i \sum_{k=1}^{p} U_{ki} \tilde{z}_{kj} \text{ ; при } i = \overline{1,m}; \; j = \overline{1,n} \qquad (7.5)$$

або

$$\tilde{x}_{ij} = \bar{x}_i + \sum_{k=1}^{p} w_{ki} z_{kj} \text{ ; при } i = \overline{1,m}; \; j = \overline{1,n} \qquad (7.6)$$

де $\bar{x}_i$ - середнє арифметичне значення вихідного ряду;

σ_i - середнє квадратичне відхилення вихідного ряду;

φ_{ki} - вагові коефіцієнти k -тої компоненти розкладання матриці коваріацій за ПОФ.

w_{ki} - вагові коефіцієнти k -тої компоненти розкладання матриці коваріацій за ПОФ.

В задачі фільтрації інформації вихідну інформацію треба звільнити від дрібномасштабних збурень. Цієї мети можна досягти, якщо всі складові k -тої компоненти від $p+1$ до m прирівняти до нуля, тоді k -а компонента представляється у вигляді

$$\tilde{Z}_j = \begin{pmatrix} Z_{1j} \\ Z_{2j} \\ Z_{3j} \\ . \\ . \\ Z_{pj} \\ 0 \\ . \\ . \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (7.7)$$

7.6 Виконати фільтрацію рядів стоку за першими компонентами (приклад)

Вихідні дані - результаті розкладання полів річного стоку за природними ортогональними функціями. Розглянуто матрицю коваріацій річного стоку для 9 гідрологічних станцій. Тривалість спостережень для кожного ряду дорівнює n.

Отримані результати. Установлено, що перші дві компоненти розкладання описують 80% вихідної інформації.

Задача: Отримати відфільтровані дані для четвертого ряду спостережень.

Матриця базисних функцій виглядає наступним чином

$$W = \begin{pmatrix} W_{11} & W_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & W_{1p} & \cdot & \cdot & \cdot & W_{19} \\ W_{21} & W_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & W_{2p2} & \cdot & \cdot & \cdot & W_{29} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ W_{p1} & W_{p2} & \cdot & \cdot & \cdot & W_{pp} & \cdot & \cdot & \cdot & W_{p9} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ W_{91} & W_{92} & \cdot & \cdot & \cdot & W_{9p} & \cdot & \cdot & \cdot & W_{99} \end{pmatrix}. \quad (7.8)$$

Матриця амплітудних функцій має вигляд

$$Z = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & z_{1p} & \cdot & \cdot & \cdot & z_{1n} \\ z_{21} & z_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & z_{2p2} & \cdot & \cdot & \cdot & z_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ z_{p1} & z_{p2} & \cdot & \cdot & \cdot & z_{pp} & \cdot & \cdot & \cdot & z_{pn} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ z_{91} & z_{92} & \cdot & \cdot & \cdot & z_{9p} & \cdot & \cdot & \cdot & z_{9n} \end{pmatrix}. \quad (7.9)$$

Щоб отримати матрицю вихідних даних, представлених у центрованому виді, необхідно виконати скалярне множення матриць за виразом наступного виду

$$W\tilde{Z} = \Delta\tilde{X}, \quad (7.10)$$

або

$$U\tilde{Z} = \tilde{\varphi}, \quad (7.11)$$

де $\tilde{Z}$ - матриця, у якій виконано фільтрацію компонент згідно із (7.7);

$\Delta\tilde{X}$ - матриця згладжених даних, представлених у вигляді центрованих величин;

$\tilde{\varphi}$ - матриця згладжених даних, представлених у вигляді центрованих та нормованих величин.

Операцію фільтрації виконати іншим чином. Оскільки головні компоненти є результатом ортогонального перетворення поля першими p власними векторами, а останні ($m-p$) компоненти характеризують інформацію, від якої треба звільнитися, то поставлену мету можна досягти, використовуючи матрицю $\tilde{W}$

$$\tilde{W}=\begin{pmatrix} W_{11} & W_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & W_{1p} & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ W_{21} & W_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & W_{2p2} & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ W_{p1} & W_{p2} & \cdot & \cdot & \cdot & W_{pp} & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ W_{91} & W_{92} & \cdot & \cdot & \cdot & W_{9p} & 0 & \cdot & \cdot & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.12)$$

Оскільки у даному прикладі головна інформація міститься тільки у двох перших компонентах, для отримання згладжених рядів амплітудні функції, починаючи з 3-ої і закінчуючи 9-тою, представляємо, як нульові згідно з (7.7)

$$\begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} & W_{13} & W_{14} & W_{15} & W_{16} & W_{17} & W_{18} & W_{19} \\ W_{21} & W_{22} & W_{23} & W_{24} & W_{25} & W_{26} & W_{27} & W_{28} & W_{29} \\ W_{31} & W_{32} & W_{33} & W_{34} & W_{35} & W_{36} & W_{37} & W_{38} & W_{39} \\ W_{41} & W_{42} & W_{43} & W_{44} & W_{45} & W_{46} & W_{47} & W_{48} & W_{49} \\ W_{51} & W_{52} & W_{53} & W_{54} & W_{55} & W_{56} & W_{57} & W_{58} & W_{59} \\ W_{61} & W_{62} & W_{63} & W_{64} & W_{65} & W_{66} & W_{67} & W_{68} & W_{69} \\ W_{71} & W_{71} & W_{72} & W_{73} & W_{74} & W_{75} & W_{76} & W_{77} & W_{78} \\ W_{81} & W_{82} & W_{83} & W_{84} & W_{85} & W_{86} & W_{87} & W_{88} & W_{89} \\ W_{91} & W_{92} & W_{93} & W_{94} & W_{95} & W_{96} & W_{97} & W_{98} & W_{99} \end{bmatrix} \cdot$$

$$\cdot \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} & z_{13} & \dots & z_{1n} \\ z_{21} & z_{22} & z_{23} & \dots & z_{2n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \Delta\tilde{X}_{11} & \Delta\tilde{X}_{12} & \Delta\tilde{X}_{13} & \dots & \Delta\tilde{X}_{1n} \\ \Delta\tilde{X}_{21} & \Delta\tilde{X}_{22} & \Delta\tilde{X}_{23} & \dots & \Delta\tilde{X}_{2n} \\ \Delta\tilde{X}_{31} & \Delta\tilde{X}_{32} & \Delta\tilde{X}_{32} & \dots & \Delta\tilde{X}_{3n} \\ \Delta\tilde{X}_{41} & \Delta\tilde{X}_{42} & \Delta\tilde{X}_{43} & \dots & \Delta\tilde{X}_{4n} \\ \Delta\tilde{X}_{51} & \Delta\tilde{X}_{52} & \Delta\tilde{X}_{53} & \dots & \Delta\tilde{X}_{5n} \\ \Delta\tilde{X}_{61} & \Delta\tilde{X}_{62} & \Delta\tilde{X}_{63} & \dots & \Delta\tilde{X}_{6n} \\ \Delta\tilde{X}_{71} & \Delta\tilde{X}_{72} & \Delta\tilde{X}_{73} & \dots & \Delta\tilde{X}_{7n} \\ \Delta\tilde{X}_{81} & \Delta\tilde{X}_{82} & \Delta\tilde{X}_{83} & \dots & \Delta\tilde{X}_{8n} \\ \Delta\tilde{X}_{91} & \Delta\tilde{X}_{92} & \Delta\tilde{X}_{93} & \dots & \Delta\tilde{X}_{9n} \end{bmatrix}, \quad (7.13)$$

звідки

$$\Delta\tilde{X}_{41} = W_{41}z_{11} + W_{42}z_{12} + W_{43} \cdot 0 + W_{45} \cdot 0 + W_{46} \cdot 0 + W_{47} \cdot 0 + \\ + W_{48} \cdot 0 + W_{49} \cdot 0 = W_{41}z_{11} + W_{42}z_{12} \quad ; \quad (7.14)$$

або

$$\Delta\tilde{X}_{42} = W_{41}z_{12} + W_{42}z_{22}; \quad (7.15)$$

$$\Delta\tilde{X}_{43} = W_{41}z_{13} + W_{42}z_{23}; \quad (7.16)$$

$$\Delta\tilde{X}_{44} = W_{41}z_{14} + W_{42}z_{24}; \quad (7.17)$$

$$\Delta\tilde{X}_{45} = W_{41}z_{15} + W_{42}z_{25}; \quad (7.18)$$

$$\Delta\tilde{X}_{46} = W_{41}z_{16} + W_{42}z_{26}\ ; \quad (7.19)$$

$$\Delta\tilde{X}_{47} = W_{41}z_{17} + W_{42}z_{27}; \quad (7.20)$$

$$\Delta\tilde{X}_{48} = W_{41}z_{18} + W_{42}z_{28}; \quad (7.21)$$

$$\Delta\tilde{X}_{49} = W_{41}z_{19} + W_{42}z_{29}. \quad (7.22)$$

Перехід до величини згладженої величини $\tilde{x}_{ij}$ виконується за виразом

$$\tilde{x}_{ij} = \bar{x}_i + \Delta\tilde{X}_{ij}, \quad (7.23)$$

де $\bar{x}$ - середня арифметична величина ряду i.

Прикладне застосування фільтрації рядів дозволяє представити процес стоку у вигляді згладженого хронологічного ряду, який відображає властивості тільки тих компонент, а, отже, й відповідних їм фізичних процесів різних масштабів, які були застосовані при фільтрації. При цьому використовуються амплітудні функції (компоненти) і вагові коефіцієнти (значення власних векторів матриці кореляцій або коваріацій) перших складових розкладання, а також середні арифметичні значення.

Рівняння (7.23) було використане автором для розрахунків рядів природного (непорушеного водогосподарською діяльністю) річного стоку Причорноморської низовини (Лобода Н.С.,2005). Норма річного кліматичного (розрахованого за рівнянням водно-теплового балансу) стоку розглядалася як середня багаторічна величина природного стоку $\bar{x}_i$, а вагові коефіцієнти перших трьох компонент розкладання визначалися за показниками кліматичних факторів (7.16-7.18) – максимально можливого випаровування та опадів. Запропонований підхід дозволяє відновлювати хронологічні ряди природного стоку невивчених річок за рівнянням

(7.23). При цьому використовуються амплітудні функції z_{kj} перших компонент, які є загальними для усіх водозборів розглядуваного регіону та вагові коефіцієнти розкладання W_{ki} , які визначаються за вказаними регресійними рівняннями в залежності від кліматичних факторів й не підлягають впливу водогосподарських перетворень (рис.7.3).

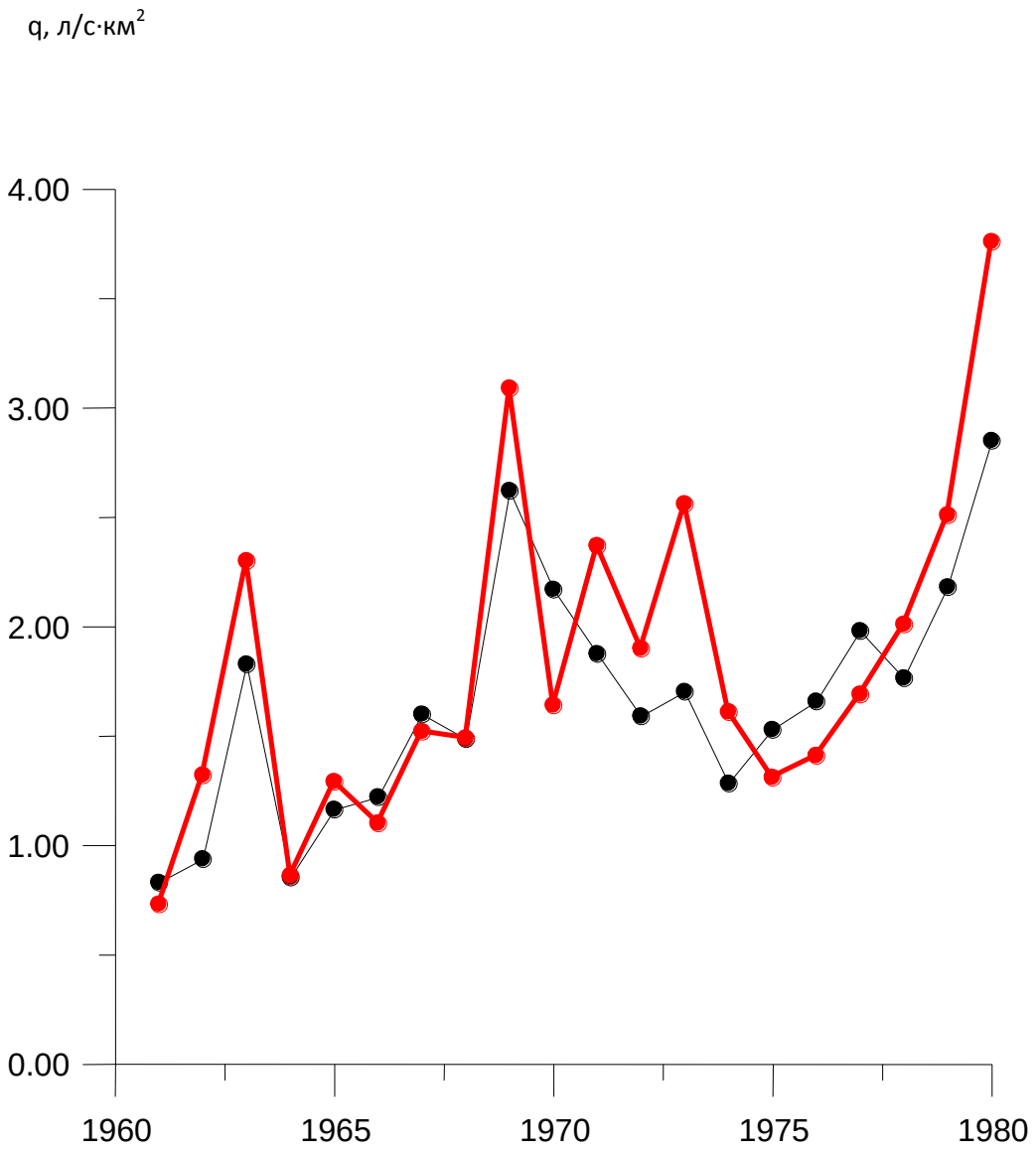

Рис.3.3. Порівняння спостереженого (нижня крива) та відновленого (верхня крива) за трьома компонентами ряду річного стоку р.Когільник

Вихідні дані

Варіант 1

Розглянуто матрицю коваріацій річного стоку для 10 гідрологічних станцій. Тривалість спостережень для кожного ряду дорівнює n.

Отримані результати. Установлено, що перші дві компоненти розкладання описують 82% вихідної інформації.

Задача: Отримати відфільтровані дані для третього ряду спостережень.

(Виконувати аналогічно за прикладом (дивись п.7.6)).

Варіант 2

Розглянуто матрицю коваріацій річного стоку для 8 гідрологічних станцій. Тривалість спостережень для кожного ряду дорівнює n.

Отримані результати. Установлено, що перші дві компоненти розкладання описують 72% вихідної інформації.

Задача: Отримати відфільтровані дані для п’ятого ряду спостережень.

(Виконувати аналогічно за прикладом (дивись п.7.6)).

Варіант 3

Розглянуто матрицю коваріацій річного стоку для 9 гідрологічних станцій. Тривалість спостережень для кожного ряду дорівнює n.

Отримані результати. Установлено, що перші дві компоненти розкладання описують 78% вихідної інформації.

Задача: Отримати відфільтровані дані для шостого ряду спостережень.

(Виконувати аналогічно за прикладом (дивись п.7.6)).