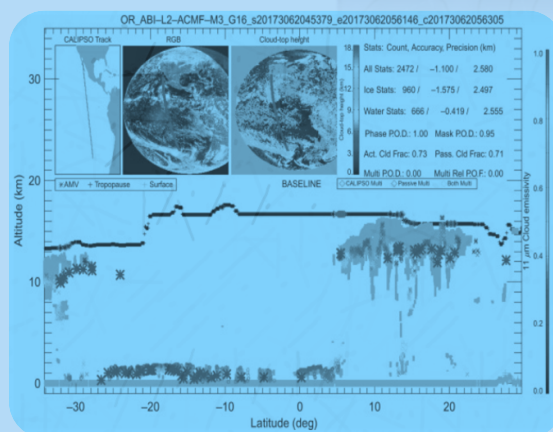
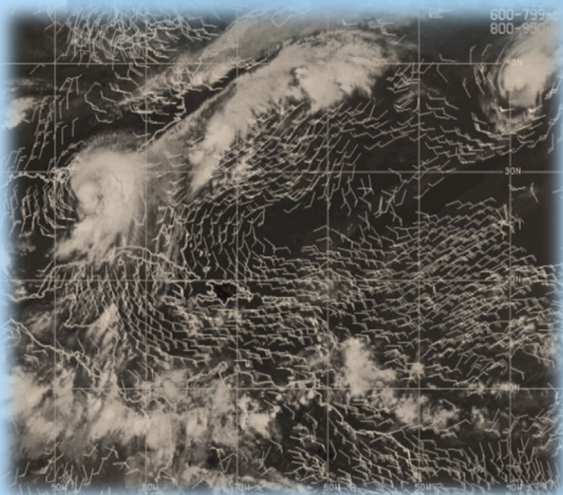
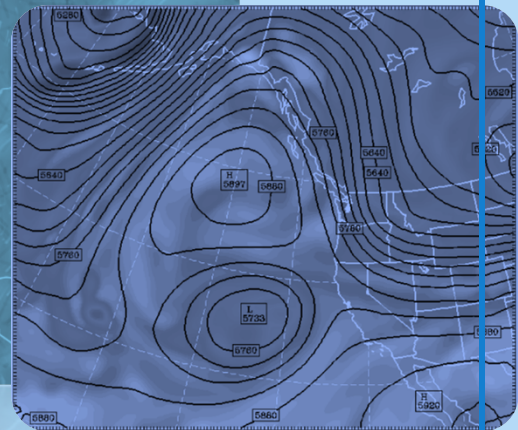
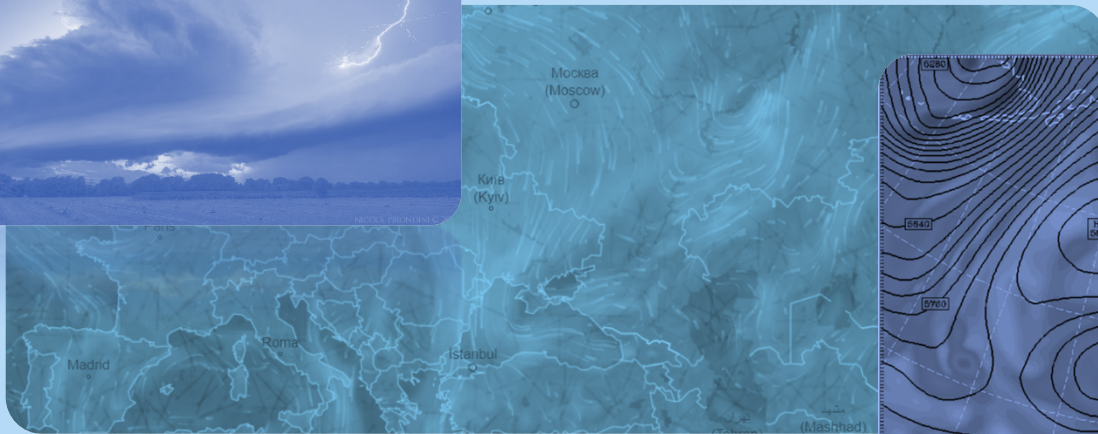


Хоменко І.А.

# ДИНАМІЧНА МЕТЕОРОЛОГІЯ

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ



**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
ОДЕСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ЕКОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ**

**Хоменко І.А.**

# **ДИНАМІЧНА МЕТЕОРОЛОГІЯ**

**Конспект лекцій**

Одеса

Одеський державний екологічний університет

2021

УДК 551.511

X 76

**Хоменко І. А.**

**X 76** Динамічна метеорологія: конспект лекцій. Одеса : Одеський державний екологічний університет, 2021. 97 с.

ISBN 978-966-186-184-7

Конспект лекцій з дисципліни “Динамічна метеорологія” призначений для студентів третього року навчання, рівня вищої освіти «бакалавр» за спеціальністю «Науки про Землю».

Конспект присвячено фундаментальним питанням теоретичної метеорології, а саме: система рівнянь гідротермодинаміки, динаміка вільної атмосфери, хвильові атмосферні рухи і динаміка граничного шару атмосфери.

В конспекті велика увага приділяється фізичному аналізу рівнянь і побудові на їх основі моделей (геострофічного, градієнтного, термічного вітру, і розподілу вітру в граничному шарі атмосфери), які досить добре описують реальні атмосферні рухи.

Зокрема, особлива увага приділяється аналізу рівняння перенесення вихору швидкості вітру, на основі якого визначаються фактори, що обумовлюють виникнення і визначають еволюцію баричних утворень в атмосфері.

Детально розглядаються великомасштабні хвилі, відповідальні за процеси, що формують погодні умови над великими територіями.

**УДК 551.511**

*Рекомендовано методичною радою Одеського державного екологічного університету Міністерства освіти і науки України як конспект лекцій (протокол №4 від 26.11. 2021 р.)*

ISBN 978-966-186-184-7

© І. А. Хоменко, 2021

© Одеський державний екологічний університет, 2021

## Зміст

Вступ.....	5
1 Методи математичного опису стану атмосфери. Основні рівняння гідродинаміки.....	7
1.1 Суцільне середовище і методи його опису.....	7
1.1.1 Властивості рідин .....	7
1.1.2 Специфічні особливості об'єктів динамічної метеорології	8
1.1.3 Скалярні та векторні поля. Числова індексація координат та проєкцій векторів.....	9
1.1.4 Оператор Гамільтона та операції з ним.....	10
1.1.5 Градієнт поля скалярної величини.....	12
1.1.6 Метод сіток. Скінченнорізницева апроксимація похідних	14
1.2 Методи опису руху рідини: метод Ейлера та метод Лагранжа.....	17
1.2.1 Індивідуальна, локальна та конвективна похідні.....	19
1.2.2 Прискорення частинки рідини. Локальна та конвективна складова прискорення. Повне прискорення.....	21
1.3 Рівняння руху у векторній формі для атмосфери. Сили, які діють в атмосфері.....	23
1.3.1 Динаміка ідеальної рідини в інерціальній (необертовій) системі відліку.....	23
1.3.2 Сила земного притягання.....	24
1.3.3 Сила баричного градієнту.....	24
1.3.4 Різниця між прискореннями в необертовій та обертовій системах відліку.....	26
1.3.5 Сила тяжіння.....	28
1.3.6 Сила Коріоліса.....	29
1.3.7 Сила в'язкості.....	30
1.4 Рівняння руху у декартовій системі координат.....	32
1.5 Рівняння припливу тепла і нерозривності.....	34
1.6 Рівняння вихору вектору швидкості вітру.....	40
1.6.1 Фізичне тлумачення вихору та дивергенції.....	40
1.6.2 Рівняння вихору.....	45
1.7 Питання для самоперевірки.....	50
2 Динаміка вільної атмосфери.....	51
2.1 Спрощення системи рівнянь гідротермодинаміки атмосфери.....	51
2.2 Вітер у вільній атмосфері.....	53
2.2.1 Градієнтний вітер.....	53
2.2.2 Геострофічний вітер.....	55
2.2.3 Зв'язок між швидкостями геострофічного та градієнтного вітрів.....	59

2.2.4	Наближені формули для градієнтного вітру при кругових ізобарах.....	60
2.3	Термічний вітер.....	62
2.4	Зміна геострофічного вітру з висотою в залежності від розташування термічного і баричного градієнтів.....	68
2.5	Зміна градієнтного вітру в циклонах та антициклонах з висотою..	70
2.6	Відхилення вітру від геострофічного. Агеострофічні відхилення..	72
2.7	Геострофічна адвекція температури.....	75
2.8	Вплив агеострофічних відхилень на розвиток вертикальних рухів	78
2.9	Питання для самоперевірки.....	81
3	Хвильові рухи в атмосфері.....	82
3.1	Класифікація хвильових рухів в атмосфері.....	82
3.2	Хвилі Россбі.....	86
3.3	Питання для самоперевірки.....	93
4	Фізика граничного шару атмосфери.....	94
4.1	Поняття ламінарного і турбулентного потоку. Критерій переходу з одного стану до іншого.....	94
4.2	Система рівнянь гідротермодинаміки для турбулентної атмосфери.....	95
4.2.1	Методика осереднення рівнянь гідротермодинаміки. Правила осереднення.....	95
4.2.2	Осереднені рівняння гідротермодинаміки для турбулентного середовища.....	98
4.3	Замикання системи рівнянь гідротермодинаміки для турбулентного середовища.....	107
4.4	Рівняння балансу кінетичної енергії турбулентних вихорів.....	111
4.5	Граничний шар атмосфери.....	115
4.6	Питання для самоперевірки.....	119
	Перелік посилань.....	121
	Додаток А.....	122

## ВСТУП

Даний конспект лекцій складений відповідно до навчальної програми з дисципліни «Динамічна метеорологія», яка викладається студентам Гідрометеорологічного інституту ОДЕКУ третього року навчання, рівня вищої освіти «бакалавр» за спеціальністю «Науки про Землю».

Оскільки динамічна метеорологія являє собою науку, яка займається дослідженням атмосферних процесів і явищ математичними методами, курс лекцій базується на знаннях, отриманих студентами в дисциплінах «Фізика атмосфери», «Гідромеханіка», «Вища математичка», «Фізика». В свою чергу отримані в цій дисципліні знання необхідні в подальшому для вивчення таких дисциплін як «Синоптична метеорологія», «Регіональна синоптика».

Конспект лекцій складається з чотирьох розділів. В першому – формулюється система рівнянь гідротермодинаміки, яка є основою побудови математичних моделей атмосферних процесів, що суттєво впливають на формування погодних умов. Значна увага приділяється силам, діючим в атмосфері, впливу добового обертання Землі на рухи повітря та впливу на них підстильної поверхні. Виводяться рівняння, руху, нерозривності та припливу тепла і акцентується увага студентів на тому, що система рівнянь є математичним записом законів збереження (руху, маси та енергії), які використовуються в реальній атмосфері.

У другому розділі розглядаються питання щодо великомасштабних рухів у вільній атмосфері. На основі рівнянь руху будуються моделі градієнтного і геострофічного вітру, а також термічного вітру, проводиться детальний фізичний аналіз отриманих моделей і на прикладі осереднених полів тиску та температури на земній кулі демонструється добра узгодженість теоретичних (модельних) і реальних рухів. Розглядається також роль агеострофічних відхилень у формуванні макромасштабних вертикальних рухів, які суттєво впливають на інтенсивність зон опадів різного походження.

Третій розділ присвячено хвильовим процесам в атмосфері. Тут головним питанням є виведення і аналіз рівняння перенесення вихору швидкості вітру, яке є основою для розв'язання задачі про великомасштабні хвилі Россбі. Ці хвилі формують погодні умови над великими територіями і тому в гідродинамічному і синоптичному аналізі їм приділяється велика увага.

Для акустичних і гравітаційних хвиль наводяться лише результати фізичного аналізу розв'язків відповідних рівнянь для оцінки їх метеорологічної значущості. Оскільки в цьому розділі розглядається лінійна теорія хвиль, то викладено також метод малих збурень для приведення рівнянь до лінійного вигляду.

У четвертому розділі виводиться система рівнянь гідротермодинаміки для дослідження процесів у граничному шарі атмосфери (ГША), де велику роль відіграють сили турбулентної в'язкості. Система рівнянь для турбулентної атмосфери отримується за допомогою правил осереднення Рейнольдса. Розглядається найбільш фізичний метод замикання цієї системи з використанням К-теорії турбулентності (замикання першого порядку). На основі аналізу рівнянь руху отримано вертикальні профілі вітру в ГША. Без висновків наводяться рівняння балансу кінетичної енергії турбулентності і надається його аналіз.

# 1 МЕТОДИ МАТЕМАТИЧНОГО ОПИСУ СТАНУ АТМОСФЕРИ. ОСНОВНІ РІВНЯННЯ ГІДРОДИНАМІКИ АТМОСФЕРИ

## 1.1 Суцільне середовище і методи його опису

### 1.1.1 Властивості рідин

Оскільки в загальному випадку рух і газоподібних, і рідких середовищ здійснюється за одними й тими самими законами, то під рідиною в гідромеханіці розуміють і крапельні, і газоподібні середовища. Всім реальним рідинам притаманні такі властивості:

- суцільність;
- легка рухливість або плинність;
- стисливість;
- в'язкість;
- теплопровідність.

Молекули газу розділено пустотами з лінійними розмірами, які значно більші за самі молекули. Навіть в крапельній рідині, в якій молекули знаходяться на такий близький відстані, на якій тільки дозволяють сили відштовхування, масу сконцентровано в ядрах атомів та розподілено нерівномірно в просторі, який зайнято рідиною. Інші властивості рідини, наприклад склад або швидкість, також мають досить нерівномірний розподіл, коли рідина розглядається на таких малих масштабах, що виявляються окремі молекули. Проте, в динамічній метеорології розглядаються такі масштаби рідини, які набагато більшими розмірів молекул, тому можна вважати макроскопічну поведінку рідини однаковою, нібито їх структура є ідеально неперервною, а фізичні величини, наприклад масу та кількість руху, пов'язані з цією речовиною, будемо вважати рівномірно розподіленими в просторі, яку займає рідина. Таке середовище має назву суцільного.

Легка рухливість або плинність полягає в тому, що в більшості рідин внутрішнє тертя в середовищі відрізняється від нуля тільки за наявності відносного руху зсуву між шарами рідини. При відносному спокої внутрішнє тертя відсутнє.

На відміну від газів відстані між молекулами в крапельних рідинах дуже малі, що призводить до виникнення значних молекулярних сил зчеплення, які особливо інтенсивно виявляються на зовнішніх поверхнях, що відділяють цю рідину від інших рідин або газів. Під дією цих поверхневих сил крапельна рідина зазнає настільки сильного стиснення, що вплив малих змін тиску, які виникають при порівняно повільних рухах крапельної рідини, практично не позначається на зміні об'єму (стисненні)



крапельної рідини; виключенням є тільки процеси поширення підводних вибухів, гідравлічного удару тощо. Тому, на відміну від газів, крапельні рідини можна вважати малостисливими, а іноді й просто нестисливими.

В протилежність крапельним рідинам, в газах міжмолекулярні відстані великі, а сили взаємодії між молекулами є слабкими. При хаотичному тепловому русі молекули газу можуть вільно стикатись та розбігатись в будь-яких напрямках в просторі, яке заповнено газом (в крапельних рідинах тепловий рух молекул є також хаотичним, проте, має характер малих коливань відносно деяких центрів, що переміщуються в просторі).

В зв'язку з цим газам, ніж крапельним рідинам, в набагато більшій мірі притаманна стисливість. Проте, у випадку малих перепадів тиску, малих швидкостей та відсутності значних нагрівів газ також може вважатись нестисливим.

Стисливість, таким чином, не є тим, що притаманне одному середовищу та не має місця в іншому. Всі неперервні матеріальні середовища є стисливими, але ступінь їх стисливості залежить від динамічних та термодинамічних умов руху.

В'язкість та теплопровідність в рідинах виникають через те, що в будь-якій реальній рідині відбувається взаємодія між молекулами, тобто потенціальна енергія взаємодії молекул не дорівнює нулю. В'язкість – це властивість рідини здійснювати опір відносному руху (зсуву) частинок рідини. Ця властивість обумовлена виникненням в рідині, що рухається, сил внутрішнього тертя, бо вони виявляються тільки при її русі через наявність сил зчеплення між її молекулами. Характеристиками в'язкості є динамічний коефіцієнт в'язкості ( $\mu$ ) та кінематичний коефіцієнт в'язкості ( $\nu$ ).

Теплопровідність являє собою потік енергії молекул, коли температура розподілена нерівномірно. Умови, за яких відбувається перенесення теплової енергії є відомими з експерименту. Дві маси рідини, які розділено тонкою жорсткою стінкою, яка є проникною для тепла, знаходяться у тепловій рівновазі, якщо температура є однаковою для обох цих мас, а, якщо температури двох мас відрізняються, то існує деякий ненульовий потік тепла через стінку в напрямку зменшення температури. Видалення стінки, яка розділяє ці дві маси при одному й тому самому тиску, вочевидь, не впливає на умови теплової рівноваги або на напрямок теплового потоку, хоча величина теплового потоку змінюється через те, що тиск за відсутності стінки має лишатись однаковим.

### 1.1.2 Специфічні особливості об'єктів динамічної метеорології

Динамічна метеорологія вивчає природні течії рідин і газів, для яких істотну роль відіграють ефекти обертання, стратифікації та бароклінності.

Під обертанням мається на увазі спільне обертання планети і навколишніх її повітряної і водної оболонок. При цьому в системі відліку,

пов'язаній з обертовою Землею, виникає відхиляючий ефект, який необхідно враховувати при описі гідродинамічних процесів в геофізичних системах.

Нарівні з ефектом обертання специфічною особливістю об'єктів динамічної метеорології є стратифікація середовища. Стратифікованим називається середовище, в якому термодинамічні параметри такі як температура, густина, ентропія тощо змінюються у напрямку дії сили тяжіння.

Баротропною рідиною є рідина, в якій густина є функцією тільки тиску  $\rho = \rho(p)$ . Проте, в атмосфері та океані, в реальних рідинах, густина залежить не тільки від тиску, але й від температури та концентрації термодинамічно активної домішки  $\rho = \rho(p, T, s)$ , тобто і атмосфера і океан є бароклініними середовищами.

Отже, динамічну метеорологію можна визначити як динаміку обертаних бароклінічних стратифікованих рідин, і газів.[1]

### 1.1.3 Скалярні та векторні поля. Числова індексація координат та проєкцій векторів

Полем фізичної величини (температури, швидкості, тиску, прискорення тощо) називають сукупність значень цієї величини, яка однозначно визначена в кожній точці деякої частини простору. [5]

Розрізняють поля скалярні, векторні та тензорні в залежності від роду цієї величини, розподіл якої є заданим.

Якщо в усіх точках поля скалярні, векторні або тензорні величини мають одне й те саме значення, то поле називають однорідним, в протилежному випадку – неоднорідним. Поля фізичних величин можуть не змінюватись з плином часу, тобто в кожній точці простору величина лишається постійною, – бути стаціонарними, а можуть змінюватись – бути нестаціонарними. [5]

Поле скалярної величини  $f$  (наприклад, температури, тиску, густини тощо) аналітично задається у вигляді функції координат точок простору та часу:

$$f = f(x, y, z; t) = f(M; t) = f(\vec{r}; t), \quad (1.1)$$

де  $\vec{r}$  – це поточний радіус-вектор точки  $M$  простору. Час розглядається як параметр, що визначає окремі моменти, до яких відносяться поля, якщо вони є нестаціонарними.

Поле векторної величини  $\vec{a}$  (швидкості, прискорення, сили тощо) визначається векторною функцією координат точки  $M$  та часу:

$$\vec{a} = \vec{a}(x, y, z; t) = \vec{a}(M; t) = \vec{a}(\vec{r}; t), \quad (1.2)$$

або трьома проєкціями вектору  $\vec{a}$

$$a_x = a_x(x, y, z, t); \quad a_y = a_y(x, y, z, t); \quad a_z = a_z(x, y, z, t). \quad (1.3)$$

Для скорочення запису будемо часто використовувати числовою індексацією координат та проєкцій векторів, припускаючи

$$x \equiv x_1, \quad y \equiv x_2, \quad z \equiv x_3; \quad a_x \equiv a_1, \quad a_y \equiv a_2, \quad a_z \equiv a_3. \quad (1.4)$$

Отже вираз (2.3) за допомогою (2.4) можна записати у вигляді

$$a_i = a_i(x_1, x_2, x_3, t); \quad i = 1, 2, 3. \quad (1.5)$$

Такий спосіб запису був запропонований А. Ейнштейном. Їм також було запропоновано для скорочення запису звільнитись від знаку суми  $\Sigma$  перед одночленами, що підсумовуються, якщо індекс, за яким визначається сума, повторюється в одночлені два рази.

Наприклад,

$$c_i = \sum_{\alpha=1}^3 a_{\alpha} b_{\alpha i} = a_{\alpha} b_{\alpha i}; \quad i = 1, 2, 3. \quad (1.6)$$

Індекси, що повторюються два рази та за якими визначається сума, називають «німими» (ці індекси впродовж якогось процесу обчислення змінюють свої значення), інші індекси, які зберігають своє значення в кожному окремому процесі обчислення незмінним, мають назву «вільних».

#### 1.1.4 Оператор Гамільтона та операції з ним

В динамічній метеорології часто використовують диференціальні оператори. Найбільш уживаним є оператор Гамільтона, який позначають як  $\nabla$  (треба читати як «набла» або гамільтонян):

$$\nabla = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}, \quad (1.7)$$

або за допомогою числової індексації координат

$$\nabla = \vec{e}_{\alpha} \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}}, \quad (1.8)$$

де  $e$  – загальне позначення для ортів або одиничних векторів.

Оскільки диференціальний оператор утворюється як компоненти векторного поля, то можна їх назвати компонентами векторного поля. Тобто можна записати

$$\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right), \quad (1.9)$$

що означає  $\nabla_x = \frac{\partial}{\partial x}$ ,  $\nabla_y = \frac{\partial}{\partial y}$ ,  $\nabla_z = \frac{\partial}{\partial z}$ .

Слід пам'ятати, що операції з оператором Гамільтона підпорядковуються законам операторної, а не звичайної алгебри. Ознайомимось з ними.

**Операція  $\nabla f$** , де  $f$  – скалярна величина, надає нову фізичну векторну величину, яка називається градієнтом скалярної величини

$$\text{grad} f = \nabla f = \left( \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) f = \vec{i} \frac{\partial f}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial f}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial f}{\partial z} = \vec{e}_\alpha \frac{\partial f}{\partial x_\alpha}. \quad (1.10)$$

**Операція  $f \nabla$** , де  $f$  – скалярна величина, немає фізичного сенсу. Це оператор, який набуває фізичний сенс в залежності від того до якої фізичної величини він буде застосований пізніше

$$\begin{aligned} \text{grad} f = f \nabla &= f \left( \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) = \\ &= \vec{i} f \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} f \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} f \frac{\partial}{\partial z} = \vec{e}_\alpha f \frac{\partial}{\partial x_\alpha}. \end{aligned} \quad (1.11)$$

**Операція  $\nabla \cdot \vec{a}$** , де  $\vec{a}$  – векторна величина, визначає величину, яка в векторному аналізі та теорії поля має назву розбіжності або дивергенції векторного поля  $\vec{a}$  та визначається як

$$\nabla \cdot \vec{a} = \left( \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = \frac{\partial a_\alpha}{\partial x_\alpha}. \quad (1.12)$$

**Операція  $\vec{a} \cdot \nabla$** , де  $\vec{a}$  – векторна величина, також немає фізичного сенсу. Це все ще диференціальний оператор. Остаточний сенс цього виразу залежить від того, до якої величини він застосований:

$$\vec{a} \cdot \nabla = \vec{a} \cdot \left( \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) = a_x \frac{\partial}{\partial x} + a_y \frac{\partial}{\partial y} + a_z \frac{\partial}{\partial z} = a_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha}. \quad (1.13)$$

**Операція  $\nabla \times \vec{a}$** , де  $\vec{a}$  – векторна величина, визначає величину, яка в векторному аналізі та теорії поля має назву ротором вектору  $\vec{a}$  або вихором поля  $\vec{a}$  та визначається як

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{a} &= \left( \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \times \vec{a} = \\ &= \vec{i} \left( \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) + \vec{j} \left( \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) + \vec{k} \left( \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right). \end{aligned} \quad (1.14)$$

В результаті отримано три види комбінацій з оператором  $\nabla$ , які мають фізичний сенс

$$\begin{aligned} \nabla f &= \text{grad} f = \text{вектор} \\ \nabla \cdot \vec{a} &= \text{div} \vec{a} = \text{скаляр} \\ \nabla \times \vec{a} &= \nabla \times \vec{a} = \text{вектор} \end{aligned}$$

### 1.1.5 Градієнт поля скалярної величини

Коли мова йде про поле фізичної величини, то є цікавим дізнатись, як змінюється ця величина від точки до точки простору, наскільки інтенсивними є її зміни. Для скалярних полів вводять таку диференціальну характеристику поля як градієнт поля скалярної величини. Позначають як  $\text{grad} f$ .

Градієнт поля скалярної функції  $f$  визначається як вектор

$$\text{grad} f = \frac{\overrightarrow{\partial f}}{\partial n}, \quad (1.15)$$

що спрямований за нормаллю  $\vec{n}$  до поверхні рівня<sup>1</sup> скалярної величини  $f$  в бік найбільшого зростання даної величини та дорівнює за величиною похідній від  $f$  за напрямком вищезгаданої нормалі. Таким чином, градієнт скалярної величини  $f$  характеризує швидкість зміни цієї величини на одиницю відстані.

---

Результатом застосування операції градієнта до скалярного поля є векторне поле.

---

З курсу вищої математики відомо, що похідну за будь-яким напрямком можна виразити за допомогою похідних за трьома взаємно

---

<sup>1</sup> Поверхня рівня характеризується такою умовою, що в усіх точках такої поверхні функція  $f$  зберігає одне й те саме постійне значення  $C$ . [7]

перпендикулярними напрямками  $x, y, z$ . Звідси градієнт скалярної величини  $f$  можна представити:

$$\text{grad}f = \vec{i} \frac{\partial f}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial f}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial f}{\partial z} = \vec{e}_\alpha \frac{\partial f}{\partial x_\alpha}, \quad (1.16)$$

тоді модуль градієнта  $f$  матиме вигляд

$$\text{grad}f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}. \quad (1.17)$$

Через оператор Гамільтона градієнт можна представити як

$$\text{grad}f = \nabla f. \quad (1.18)$$

В гідрометеорології, зазвичай, використовується декартова ортогональна система координат, де осі (рис. 2.1) спрямовані таким чином: ось  $\vec{OX}$  за широтним колом з заходу на схід, ось  $\vec{OY}$  – за меридіаном з півдня на північ, а ось  $\vec{OZ}$  – за радіусом Землі в точку zenіту.

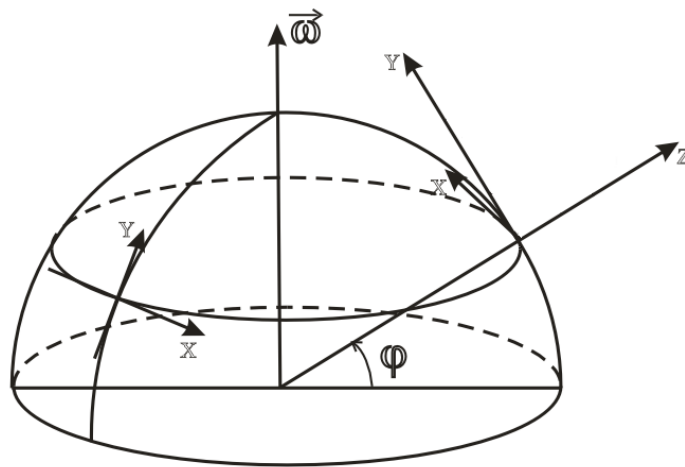


Рисунок 1.1 – Система координат, що використовується в динамічній метеорології

Тому, в динамічній метеорології дуже часто розрізняють градієнт горизонтальний та вертикальний, де  $\text{grad}_s f = \vec{i} \frac{\partial f}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial f}{\partial y}$  має назву горизонтального градієнта, а  $\vec{k} \frac{\partial f}{\partial z}$  – вертикального градієнта.

Це обумовлено, перш за все, тим, що зміни фізичних величин у горизонтальній та вертикальній площинах в атмосфері та океані відрізняються за порядком (табл. 1.1).

Таблиця 1.1 – Порядки вертикального та горизонтального градієнтів різних фізичних величин в океані та атмосфері

	Зміна у вертикальній площині	Зміна у горизонтальній площині
атмосфера	температури	
	$10^{-2} - 10^{-3} \text{ }^\circ\text{C/м}$	$10^{-5} - 10^{-4} \text{ }^\circ\text{C/м}$
	тиску	
	$10^{-2} \text{ Па/м}$	$10^{-7} - 10^{-6} \text{ Па/м}$
	густини	
	$3 \cdot 10^{-11} \text{ кг/м}^4$	$10^{-8} \text{ кг/м}^4$

На рис. 2.2 показано як визначається модуль та напрямок повного та горизонтального градієнтів на прикладі поля температури.

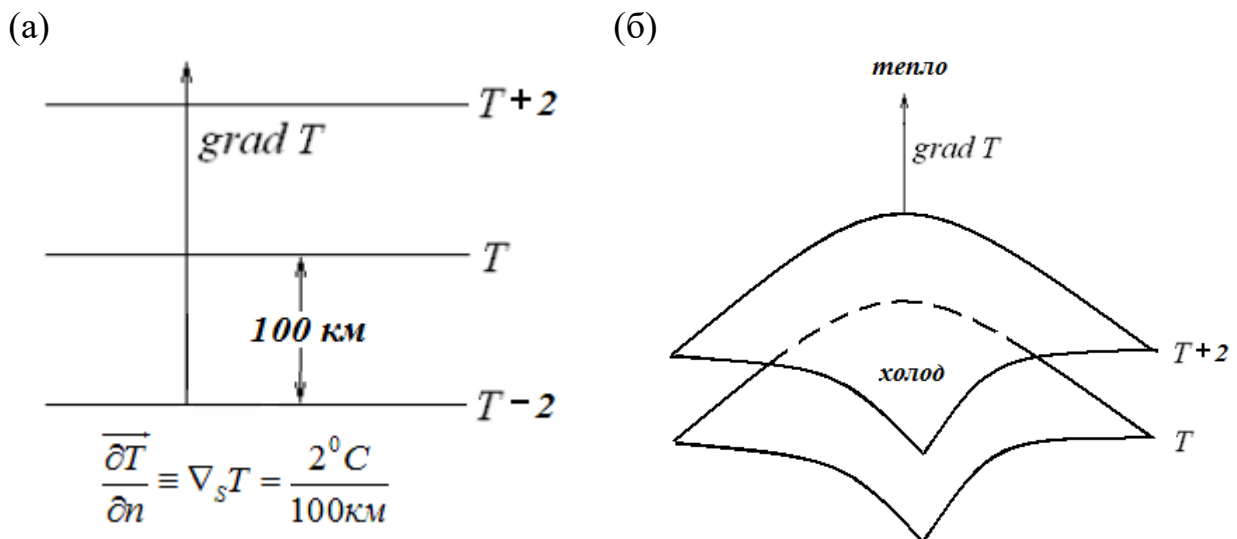


Рисунок 1.2 – Визначення напрямку та величини градієнта поля температури  $T$  для випадку двовимірного (а) та тривимірного поля (б).

### 1.1.6 Метод сіток. Скінченнорізницева апроксимація похідних

Дуже часто в динамічній метеорології виникає необхідність в розрахунку диференціальних характеристик метеорологічних полів, тобто похідних за часом або просторовими координатами від температури, тиску, проєкцій швидкості тощо. В загальному випадку для будь-якої метеорологічної величини неможна визначити функціональної залежності від просторових координат в аналітичному вигляді, оскільки аналітична залежність будь-якої метеорологічної величини від просторових координат і часу є невідомою.

Тому для їх розв'язання використовуються наближені чисельні методи, одним із яких є метод сіток.

Суть методу сіток полягає у тому, що замість неперервного простору, яким є атмосфера, вводиться дискретний простір, складений із множини точок; неперервний час також замінюється дискретним, тобто множиною

точок на осі часу. Сукупності точок просторових і часових мають назву просторово – часових сіток (рис. 1.3).

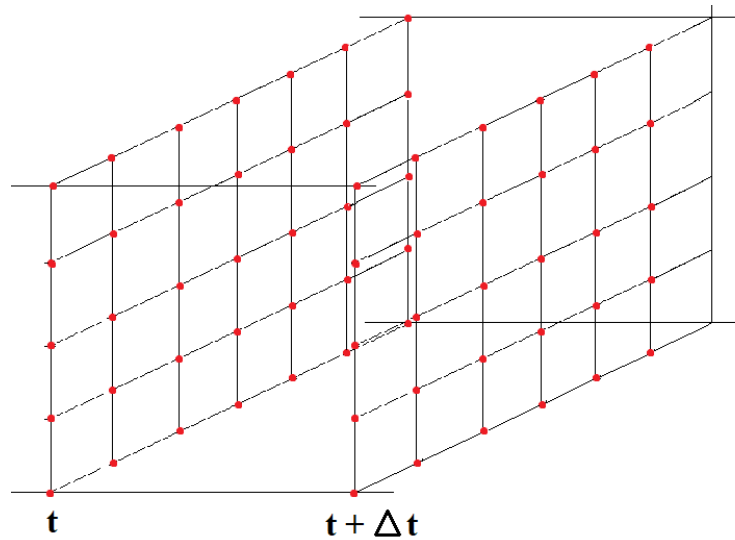


Рисунок 1.3 – Приклад просторово-часової сітки.  $\Delta t$  – крок за часом. Сітка утворена червоними точками, які знаходяться на однаковій відстані одна від одної, є просторовою сіткою в певній площині ( $XOY$ ,  $YOZ$  або  $XOZ$ ).

Тому для обчислення диференціальних характеристик метеорологічних полів використовують наближені скінченнорізницеві співвідношення за допомогою яких можна представити перші та другі похідні через значення метеорологічної величини в точках та крок за простором,  $r$ , (рис. 1.4).

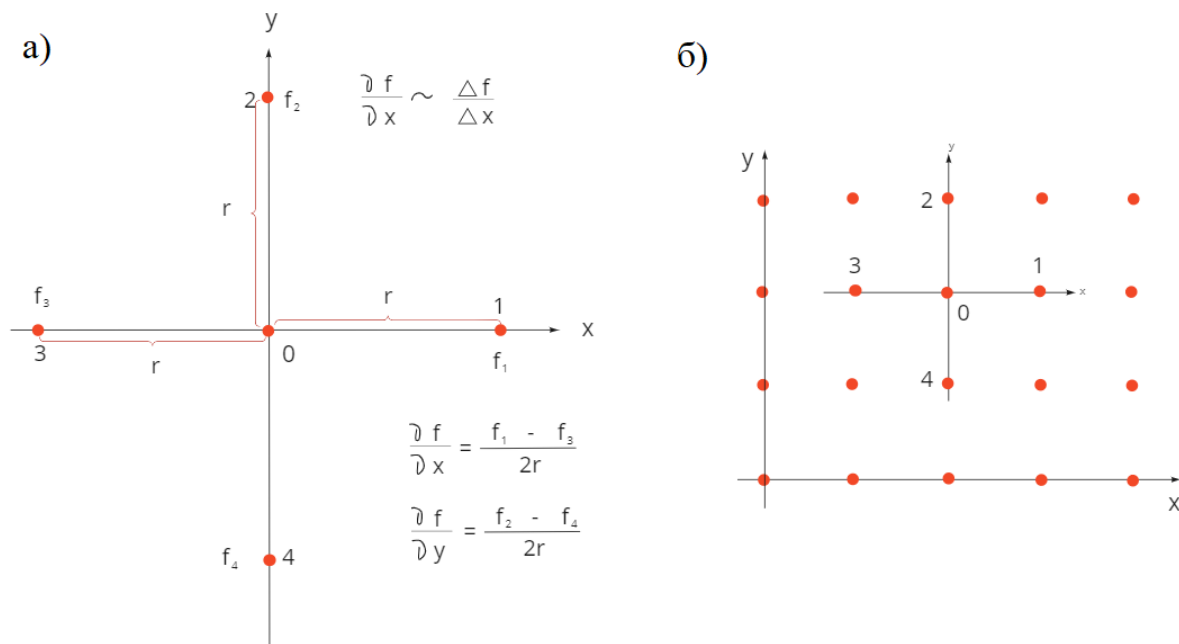


Рисунок 1.4 – Чотириточковий шаблон, що використовується для знаходження похідних (а) та застосування цього шаблону на просторово-часовій сітці (б)



Сітки можуть розрізнятися за кількістю вузлів, розміром кроків, структурою комірок, а також за способом розташування метеовеличин у вузлах сітки. Є тільки три основні двомірні решітки (квадратні, трикутні і шестикутні), які набуваються з правильних багатокутників. Якщо решітку отримують зі сторін квадрата, трикутника або шестикутника, то ці лінії утворюють сітку (рис. 1.5). Всі інші види сіток можна отримати з основних за допомогою комформного відображення. Оскільки, відповідно до методу сіток, значення метеорологічних величин відомі в дискретних точках, похідні в диференціальних рівняннях можна розрахувати тільки за допомогою скінченних різниць.

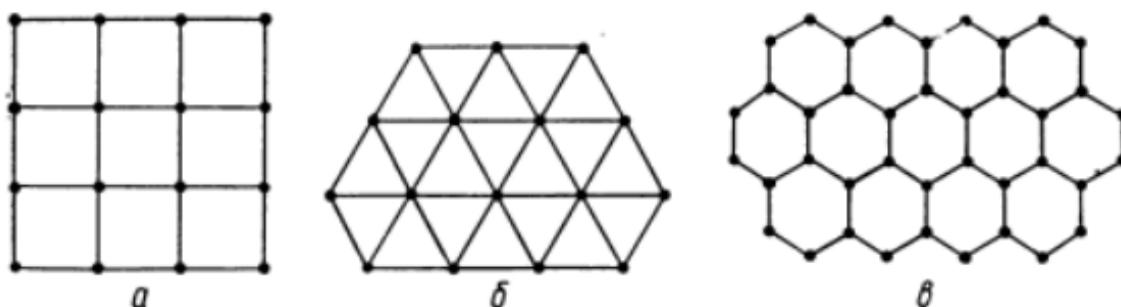


Рисунок 1.5 – Три основні сітки: а – квадратна, б – трикутна, в – шестикутна.

Похідна, яка представлена як відношення скінченних різниць, називається скінченнорізницевою аналогою цієї похідної, а процедура заміни похідної скінченною різницею – скінченнорізницевою апроксимацією.

Таким чином, використовуючи чотирьохточковий шаблон (рис. 1.4а) і розвиваючи функцію двох незалежних змінних  $f(x, y)$  в ряд Тейлора, частинні похідні можна представити у вигляді:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 \approx \frac{f_1 - f_3}{2r}, \quad \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 \approx \frac{f_2 - f_4}{2r}, \quad (1.19)$$

Вираз (1.19) представляє похідні через так звані центральні різниці.

Через односторонні різниці функцію двох незалежних змінних  $f(x, y)$  можна представити наступним чином

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 \approx \frac{f_1 - f_0}{r}, \quad \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 \approx \frac{f_2 - f_0}{r}, \quad (1.20)$$

або

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 \approx \frac{f_0 - f_3}{r}, \quad \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 \approx \frac{f_0 - f_4}{r}, \quad (1.21)$$

Формули (1.20) є формулами для знаходження правосторонніх різниць, а (1.21) – для знаходження лівосторонніх різниць.

Другі похідні можна обчислити за формулами:

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_0 \approx \frac{f_1 + f_3 - 2f_0}{r^2}, \quad \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_0 \approx \frac{f_2 + f_4 - 2f_0}{r^2}. \quad (1.22)$$

Похідні, одержані за допомогою наближених виразів і обчислені за конкретними даними, вмістять похибки двох типів: апроксимації і неточності самих даних.

## 1.2 Методи опису руху рідини: метод Ейлера та метод Лагранжа

Існують два методи для вивчення руху рідини. В одному з них – методі Лагранжа – розглядається, що відбувається з окремими частинками рідини з плином часу, які траєкторії вони описують, які швидкості та прискорення вони мають тощо. Інший метод – метод Ейлера – дає відповідь на те, що відбувається у фіксованих точках заповненого рідиною простору, які швидкості, прискорення в них спостерігаються. [1]

Обидва методи були запропоновані та обґрунтовані Ейлером. Проте, зазвичай один з них має назву метод Ейлера, а інший – метод Лагранжа. [1]

Розглянемо метод Лагранжа. Для того щоб відрізнити одну від одної окремі частинки рідини, необхідно якимось чином позначити їх: або перенумерувати, або надати їм якийсь найменування. Таким чином, в методі Лагранжа величини, що характеризують рух, розглядаються, як функції часу та трьох параметрів, за допомогою яких частинка вирізняється з множини решти частинок. Такими параметрами можуть бути, наприклад, декартові координати  $a, b, c$ , які визначають положення частинки відносно нерухомих осей в початковий момент часу  $t = t_0$ , тобто  $a \equiv x_0$ ,  $b \equiv y_0$ ,  $c \equiv z_0$ . Таким чином, за методом Лагранжа, аргументами, які визначають значення векторних та скалярних величин, які характеризують рух рідини, є змінні  $a, b, c, t$ . Це так звані змінні Лагранжа.

В якості змінних Лагранжа можна приймати не тільки декартові координати, але і інші характеристики рідини. Наприклад, вивчаючи великомасштабні рухи атмосфери в якості змінних Лагранжа можна прийняти три незалежні одна від одної найбільш консервативні

характеристики океану та атмосфери, а саме, потенціальна температура ( $\Theta$ ) або густина ( $\rho_*$ ), концентрація термодинамічно активної домішки ( $s$ , для атмосфери це може бути масова частка водяної пари, для океану – солоність), потенціальний вихор ( $\Pi$ ). Тобто змінні  $a, b, c$  в цьому випадку набуватимуть вигляду  $a \equiv \Theta$ ,  $b \equiv s$ ,  $c \equiv \Pi$ . З цими характеристиками ми познайомимось далі.

В змінних Лагранжа координати частинки, що рухається, визначаються виразами:

$$x = x(a, b, c, t); \quad y = y(a, b, c, t); \quad z = z(a, b, c, t), \quad (1.23)$$

а її радіус-вектор – рівністю

$$\vec{r} = \vec{r}(a, b, c, t). \quad (1.24)$$

При постійних  $a, b, c$  та змінному  $t$  рівняння (1.24) дає закон руху певної частинки. При змінних  $a, b, c$  та фіксованому  $t$  ті самі рівняння описують закон розподілу всіх частинок в просторі в деякій певний момент часу.

Інший метод має об'єктом вивчення не рідину, а нерухомий простір, що заповнений рідиною, яка рухається. В методі Ейлера увагу зосереджено не тільки на змінах різних фізичних величин з плином часу у фіксованій точці простору, а також на змінах цих величин при переході до інших точок простору. Таким чином, в методі Ейлера всі фізичні величини розглядаються як функції трьох координат  $x, y, z$  та часу  $t$ , тобто чотирьох аргументів, які називаються змінними Ейлера. Отже,

$$\vec{v} = \vec{v}(x, y, z, t); \quad p = p(x, y, z, t); \quad T = T(x, y, z, t). \quad (1.25)$$

Таким чином, в методі Ейлера об'єктами вивчення є різні векторні та скалярні поля.

Порівнюючи обидва методи можна помітити, що метод Лагранжа має певні перевагами з точки зору фізичного вивчення руху в цілому. Проте, математичні труднощі, які виникають при застосуванні методу Лагранжа є значно більш серйозними, ніж в методі Ейлера. Тому більш поширеним та уживаним в геофізичній гідродинаміці є метод Ейлера.

Розглянемо деяку скалярну величину, яка задана в змінних Ейлера:

$$F = f(x, y, z, t). \quad (1.26)$$

Якщо перейти до змінних Лагранжа, то, враховуючи, що  $x, y, z$  в змінних Лагранжа залежать від  $a, b, c$  та  $t$  функцію  $f$  можна записати у вигляді:

$$F = f[x(a, b, c, t), y(a, b, c, t), z(a, b, c, t), t] = \Phi(a, b, c, t). \quad (1.27)$$

Тут  $f$  та  $\Phi$  означають вид функціональної залежності фізичної величини  $f$  від змінних Ейлера та від змінних Лагранжа, відповідно.

Похідні у змінних Ейлера, вочевидь, матимуть вигляд  $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}, \frac{\partial f}{\partial t}$ , а похідні за змінними Лагранжа будуть  $\frac{\partial \Phi}{\partial a}, \frac{\partial \Phi}{\partial b}, \frac{\partial \Phi}{\partial c}, \frac{\partial \Phi}{\partial t}$ .

Зв'язок між похідними за змінними Ейлера та похідними за змінними Лагранжа, можна знайти, якщо використовуючи правила диференціювання складної функції, продиференціювати вираз (2.27):

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial a} &= \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial a} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial a}, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial b} &= \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial b} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial b} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial b}, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial c} &= \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial c} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial c} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial c}, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial t} &= \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial t}. \end{aligned} \right\} \quad (1.28)$$

Похідні  $\frac{\partial \Phi}{\partial a}, \frac{\partial \Phi}{\partial b}, \frac{\partial \Phi}{\partial c}$  характеризують зміну величини  $F$  від однієї частинки рідини до іншої, а похідна  $\frac{\partial \Phi}{\partial t}$  – зміну цієї величини з плином часу в індивідуальній частинці рідини, яка рухається.

Похідні  $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$  характеризують зміну величини  $F$  від точки до точки простору в частині простору, що розглядається, та являють собою складові градієнта фізичної величини  $F$ , а похідна  $\frac{\partial f}{\partial t}$  – зміну цієї величини з плином часу у фіксованій точці простору.

### 1.2.1 Індивідуальна, локальна та конвективна похідні

Остання з формул (1.28) визначає у змінних Ейлера індивідуальну похідну  $\frac{df}{dt}$  функції  $f$ . З правила диференціювання складної функції випливає, що  $\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{df}{dt}$ . В математиці похідна  $\frac{df}{dt}$  має назву повної похідної за часом від функції  $F$ . Тобто останній з виразів (1.28) можна переписати

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + v_x \frac{\partial f}{\partial x} + v_y \frac{\partial f}{\partial y} + v_z \frac{\partial f}{\partial z}. \quad (1.29)$$

де  $v_x = \frac{dx}{dt}, v_y = \frac{dy}{dt}, v_z = \frac{dz}{dt}$  – проекції швидкості частинки рідини, що рухається ( $v_x$  – проекція швидкості на вісь  $\overrightarrow{OX}$ ,  $v_y$  – проекція швидкості на вісь  $\overrightarrow{OY}$ ,  $v_z$  – проекція швидкості на вісь  $\overrightarrow{OZ}$ ). Тут можна вже можна

розглядати  $v_x, v_y, v_z$  як повні похідні від  $x, y, z$ , оскільки, якщо розглядається тільки метод Ейлера, то  $v_x, v_y, v_z$  є функціями тільки часу.

Рівняння (28) являє собою рівняння зв'язку між індивідуальною (її ще називають лагранжевою або субстанціональною похідною)  $\frac{df}{dt}$  та локальною (або місцевою) похідними  $\frac{\partial f}{\partial t}$ .

Використовуючи правило скалярного добутку, можна бачити, що рівняння (28) можна переписати у вигляді:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \vec{V} \cdot \text{grad}f. \quad (1.30)$$

де  $\vec{V}$  – швидкість руху рідкої частинки,  $\text{grad}f$  – градієнт фізичної величини  $f$ .

Похідна  $\frac{df}{dt}$ , називається в геофізичній гідродинаміці індивідуальною, та як вже було вказано вище, характеризує зміну фізичної величини  $f$  в індивідуальній частинці рідини, яка рухається разом з рідиною.

Індивідуальна похідна  $\frac{df}{dt}$  складається з локальної похідної  $\frac{\partial f}{\partial t}$  та конвективної похідної  $v_x \frac{\partial f}{\partial x} + v_y \frac{\partial f}{\partial y} + v_z \frac{\partial f}{\partial z}$ .

Похідна  $\frac{\partial f}{\partial t}$ , називається локальною в геофізичній гідродинаміці, характеризує зміну величини  $f$  у фіксованій точці простору та обумовлюється нестационарністю поля цієї величини<sup>2</sup>.

Похідні  $v_x \frac{\partial f}{\partial x}, v_y \frac{\partial f}{\partial y}, v_z \frac{\partial f}{\partial z}$  в класичній гідромеханіці мають назву конвективних похідних, проте, в динамічній метеорології з тих самих причин, з яких розділяють градієнт фізичної величини на горизонтальну та вертикальну складові, також розділяють на горизонтальну  $v_x \frac{\partial f}{\partial x} + v_y \frac{\partial f}{\partial y}$ , яка в геофізичній гідродинаміці має назву адвективної, та вертикальну  $v_z \frac{\partial f}{\partial z}$ , яка в геофізичній гідродинаміці називається конвективною, складові. Конвективна похідна  $(v_x \frac{\partial f}{\partial x} + v_y \frac{\partial f}{\partial y} + v_z \frac{\partial f}{\partial z})$  визначаються неоднорідністю поля величини  $f$ .

З урахуванням вищезазначеного вирази (2.25) та (2.26) дуже часто представляють у вигляді:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \vec{V}_S \cdot \text{grad}_S f + v_z \frac{\partial f}{\partial z}. \quad (1.31)$$

де  $\vec{V}_S$  – горизонтальна складова швидкості руху рідкої частинки,  $\text{grad}_S f$  – горизонтальний градієнт фізичної величини  $f$ , де  $\vec{V}_S \cdot \text{grad}_S f = v_x \frac{\partial f}{\partial x} + v_y \frac{\partial f}{\partial y}$ .

<sup>2</sup> Таким чином, можна бачити, що стаціонарність поля можна визначити, як  $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$ , тобто стаціонарним є поле, в кожній точці якого величина  $f$  не змінюється з часом.

Адвективна складова  $(v_x \frac{\partial f}{\partial x} + v_y \frac{\partial f}{\partial y})$  характеризує перенос субстанції<sup>3</sup>, яка кількісно описується фізичною величиною  $f$ , в горизонтальній площині.

Конвективна складова  $v_z \frac{\partial f}{\partial z}$  характеризує перенос субстанції, яка кількісно описується фізичною величиною  $f$ , у вертикальній площині.

Рівняння (1.31) має прогностичне значення. Розв'язуючи його відносно  $\frac{\partial f}{\partial t}$ , отримаємо

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{df}{dt} - v_x \frac{\partial f}{\partial x} - v_y \frac{\partial f}{\partial y} - v_z \frac{\partial f}{\partial z}. \quad (1.32)$$

Вираз (1.32) показує, що для прогнозування зміни функції  $f$  у фіксованій точці необхідно знати зміни, яка відбуваються з часом в індивідуальній частинці і характеризуються похідною  $\frac{df}{dt}$ , а також розподіл в просторі значень функції  $f$  та швидкості  $\vec{V}$ .

Вираз

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z}. \quad (1.33)$$

має назву оператора Ейлера.

Якщо скористатись правилами операторної алгебри, то оператор (1.33) можна представити у вигляді

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla). \quad (1.34)$$

### 1.2.2 Прискорення частинки рідини. Локальна та конвективна складова прискорення. Повне прискорення

Якщо оператор Ейлера (1.34) застосувати до вектору швидкості  $\vec{V}$ , отримаємо

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla)\vec{V}. \quad (1.35)$$

---

<sup>3</sup> Субстанцією в даному випадку є кількість руху, внутрішня енергія, водяна пара, сіль, а їх кількісними характеристиками є швидкість, температура, масова частка водяної пари, солоність, відповідно.

Дужки у виразі (1.35) вказують, що спочатку виконується операція в дужках, а потім результат цієї операції застосовується до вектору швидкості.

У виразі (1.35)  $\frac{d\vec{V}}{dt}$  означає повне прискорення, а  $\frac{\partial\vec{V}}{\partial t}$  – локальне прискорення.

В проекціях на осі  $x, y, z$  конвективна похідна  $(\vec{V} \cdot \nabla)\vec{V}$  матиме вигляд

$$\begin{aligned} (\vec{V} \cdot \nabla)\vec{V} &= (v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}) \cdot \left( \frac{\partial\vec{V}}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\vec{V}}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\vec{V}}{\partial z}\vec{k} \right) = \\ &= v_x \frac{\partial\vec{V}}{\partial x} + v_y \frac{\partial\vec{V}}{\partial y} + v_z \frac{\partial\vec{V}}{\partial z} = \\ &= v_x \frac{\partial v_x}{\partial x}\vec{i} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y}\vec{j} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z}\vec{k} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x}\vec{i} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y}\vec{j} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z}\vec{k} + \\ &\quad + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x}\vec{i} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y}\vec{j} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z}\vec{k}. \end{aligned} \quad (1.36)$$

Отже, в проекціях на осі координат повне прискорення матиме вигляд:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dv_x}{dt} &= \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \text{ буде компонентою } X \\ \frac{dv_y}{dt} &= \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \text{ буде компонентою } Y \\ \frac{dv_z}{dt} &= \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \text{ буде компонентою } Z \end{aligned} \right\} \quad (1.37)$$

або, використовуючи числову індексацію для проекцій векторів

$$\frac{dv_i}{dt} = \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_\alpha \frac{\partial v_i}{\partial x_\alpha}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (1.38)$$

Локальне прискорення  $\frac{\partial\vec{V}}{\partial t}$  дорівнює нулю, якщо поле швидкостей є стаціонарним, або рух є сталим. Конвективне прискорення відсутнє, якщо поле швидкостей є однорідним.

### 1.3 Рівняння руху у векторній формі для атмосфери. Сили, які діють в атмосфері

#### 1.3.1 Динаміка ідеальної рідини в інерціальній (необертовій) системі відліку

Інерціальними системами відліку називаються ті системи, по відношенню до яких виконується закон інерції<sup>4</sup>. Можна дати і інше визначення інерціальним системам відліку. Це системи відліку, в яких є справедливими закони Ньютона.

З дуже великою мірою точності можна вважати, що такого роду системою є геліоцентрична система відліку, початок координат якої співпадає з центром інерції сонячної системи, а осі проведено у напрямку віддалених зірок.

Система відліку, що жорстко пов'язана з Землею (геоцентрична система відліку), є неінерціальною, головним чином, внаслідок добового обертання Землі. Розглядаючи інерціальну систему відліку, ми нехтуємо обертанням Землі.

Розглянемо динаміку ідеальної рідини, тобто будемо нехтувати взаємодією між молекулами рідини, тобто в'язкістю рідини, оскільки опис останньої не залежить від вибору системи відліку.

Рівняння руху є математичним виразом другого закону Ньютона для матеріального об'ємного елемента або матеріальної точки; в загальному вигляді воно запишеться таким чином:

$$\frac{d(m\vec{V})}{dt} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i, \quad (1.39)$$

де  $m$  – маса елемента,  $\vec{V}$  – його швидкість. У правій частині рівняння (1.39) стоїть сума всіх  $N$  сил, що діють на елемент об'єму рідини.

Для одиничної маси ( $m = 1$ )

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i, \quad (1.40)$$

Розглянемо сили, які в основному визначають характер природних течій рідини в інерціальній системі відліку.

---

<sup>4</sup> Тіло, на яке не діє жодної сили, знаходиться або у стані абсолютного спокою або прямолінійного та рівномірного руху.



### 1.3.2 Сила земного притягання

Сила земного притягання є виявом всесвітнього закону тяжіння і математичний вираз для неї має наступний вигляд:

$$G_* = -\gamma \frac{Mm \vec{r}}{r^2 r}, \quad (1.41)$$

де  $\gamma$  – гравітаційна стала;  $M$  – маса Землі;  $m$  – маса тіла;  $\vec{r}$  – радіус-вектор точки (початок координат співпадає з центром планети). Мінус у формулу введений у зв'язку з тим, що напрямок векторів  $G_0$  та  $\vec{r}$  прямо протилежний.

Тоді вираз для гравітаційної сили Землі, що діє на одиничну масу, приймає наступний вигляд:

$$\frac{\vec{G}_*}{m} \equiv \vec{G}_0 = -\gamma \frac{M \vec{r}}{r^2 r}, \quad (1.42)$$

де  $\vec{G}_0$  – сила притягання, що діє на одиницю маси.

Сила гравітації, що діє на матеріальну точку або тіло, є потенціальною, тобто робота цієї сили при переміщенні точки (тіла) залежить тільки від початкового і кінцевого положення точки (тіла) у просторі.

Потенціальний характер сили притягання дозволяє запровадити скалярний параметр гравітаційного поля – потенціал  $\Phi_s = -\gamma \frac{M}{r}$ , який зв'язаний з  $\vec{G}_0$  співвідношенням:

$$\vec{G}_0 = -\nabla \Phi_s = -grad \Phi_s. \quad (1.43)$$

### 1.3.3 Сила баричного градієнту

Основною силою, яка спричиняє рух повітря, є сила баричного градієнта. Ця сила виникає через неоднорідний розподіл тиску в атмосфері, вона спрямована завжди в сторону низького тиску по нормалі до ізобаричної поверхні і дорівнює баричному градієнту.

Виділимо у рідині нескінченно малий об'єм,  $\delta V = \delta x \delta y \delta z$ , як показано на рис. 3.1. Завдяки хаотичному руху молекул, імпульс (кількість руху) передається до стінок об'єму крізь навколишню рідину (рис. 1.6). Ця кількість руху, що передається за одиницю часу на одиницю площі, є просто тиск, який здійснюється навколишнім середовищем на стінки елементарного об'єму. Якщо тиск в центрі об'єму позначити через  $p_0$ , тоді тиск на стінку площиною  $\delta y \delta z$  з координатою  $(x + \delta x)$  можна представити рядом Тейлора:

$$p_0 + \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\delta x}{2} + \text{члени більш високих порядків}, \quad (1.44)$$

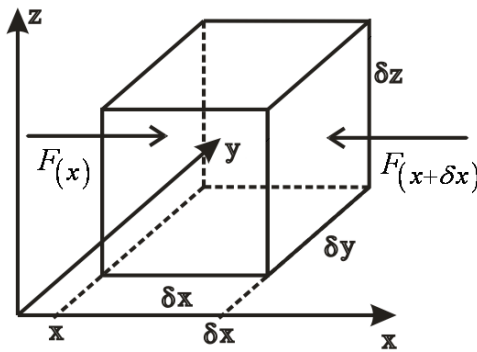


Рисунок 1.6 – Вплив  $x$ -складової сили баричного градієнта на рідкий об'єм

Нехтуючи членами більш високих порядків у виразі (1.28) силу тиску, що діє на рідкий елемент зі сторони  $\delta y \delta z$ , можна представити:

$$F_{(x+\delta x)} = - \left( p_0 + \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\delta x}{2} \right) \delta y \delta z. \quad (1.45)$$

Аналогічно знаходимо силу, що діє на елемент зі сторони площиною  $\delta y \delta z$  з координатою  $x$

$$F_{(x)} = + \left( p_0 + \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\delta x}{2} \right) \delta y \delta z. \quad (1.46)$$

Таким чином, складова сили тиску, що діє на об'єм вздовж осі  $x$ , складає

$$F_x = - \frac{\partial p}{\partial x} \delta x \delta y \delta z. \quad (1.47)$$

Звідси випливає, що сила є пропорційною похідній від тиску в напрямку дії сили, і називається силою баричного градієнта. Маса  $m$  для виділеного рідкого об'єму – це густина  $\rho$ , помножена на об'єм:  $m = \rho \delta x \delta y \delta z$ . Таким чином,  $x$ -компонента сили баричного градієнта на одиницю масу має вигляд:

$$\frac{F_x}{m} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}. \quad (1.48)$$

Аналогічно, можна отримати  $y$ - та  $z$ -складові сили баричного градієнта на одиницю маси:

$$\frac{F_y}{m} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \quad \text{та} \quad \frac{F_z}{m} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}. \quad (1.49)$$

Таким чином, загальна сила баричного градієнту на одиницю маси:

$$\frac{\vec{F}}{m} = \frac{1}{\rho} \nabla p. \quad (1.50)$$

З урахуванням одержаних виразів для основних сил рівняння руху (1.24) для ідеальної рідини можна записати в інерціальній системі відліку наступним чином:

$$\left( \frac{d\vec{V}_I}{dt} \right)_I = -\frac{1}{\rho} \nabla p - \nabla \Phi_s, \quad (1.51)$$

де  $\vec{V}_I$  – швидкість в інерціальній системі координат,  $\left( \frac{d\vec{V}_I}{dt} \right)_I$  – прискорення в інерціальній системі координат.

Рівняння (1.51) – це рівняння руху в формі Ейлера.

Сили, що діють на частинку рідини, можуть бути або масовими, або поверхневими. Масові сили впливають на кожний елемент частинки рідини, який знаходиться як всередині частинки, так і на поверхні, що її обмежує. Масова сила, що діє на частинку рідини, пропорційна її масі.

Поверхневі сили є наслідок взаємодії між окремими елементами частинки рідини. Фізично вони обумовлені молекулярною структурою рідини та мають малий радіус дії. Тому поверхневі сили, що діють на частинку рідини, прикладені тільки до тих елементів частинки, які лежать на поверхні, що її обмежує; сумарна поверхнева сила, яка прикладена до частинки рідини, пропорційна площі поверхні, що її обмежує.

Найважливішою масовою силою є сила притягання. Найважливішими поверхневими силами є сила баричного градієнту і сила в'язкості.

#### 1.3.4 Різниця між прискореннями в необертовій та обертовій системах відліку

За теоремою Коріоліса різниця між прискореннями в необертовій та обертовій системах відліку задається наступним виразом:

$$\left(\frac{d\vec{V}_I}{dt}\right)_I - \left(\frac{d\vec{V}_R}{dt}\right)_R = 2\vec{\omega} \times \vec{V}_R + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}, \quad (1.52)$$

де  $\vec{\omega}$  – кутова швидкість обертання Землі;

$\vec{V}_R$  – швидкість тіла відносно обертової системи відліку;

$\vec{V}_I$  – швидкість тіла відносно необертової системи відліку;

$\vec{r}$  – радіус-вектор точки.

Фізичний сенс членів, що стоять у правій частині рівняння (1.52):

$2\vec{\omega} \times \vec{V}_R$  – прискорення Коріоліса;

$\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$  – доцентрове прискорення;

$\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}$  – прискорення, що зумовлено зміною самої швидкості обертання Землі.

З великим ступенем точності можна вважати, що швидкість обертання Землі з часом не змінюється, і, тому, нехтуючи третім складником у формулі (1.36), її можна переписати у вигляді:

$$\left(\frac{d\vec{V}_I}{dt}\right)_I - \left(\frac{d\vec{V}_R}{dt}\right)_R = 2\vec{\omega} \times \vec{V}_R + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}), \quad (1.53)$$

Отримаємо вираз для рівнянь руху у системі координат, що обертається. З цією метою підставимо вираз (1.37) у рівняння (1.35):

$$\left(\frac{d\vec{V}_R}{dt}\right)_R + 2\vec{\omega} \times \vec{V}_R + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = -\frac{1}{\rho} \nabla p - \nabla \Phi_s, \quad (1.54)$$

тобто при переході до обертової системи відліку права частина формули (1.35) залишається без змін, а у лівій частині з'являються два додаткові члени. Оскільки надалі рух рідини розглядається лише в обертовій системі відліку, то у подальшому викладенні опустимо індекс „R”.

Якщо тепер прискоренні Коріоліса і доцентрове прискорення перенести у праву частину рівняння (1.35), то їх можна тлумачити як сили, які здаватимуться спостерігачу в обертовій системі відліку деякими додатковими силами інерції – силою Коріоліса ( $-2\vec{\omega} \times \vec{V}$ ) і відцентровою силою ( $\vec{C} = -\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$ ), що віднесені до одиниці маси і відрізняються від відповідних прискорень тільки знаком.

### 1.3.5 Сила тяжіння

І тіла, що знаходяться в стані спокою, і тіла, що рухаються відносно земної поверхні зазнають впливу відцентрової сили, яка спрямована уздовж радіусу ( $\vec{r}_1$ ) кола обертання точки від центру (рис. 1.7); також всі тіла, розташовані поблизу Землі знаходяться під впливом сили притягання. У зв'язку з цим, силу притягання і відцентрову силу об'єднують в одну, і називають силою тяжіння (рис. 1.7) матеріальної точки.

На рисунку неможливо витримати вірне співвідношення величин  $\vec{G}_0$  та  $\vec{C}$ , оскільки відцентрова сила занадто мала в порівнянні з силою земного притягання. Сила тяжіння максимальна на полюсах і мінімальна на екваторі.

Для відцентрової сили, якщо розкрити подвійний векторний добуток, отримаємо вираз:  $\vec{C} = \omega^2 \vec{r}_1$ , де  $\vec{r}_1$  – радіус кола обертання точки.

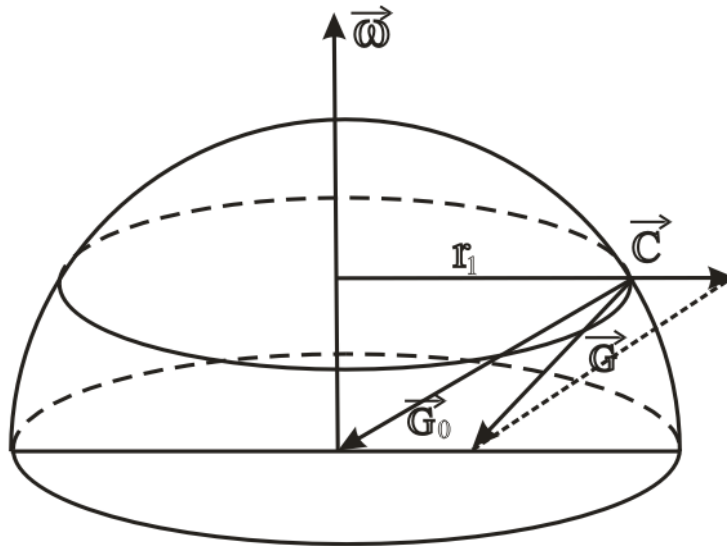


Рисунок 1.7 – Сила тяжіння  $\vec{G}$  як векторна сума сил земного притягання  $\vec{G}_0$  і відцентрової сили  $\vec{C}$

До відцентрової сили можна застосувати потенціальну функцію  $\Phi_c$  так, що

$$\vec{C} = -\nabla\Phi_c; \quad \Phi_c = -\frac{\omega^2 r_1^2}{2} = -\frac{|\vec{\omega} \times \vec{r}|^2}{2}. \quad (1.55)$$

Таким чином, силу тяжіння,  $\vec{G}$ , можна представити як  $\vec{G} = \vec{G}_0 + \vec{C} = -\nabla\Phi_s - \nabla\Phi_c$ .

Потенціальний характер сили притягання,  $\vec{G}_0$ , і відцентрової сили,  $\vec{C}$ , дозволяє і для поля сили тяжіння,  $\vec{G}$ , ввести скалярну характеристику – потенціал  $\Phi = \Phi_s + \Phi_c$ , пов'язаний з  $\vec{G}$  співвідношенням:  $\vec{G} \equiv \vec{g} = -\nabla\Phi$ , де  $\vec{g}$  – прискорення вільного падіння, або прискорення сили тяжіння.

### 1.3.6 Сила Кориоліса

На тіло, що покоїться в обертовій системі координат з сил інерції діє лише відцентрова сила. Якщо ж тіло рухається відносно обертової системи координат, то на тіло окрім відцентрової сили, діятиме ще сила Кориоліса:  $-2\vec{\omega} \times \vec{V}$ .

Вона обертається на нуль в двох випадках: по-перше, якщо тіло покоїться відносно земної поверхні ( $|\vec{V}|=0$ ); по-друге, якщо рух тіла спрямований паралельно осі обертання.

Сила Кориоліса завжди перпендикулярна до швидкості  $\vec{v}$ , отже, не виконує роботу. Спостерігачу, який обертається з кутовою швидкістю  $\vec{\omega}$ , здається, що сила Кориоліса намагається відхилити рідку частинку вправо (у північній півкулі) та вліво (у південній півкулі).

Для розуміння дії сили Кориоліса розглянемо наступний приклад: рух деякого об'єкту, запущеного без тертя з північного полюсу уздовж Гринвіцького меридіану. На рис. 1.8 показано частину траєкторії цього об'єкту у тривимірному просторі (точкова лінія показує рух об'єкту, як його бачить спостерігач, що знаходиться на Землі, а пунктирна лінія показує рух об'єкту, як його бачить спостерігач в інерціальній системі відліку). Для спостерігача в інерціальній системі відліку рух тіла буде впродовж всього часу відбуватись уздовж уявної лінії, яка вказуватиме місцеположення Гринвіцького меридіану в момент запуску тіла. Проте для спостерігача, що знаходиться на Землі рух тіла здаватиметься дещо іншим. Нехай за деякий інтервал часу тіло пролітає відстань  $r$ , а Земля повертається на кут  $\alpha$ . Тоді через цей інтервал часу для спостерігача на Землі, тіло опиниться в точці 2, через два інтервали часу – в точці 3. Звідси бачимо, що тіло відхилитиметься вправо від вектору швидкості внаслідок дії сили Кориоліса.

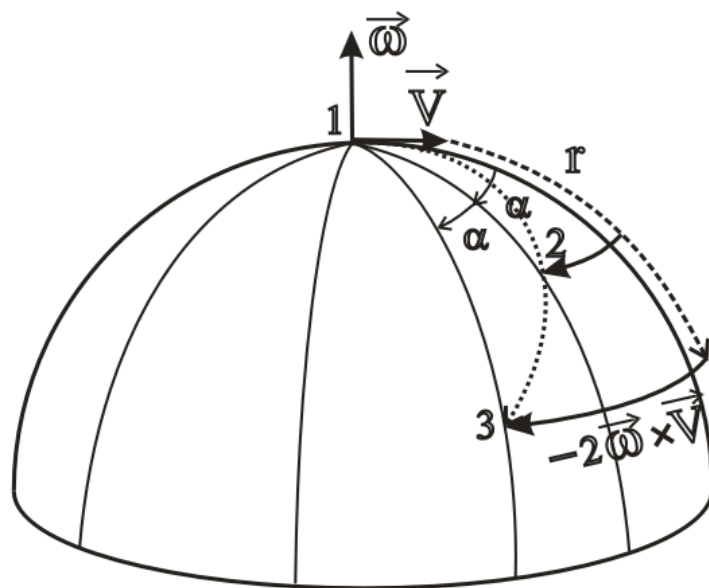


Рисунок 1.8 – До впровадження сили Кориоліса

На рис. 1.9 показано траєкторію цього ж об'єкту у горизонтальній площині впродовж 12 годин після запуску.

На рис. 1.9 горизонтальна точкова лінія відзначає позицію, яку мав Гринвіцький меридіан в момент запуску тіла ( $t = 0$ ), а пунктирна лінія – його позицію в 3<sup>h</sup>, 6<sup>h</sup>, 9<sup>h</sup> та 12<sup>h</sup> після запуску. Горизонтальні стрілки вказують переміщення об'єкту як його бачить спостерігач в інерціальній системі відліку. Суцільні криві показують траєкторію об'єкту, як її бачить спостерігач в неінерціальній системі відліку. Літери *A*, *B* і *C* показують позицію об'єкту відносно обертової системи через тригодинні інтервали.

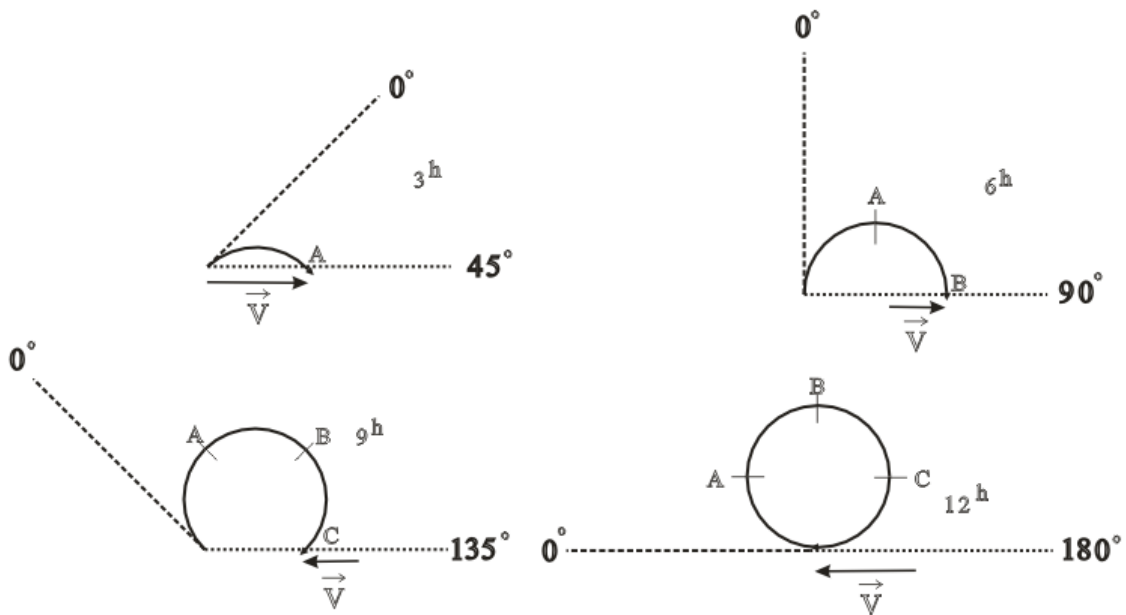


Рисунок 1.9 – До впровадження сили Коріоліса

З урахуванням вищевикладеного рівняння (1.54) приймає вигляд:

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - \nabla \Phi - 2\vec{\omega} \times \vec{V}. \quad (1.56)$$

Рівняння (1.40) – це рівняння ідеальної рідини в неінерціальній системі відліку.

### 1.3.7 Сила в'язкості

Для ідеальної рідини єдиною внутрішньою силою є тиск – однозначна скалярна функція  $p(x, y, z, t)$ . Це твердження є справедливим і для в'язкої рідини, що покоїться.

Проте в'язка рідина, що рухається, відрізняється від ідеальної рідини тим, що в ній розвиваються дотичні напруження, які обумовлені в'язкістю (внутрішнім тертям).

При русі двох сусідніх шарів рідини з різними швидкостями, між цими шарами розвиваються дотичні сили внутрішнього тертя або сили в'язкості. Слід підкреслити, що в'язкість є основна властивість рідких тіл – рідин та газів. Ця властивість викривається тільки при русі і полягає у тому, що рух у в'язкій рідині (газі) передається від шару до шару, причому чиниться опір переміщенню частинок відносно одна одної.

Якщо рідина рухається, то між шарами, що рухаються з різними швидкостями, внаслідок неупорядкованого руху молекул виникає обмін кількістю руху. Молекули безперервно переходять з одного шару в інший, здійснюючи змішування та зчеплення шарів.

Молекули, що переходять із шару, який рухається з великою швидкістю, в шар, який рухається з меншою швидкістю, прискорюють рух цього шару, та навпаки, молекули, що проникають з шару, який рухається повільно, у шар, який рухається швидко, уповільнюватимуть рух останнього (рис. 1.10).

В'язкість грає подвійну роль при русі будь-якої реальної рідини. Спостереження показують, що поле швидкості в реальній рідині є неперервним. Формування такого неперервного поля швидкостей забезпечується впливом в'язкості, яка здійснює безперервну передачу кількості руху від одного шару до іншого. Окрім вирівнювання швидкостей, передача кількості руху від шару до шару супроводжується поглинанням механічної енергії та перетворенням її в теплову. В цьому випадку ми маємо справу з розсіюванням або дисипацією механічної енергії, обумовленою в'язкістю.

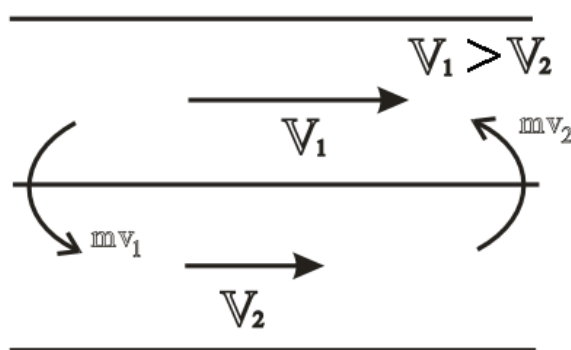


Рисунок 1.10 – До впровадження сили в'язкості (внутрішнього тертя)

З урахуванням сил в'язкості рівняння (1.53) запишемо у вигляді:

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p - \nabla\Phi - 2\omega \times \vec{V}_R + \frac{1}{3}\nu \text{grad}(\text{div}\vec{V}) + \nu\Delta\vec{V}, \quad (1.57)$$



де останні два члени є математичним записом сили в'язкості,

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad \nu = \frac{\mu}{\rho} - \text{кінематичний коефіцієнт в'язкості, а } \mu -$$

коефіцієнт динамічної в'язкості рідини – параметр, що залежить лише від фізичних властивостей рідини. Якщо рідина є нестисливою ( $\text{div}\vec{V} = 0$ ), то вираз для сили в'язкості спрощується і (1.57) матиме наступний вигляд:

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p - \nabla\Phi - 2\vec{\omega} \times \vec{V}_R + \nu\Delta\vec{V}. \quad (1.58)$$

### 1.4 Рівняння руху у декартовій системі координат

Для розв'язання задач динаміки атмосфери, векторне рівняння (1.42) повинно бути розкладено на три скалярні рівняння, які відповідають складовим по трьох різних координатних осях.

Вираз для сили Коріоліса має наступний вигляд:  $-2\vec{\omega} \times \vec{V}$ . Тобто, щоб знайти проекції сили Коріоліса, необхідно знайти векторний добуток  $\vec{\omega} \times \vec{V}$ , виразивши вектори  $\vec{\omega}$  та  $\vec{V}$  через їх проекції. Позначимо проекції вектору  $\vec{\omega}$  як  $\omega_x$ ,  $\omega_y$  та  $\omega_z$ . Тоді матимемо:

$$\vec{\omega} \times \vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ u & v & w \end{vmatrix} = \vec{i}(\omega_y w - \omega_z v) + \vec{j}(\omega_z u - \omega_x w) + \vec{k}(\omega_x v - \omega_y u).$$

Щоб отримати остаточний вираз для складових сили Коріоліса необхідно знайти, як виражаються проекції  $\omega_x$ ,  $\omega_y$  та  $\omega_z$  (рис. 1.6).

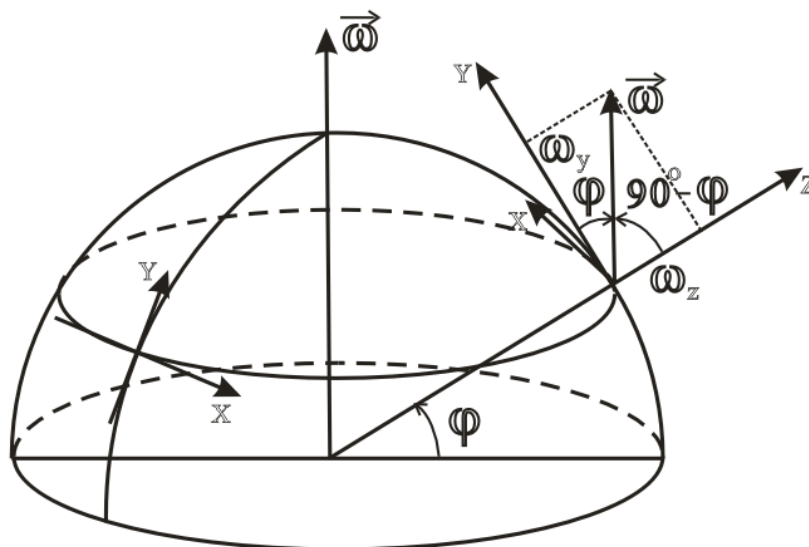


Рисунок 1.11 – До знаходження складових сили Коріоліса

З рис. 1.11 видно, що вектор кутової швидкості Землі знаходиться в площині  $YOZ$ , тобто проекція  $\omega_x$  дорівнює нулю. Кут між вектором  $\vec{\omega}$  та віссю  $OY$  дорівнює  $\varphi$ , а між вектором  $\vec{\omega}$  та віссю  $OZ$  –  $(90^0 - \varphi)$ . Тоді,  $\omega_y = |\vec{\omega}| \cos \varphi \equiv \omega \cos \varphi$ , а  $\omega_z = |\vec{\omega}| \sin(90^0 - \varphi) \equiv \omega \sin(90^0 - \varphi)$ . Тобто в остаточному вигляді складові сили Коріоліса матимуть вигляд:

$$K_x = -2(\omega_y w - \omega_z v) = -2(w\omega \cos \varphi - v\omega \sin \varphi);$$

$$K_y = -2(\omega_z u - \omega_x w) = -2u\omega \sin \varphi;$$

$$K_z = -2(\omega_x v - \omega_y u) = -2u\omega \cos \varphi.$$

В локальній декартовій системі координат (в якій вісь  $x$  спрямована по дотичній до широтного кола на схід, вісь  $y$  – по дотичній до меридіану на північ, вісь  $z$  – по радіусу Землі від центру) векторне рівняння (1.58) можна записати у вигляді трьох скалярних рівнянь

$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + 2\omega_z v - 2\omega_y w + v\Delta u; \quad (1.59)$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - 2\omega_z u + v\Delta v; \quad (1.60)$$

$$\frac{dw}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g + 2\omega_y v + v\Delta w. \quad (1.61)$$

де  $u, v, w$  – компоненти по осях  $x, y, z$  вектору  $\vec{V}$  – швидкості відносно системи координат, що обертається;

$\frac{\partial p}{\partial x}, \frac{\partial p}{\partial y}, \frac{\partial p}{\partial z}$  – компоненти вектору градієнта тиску  $\nabla p$ ;

$g$  – проекція вектору  $\vec{G}$  на вісь  $z$ .

Рівняння (1.59) – (1.61) описують рухи усіх масштабів, які відбуваються в атмосфері Землі: від мікромасштабних рухів, які пов'язані з диханням рослин, до рухів планетарного масштабу.

В гідродинамічних методах прогнозу погоди основна увага приділяється вивченню насамперед атмосферних процесів синоптичного масштабу, тобто таких процесів, які визначають формування погодних умов над великими територіями.

Шляхом оцінок порядків членів рівнянь (1.59–1.61) за допомогою таблиць порядків або методів теорії подібності можна показати, що для

великомасштабних рухів повітря вільної атмосфери ці рівняння істотно спрощуються і набувають вигляду:

$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + 2\omega_z v; \quad (1.62)$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - 2\omega_z u; \quad (1.63)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g; \quad (1.64)$$

З перших двох рівнянь випливає, що основними силами, які діють в атмосфері вище планетарного граничного шару, є сили баричного градієнта і Коріоліса. Третє рівняння (1.64) показує, що для великомасштабних процесів вертикальна складова баричного градієнта майже урівноважується силою тяжіння, тобто атмосфера перебуває у стані гідростатичної рівноваги. Таким чином рівняння (1.62)–(1.64) є математичним записом закону збереження кількості руху для великомасштабних атмосферних процесів.

### 1.5 Рівняння припливу тепла і нерозривності

В термодинаміці атмосфери використовуються висновки, які випливають із закону збереження енергії. Цей закон в загальному вигляді можна сформулювати так: енергія не виникає і не зникає, а лише переходить з одного виду в інший. Кількісно це положення виражається у вигляді рівняння припливу тепла, або рівняння першого початку термодинаміки. Встановимо вид цього рівняння для ідеального газу, до якого близьке сухий і вологе ненасичене повітря. Надамо повітряній частинці деяку кількість тепла  $dQ$  (це може бути будь-яка енергія: механічна, електрична, теплова, ядерна тощо). При цьому внутрішня енергія частинки зростає на  $du$  і одночасно частинка здійснює роботу проти зовнішніх сил  $dw$ :

$$dQ = du + dw \quad (1.65)$$

Отримаємо вирази для  $du$  і  $dw$ . Оскільки сухе і вологе ненасичене повітря близьке до ідеального, то

$$du = C_V dT \quad (1.66)$$

де  $C_V$  – питома теплоємність при сталому об'ємі,  $dT$  – збільшення абсолютної температури за рахунок припливу тепла  $dQ$ .

В атмосфері робота проти зовнішніх сил може складатися тільки із роботи розширення, тоді

$$dw = PdV \quad (1.67)$$

де  $P$  – сила тиску, яка здійснює роботу розширення,  $dV$  – зміна об'єму повітря за рахунок нагріву ( $V = \frac{1}{\rho}$  – питомий об'єм).

З урахуванням (1.67), (1.66) рівняння (1.65) набуває вигляду

$$dQ = C_V dT + PdV \quad (1.68)$$

Перетворимо (1.65) таким чином, щоб в нього входили тільки вимірювані величини. Для цього скористаємось рівнянням стану повітря

$$PV = RT \quad (1.69)$$

де  $R$  – питома газова стала.

Із (1.69) шляхом диференціювання отримаємо

$$PdV + VdP = RdT \quad (1.70)$$

або

$$PdV = RdT - VdP$$

з урахуванням того, що із (1.69)  $V = \frac{RT}{P}$ , перепишемо рівняння (1.70)

$$PdV = RdT - \frac{RT}{P} dP \quad (1.71)$$

Підставивши (1.71) в рівняння (1.68), отримаємо

$$dQ = C_V dT + RdT - \frac{RT}{P} dP$$

$$dQ = (C_V + R)dT - \frac{RT}{P} dP \quad (1.72)$$

Розглянемо окремий випадок – ізобаричний процес, тобто такий процес, який проходить при сталому тиску ( $P = const$ ), в цьому випадку  $dP = 0$  і рівняння (1.72) набуває вигляду

$$dQ = (C_V + R)dT \quad (1.73)$$

З другого боку, при ізобаричному процесі

$$dQ = C_p dT \quad (1.74)$$

де  $C_p$  – питома теплоємність при постійному тиску.

Таким чином, із співвідношень (1.73) і (1.74) отримаємо, що

$$C_p = C_V + R$$

З урахуванням цього виразу отримаємо рівняння припливу тепла у вигляді, який найбільш часто використовується в метеорології:

$$dQ = C_p dT - \frac{RT}{P} dP.$$

Це рівняння можна записати і в такій, більш зручній для моделювання формі

$$\frac{dQ}{dt} = C_p \frac{dT}{dt} - \frac{RT}{P} \frac{dP}{dt}, \quad (1.75)$$

де  $\frac{dQ}{dt}$  – приплив тепла до одиничної маси повітря за одиницю часу.

Якщо ввести величину  $\varepsilon = \rho \frac{dQ}{dt}$ , тобто приплив тепла до одиничного об'єму, рівняння (1.75) відносно похідної  $\frac{dT}{dt}$ , запишеться так

$$\frac{dT}{dt} = \frac{RT}{C_p P} \frac{dP}{dt} + \frac{\varepsilon}{C_p \rho}. \quad (1.76)$$

Ця форма найчастіше використовується при моделюванні атмосферних процесів.

Рівняння (1.73) показує, що зміни температури в повітряних масах, які рухаються, відбуваються, з одного боку, за рахунок змін тиску (перший член правої частини) – це адіабатичні зміни; а з другого боку, за рахунок зовнішнього припливу тепла  $\varepsilon$ . Цей приплив тепла складається із різних видів теплової енергії

$$\varepsilon = \varepsilon_{\text{л}} + \varepsilon_{\text{т}} + \varepsilon_{\text{ф}} \quad (1.77)$$

де  $\varepsilon_{\text{л}}$  – приплив тепла за рахунок перетворення сонячної енергії в атмосфері;

$\varepsilon_{\text{т}}$  – приплив тепла, обумовлений турбулентним обміном, тобто турбулентний приплив тепла;

$\varepsilon_{\text{ф}}$  – приплив тепла, пов'язаний з фазовими переходами води в атмосфері.

При математичному опису хвильових процесів досить часто рівняння (1.77) записується в термінах потенціальної температури  $\theta$ . Відомо, що

потенціальна – це температура, яку отримує повітряна частинка, якщо її сухоадіабатично опустити або підняти до рівня, де атмосферний тиск становить 1000 гПа.

$$\theta = T \left( \frac{1000}{p} \right)^{R/c_p} \quad (1.78)$$

Після логарифмування і диференціювання (1.78) за часовою координатою, отримаємо

$$\ln \theta = \ln T + \frac{R}{c_p} (\ln 1000 - \ln p)$$

Диференціювання цього виразу по часовій координаті  $t$  приведе до рівняння

$$\frac{1}{\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{T} \frac{dT}{dt} - \frac{R}{c_p p} \frac{dp}{dt} \quad \text{або}$$

якщо помножити обидві частини цього рівняння на  $T$  і  $c_p$ , останнє рівняння матиме вигляд

$$c_p \frac{T}{\theta} \frac{d\theta}{dt} = c_p \frac{dT}{dt} - \frac{RT}{p} \frac{dp}{dt}. \quad (1.79)$$

Якщо порівняти рівняння (1.76) і (1.79) показує, що їх праві частини однакові, а це означає, що й ліві частини також однакові, тобто можна записати

$$c_p \frac{T}{\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{dQ}{dt}. \quad (1.80)$$

Із (1.80) випливає, що зміни потенціальної температури в повітряній масі здійснюються тільки за рахунок зовнішнього припливу тепла  $\frac{dQ}{dt}$ .

За відсутності зовнішніх припливів тепла ( $\frac{dQ}{dt} = 0$ ) рівняння (1.80), запишемо так

$$c_p \frac{T}{\theta} \frac{d\theta}{dt} = 0. \quad (1.81)$$

Оскільки в (1.81)  $\theta$  і  $T$  – температури в абсолютній шкалі, їх відношення можна вважати близьким до одиниці, тепер поділимо обидві частини рівняння на  $c_p$  і тоді отримаємо

$$\frac{d\theta}{dt} = 0, \quad \text{тобто} \quad \frac{\partial \theta}{\partial t} + u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} + w \frac{\partial \theta}{\partial z} = 0. \quad (1.82)$$

Такий вигляд має рівняння припливу тепла в термінах потенціальної температури для адіабатичного процесу.

Для суцільних середовищ, до яких належить атмосфера (принаймні до висоти в декілька сотень кілометрів) справедливе рівняння нерозривності, яке має також назву рівняння неперервності або суцільності середовища. Фізично воно виражає факт незнищенності маси рідини або газу.

Це рівняння можна отримати, якщо зафіксувати якийсь об'єм повітря і визначити в ньому баланс маси, тобто знайти різницю між припливом маси повітря в об'єм і його відпливом. В результаті отримуємо рівняння

$$\frac{d\rho}{dt} = -\text{div}\rho\vec{V}, \quad \text{тобто} \quad \frac{d\rho}{dt} = -\nabla \cdot \rho\vec{V}$$

або

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = -\left(\vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)(\vec{i}\rho u + \vec{j}\rho v + \vec{k}\rho w).$$

Відомо, що скалярний добуток дорівнює сумі добутоків однойменних проекцій, тому

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = -\left(\frac{\partial\rho u}{\partial x} + \frac{\partial\rho v}{\partial y} + \frac{\partial\rho w}{\partial z}\right). \quad (1.83)$$

Якщо взяти похідні в правій частині (1.83), то одержимо

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = -\left(\rho\frac{\partial u}{\partial x} + u\frac{\partial\rho}{\partial x} + \rho\frac{\partial v}{\partial y} + v\frac{\partial\rho}{\partial y} + \rho\frac{\partial w}{\partial z} + w\frac{\partial\rho}{\partial z}\right).$$

Перенесемо в ліву частину останнього рівняння члени, які містять похідні від  $\rho$ , а в правій частині об'єднаємо члени, які залишилися і винесемо  $\rho$  за дужки, отримуємо таке рівняння

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + u\frac{\partial\rho}{\partial x} + v\frac{\partial\rho}{\partial y} + w\frac{\partial\rho}{\partial z} = -\rho\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right). \quad (1.84)$$

Оскільки ліва частина (1.65) являє собою повну або індивідуальну похідну від  $\rho$ , то останнє рівняння можна записати у вигляді

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} &= -\rho\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) \quad \text{або} \\ \frac{d\rho}{dt} &= -\rho\text{div}\vec{V}. \end{aligned} \quad (1.85)$$

Це рівняння показує, що зміна густини в об'ємі повітря, який рухається, відбувається за рахунок дивергенції вектору швидкості, тобто поля густини

і швидкості руху повітря пов'язані рівнянням нерозривності і тому незалежно від поля  $V$  не можна задавати поле густини і навпаки.

Рівняння нерозривності для нестислового середовища ( $\rho = \text{const}$ ,  $\frac{d\rho}{dt} = 0$ ) має вигляд

$$\rho \operatorname{div} \vec{V} = 0 \Rightarrow \operatorname{div} \vec{V} = 0. \quad (1.86)$$

Запишемо тепер всю систему рівнянь гідротермодинаміки; при цьому рівняння руху візьмемо у вигляді (1.63), рівняння нерозривності у вигляді (1.66), а рівняння припливу тепла – у вигляді (1.60), де ліву частину представимо у частинних похідних.

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + 2\omega_z v + \nu \Delta u \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - 2\omega_z u + \nu \Delta v \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g + 2\omega_y v + \nu \Delta w \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + w \frac{\partial \rho}{\partial z} &= -\rho \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} &= \frac{RT}{C_p P} \frac{dP}{dt} + \frac{\varepsilon}{C_p \rho}. \end{aligned} \quad (1.87)$$

$$p = \rho RT$$

Останнє рівняння системи (рівняння стану) не містить нових невідомих і тому використовується для замкнення цієї системи. Як видно із (1.70), невідомими величинами є  $u$ ,  $v$ ,  $w$ ,  $p$ ,  $T$  і  $\varepsilon$ . Якщо  $\varepsilon = 0$ , тобто розглядаються адіабатичні процеси, або  $\varepsilon$  відомою величиною, то система (1.70) містить 6 рівнянь і 6 невідомих і, таким чином, являє собою замкнену систему, яка може бути розв'язана. Але ця система складається із нелінійних членів, тому для неї неможливо отримати аналітичний розв'язок, тобто розв'язок у вигляді функції (формули), через що система розв'язується приблизними чисельними методами.

Проте отримати аналітичний (точний) розв'язок дуже корисно, тому що завдяки його аналізу можна виявити основні фізичні властивості досліджуваного процесу. Для отримання аналітичного розв'язку система рівнянь або окремі рівняння приводяться до лінійного вигляду. З математики відомо, що лінійні рівняння завжди мають аналітичні розв'язання. Для приведення нелінійних рівнянь до лінійного вигляду використовується так званий метод малих збурень, який буде розглянуто нижче.



## 1.6 Рівняння вихору вектору швидкості вітру

В сучасних задачах прогнозу погоди широко використовуються диференціальні характеристики двовимірного поля швидкості – вихор або завихреність і дивергенція. Для успішного використання цих величин необхідно детально розглянути їх фізичний зміст та властивості.

Завдяки великій ролі вказаних характеристик необхідно вміти визначити їх чисельні значення. Вся справа в тому, що ці характеристики не піддаються безпосередньому вимірюванню подібно, наприклад, вітру або температурі. Тому доводиться визначати вихор та дивергенцію непрямым шляхом, інакше кажучи, обчислювати їх за допомогою відомих полів інших метеорологічних величин: тиску, вітру тощо.

Існує багато різних способів обчислення цих характеристик. Ці способи необхідно привести до системи, виявити переваги та недоліки різних способів, межі їх застосування та використовувати при розв'язанні задач.

### 1.6.1 Фізичне тлумачення вихору та дивергенції

Рух суцільного середовища – рідини або газу, зокрема, повітря – звичайно буває дуже складним. Навіть рух малої (теоретично – нескінченно малої) частинки протягом надто малого часу є звичайно складним, і для успішного вивчення такого руху зручно розглядати його як результат накладених один на одного декількох більш простих рухів.

Можна вивчити кожний з цих простих рухів, а потім, накладаючи їх один на одного, розглядати реальні рухи рідини або газу.

Почнемо з руху абсолютно твердого тіла, тобто такого тіла, яке не піддається змінюванню форми. З курсу механіки відомо, що будь-який рух такого тіла можна розкласти на два простих рухи: паралельне переміщення і обертання навколо осі, яка проходить через будь-яку точку тіла, наприклад, його центр ваги. Паралельне переміщення характеризується лінійною швидкістю  $\vec{V}$  тіла, обертання – вектором кутової швидкості  $\vec{\sigma}$ , який спрямовано уздовж осі обертання і чисельно дорівнює подвійній кутовій швидкості обертання  $\omega$ .

Обертальна компонента руху частинки рідини або газу описується вектором  $\vec{\Omega}$ , який називають вихором швидкості або ротором швидкості і позначають так

$$\vec{\Omega} = \text{rot}\vec{V} = \nabla \times \vec{V}, \quad (1.88)$$

Подаючи векторний доданок у вигляді визначника

$$\nabla \times \vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w \end{vmatrix} \quad (1.89)$$

і розкриваючи його за правилом Крамера, одержимо

$$\vec{\Omega} = \vec{i} \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \vec{j} \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \vec{k} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right). \quad (1.90)$$

Множники при одиничних ортах є проєкціями (складовими) вихору  $\vec{\Omega}(\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z)$  на осі декартових координат:

$$\Omega_x = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}; \quad \Omega_y = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}; \quad \Omega_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (1.91)$$

Кожна складова вихору швидкості характеризує обертання частинки у площині, перпендикулярній до осі обертання. Зокрема, вертикальна складова  $\Omega_z$  означає обертання частинки у горизонтальній площині навколо вертикальної осі, причому для додатних значень це обертання відбувається проти годинникової стрілки при спостереженні зверху.

Оскільки для великомасштабних атмосферних рухів горизонтальні складові швидкості вітру  $u$  і  $v$  принаймні на два порядки більші, ніж вертикальна швидкість  $w$ , то при аналізі ротації рухів в об'єктах такого масштабу найцікавішим є насамперед вертикальна складова  $\Omega_z$ . Внаслідок цього горизонтальними складовими вихору швидкості  $\Omega_x, \Omega_y$  можна знехтувати у порівнянні з вертикальною складовою. Для мезомасштабних вихорів з горизонтальними осями обертання (наприклад, шквали у грозовій хмарі) таке наближення, не є правомочним, тому що порядок усіх трьох складових тривимірного потоку  $(u, v, w)$  є приблизно однаковим, і тому  $O(\Omega_x, \Omega_y) \approx O(\Omega_z)$ .

Чисельно вихор швидкості дорівнює подвійній кутовій швидкості обертання частинки навколо миттєвої осі обертання

$$\vec{\Omega} = 2\vec{\omega} \quad \text{а модуль} \quad |\vec{\Omega}| = 2|\vec{\omega}|. \quad (1.92)$$

Згідно з (1.91) проєкції  $\vec{\Omega}$  на осі координат мають вигляд

$$\Omega_x = 2\omega_x; \quad \Omega_y = 2\omega_y; \quad \Omega_z = 2\omega_z. \quad (1.93)$$

Важливою характеристикою поля швидкості вітру є також дивергенція

$$\operatorname{div} \vec{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z},$$

яка дорівнює швидкості відносного розширення елементарної частинки. Інакше кажучи, якщо нескінченно малий об'єм  $\delta\tau$  частинки за час  $\delta t$  збільшився на  $d\delta\tau$ , то

$$\operatorname{div} \vec{V} = \frac{1}{\delta\tau} \frac{d\delta\tau}{dt} \quad (1.94)$$

Формула (1.94) показує, що  $\operatorname{div} \vec{V} > 0$  у тому випадку, коли об'єм частинки, яка рухається, збільшується; якщо  $\operatorname{div} \vec{V} < 0$ , об'єм рухомої частинки зменшується.

Необхідно пам'ятати, що дивергенція і вихор швидкості описують не рух у цілому, а лише одну якусь його компоненту, тобто один з його простих рухів, на які можна розкласти реальний складний рух. Тому, якщо дивергенція швидкості не дорівнює нулю, це не означає, що рух частинки є просто її розширення або стиснення; також, якщо вихор швидкості відрізняється від нуля, то це не означає, що рух частинки є тільки її обертання. Це означає лише наявність обертальної складової спільного руху.

Отже, для атмосферних вихорів синоптичного масштабу  $O(\Omega_x, \Omega_y) \ll O(\Omega_z)$ , і тому  $O(\Omega) \approx O(\Omega_z)$ , тобто циклони і антициклони можна розглядати як великомасштабні вихори з квазівертикальними осями обертання. У північній півкулі повітря у циклонах обертається проти годинникової стрілки і тому  $\Omega_z > 0$ , а в антициклонах – за годинниковою стрілкою ( $\Omega_z < 0$ ); у південній півкулі обертання повітря у циклонах та антициклонах є зворотним.

Складові вихору швидкості  $\vec{\Omega}$  (1.87), (1.89) характеризують обертальний рух повітря відносно земної поверхні і тому сам вихор  $\vec{\Omega}$  має назву відносного. Інакше кажучи, обертальний момент створюється самою структурою тривимірного потоку повітряної маси незалежно від того, обертається Земля як планета чи ні. З цього, зокрема, випливає, що відносний вихор швидкості не обов'язково пов'язаний з коловим рухом. Так, наприклад, при прямолінійному русі вздовж осі  $x$  ( $v = w = 0; u \neq 0$ ), коли складова швидкості  $u$  зменшується в напрямку осі  $y$ , тобто  $\frac{\partial u}{\partial y} < 0$ , то згідно з формулою (1.87) виникає додатний вихор  $\Omega_z$ . На рис. 1.7

представлено саме такий потік. Видно, що за рахунок зміни швидкості руху в напрямку, перпендикулярному до потоку, частинки середовища, які розташовані на лінії  $AB$ , через одиницю часу займуть положення  $A'B'$ . Видно, що частинки здійснюють поворот в горизонтальній площині проти годинникової стрілки на кут, який на рисунку показано подвійною стрілкою. Оскільки проти годинникової стрілки частинки повітря рухаються в циклонах, додатний вихор називається циклонічним. Від'ємний вихор, який описує обертальний рух за годинниковою стрілкою, називається антициклонічним.

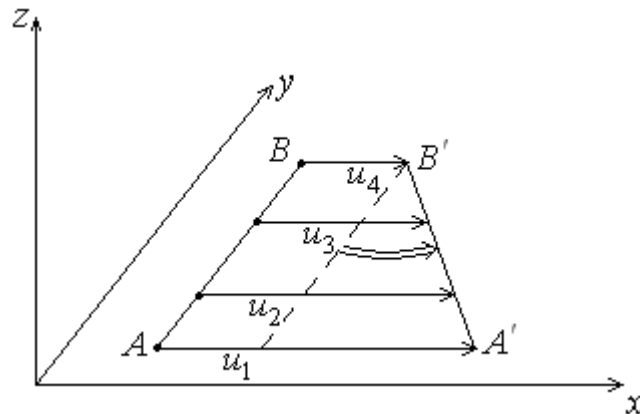


Рисунок 1.12 – Схема прямолінійного потоку, в якому  $\frac{\partial u}{\partial y} < 0$

Окрім відносного обертання, частинка у земній атмосфері бере участь у суто коловому обертанні, що пов'язане з ефектом обертання Землі як планети. За рахунок сили тяжіння повітряна частинка у цьому випадку втягується в обертальний рух Землі. Такий обертальний момент характеризується переносним чи планетарним вихором  $\vec{\Omega}_E$ , який дорівнює за модулем подвійній кутовій швидкості обертання Землі, тобто:

$$\vec{\Omega}_E = 2\vec{\omega}, \quad \left| \vec{\Omega}_E \right| = 2\omega. \quad (1.95)$$

У системі координат, де осі  $x$  і  $y$  лежать в горизонтальній площині, а ось  $z$  спрямована по вертикалі, проекції вектора  $\vec{\omega}$  дорівнюють:  $\omega_x = 0$ ,  $\omega_y = \omega \cos \varphi$ ,  $\omega_z = \omega \sin \varphi$ , тоді складові переносного вихору  $\vec{\Omega}_E$  визначаються співвідношеннями:

$$\Omega_{E,x} = 0; \quad \Omega_{E,y} = 2\omega \cos \varphi; \quad \Omega_{E,z} = 2\omega \sin \varphi. \quad (1.96)$$

Треба звернути увагу, що у формулах (1.93) і (1.96) кутові швидкості обертання повністю розрізняються за своєю природою. У виразі для відносного вихору (1.93)  $\vec{\omega}$  – це кутова швидкість обертання частинки, яка зумовлена тільки структурою повітряного потоку і тому не є сталою

величиною, відповідно,  $\vec{\Omega} \neq const$ . На противагу цьому у виразі для переносного вихору (1.96)  $\vec{\omega}$  залежить тільки від широти місця і в межах широтного кола ( $\varphi = const$ ) є величиною сталою і пропорційною швидкості обертання Землі  $\vec{\omega}$ . Звідси, зокрема, випливає, що переносний вихор частинки змінюється тільки при її переміщенні вздовж меридіана.

Для подальшого фізичного аналізу зручно ввести також поняття абсолютного вихору

$$\vec{\Omega}_a = \vec{\Omega} + \vec{\Omega}_E, \quad (1.97)$$

який є сумою відносного та переносного вихорів і характеризує обертальний рух частинки відносно інерційної системи координат, яка не пов'язана з Землею, тобто осі якої знаходяться за межами Землі.

З рівнянь (1.93), (1.96) і (1.97) випливає, що складові абсолютного вихору визначаються виразами:

$$(\Omega_a)_x = \Omega_x, \quad (\Omega_a)_y = \Omega_y + 2\omega \cos \varphi \quad (\Omega_a)_z = \Omega_z + 2\omega \sin \varphi \quad \text{або}$$

$$(\Omega_a)_x = \Omega_x, \quad (\Omega_a)_y = \Omega_y + \ell_1, \quad (\Omega_a)_z = \Omega_z + \ell_2$$

де  $\ell_1, \ell_2$  – параметри Коріоліса.

Рух, при якому вихор швидкості відрізняється від нуля, часто називають вихровим рухом. Із сказаного випливає, що вихровий рух і обертальний рух не є одне і теж.

В метеорології використовуються головним чином не дивергенція і вихор вектору швидкості (тривимірному вектору), а дивергенція і вихор швидкості вітру, тобто двовимірному вектору, який лежить в горизонтальній площині (або на ізобаричній поверхні). Це пов'язано з тим, що доцільно розглядати не вектор швидкості у цілому, а окремо його горизонтальну складову (вектор швидкості вітру) і окремо вертикальну складову.

Якщо направити ось  $z$  по вертикалі, то дивергенція швидкості вітру  $D_s$  запишеться у вигляді формули:

$$D_s = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}. \quad (1.98)$$

*Дивергенція швидкості вітру* (або просто дивергенція)  $D_s$  описує швидкість відносного збільшення площі проекції даної частинки на горизонтальну площину  $\delta s$  при її русі

$$D_s = \frac{1}{\delta s} \frac{d\delta s}{dt}. \quad (1.99)$$

*Вихор швидкості вітру* (або просто вихор) являє собою скалярну величину, яка дорівнює вертикальній складовій вихору руху  $\Omega_z$

$$\Omega_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}, \quad (1.100)$$

тобто подвійній миттєвій кутовій швидкості ( $\vec{\sigma}$ ) обертання частинки навколо вертикальної осі:

$$\Omega_z = 2\omega_z.$$

### 1.6.2 Рівняння вихору

Практично всі процеси, які спостерігаються в атмосфері, мають вихровий характер. У випадку великомасштабних рухів, в яких горизонтальна складова на 2-3 порядки більша від вертикальної, основну роль відіграє вертикальна складова ( $\Omega_z$ ) вихору швидкості руху:

$$\Omega_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (1.101)$$

Рівняння руху є висновком з рівнянь руху, які запишемо в такому вигляді:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \ell v + F_x, \quad (1.102)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - \ell u + F_y, \quad (1.103)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g + \ell_1 v + F_z. \quad (1.104)$$

де  $F_x, F_y, F_z$  – проекції сили тертя, яка діє на одиницю маси повітря.

Структура виразу (1.97) підказує, як слід поступити з рівняннями руху для отримання рівняння для вертикальної проекції вихору швидкості руху. Так, для того отримати рівняння для  $\Omega_z$ , потрібно рівняння (1.102) продиференціювати по  $y$ , а рівняння (1.103) – по  $x$  і з отриманого таким чином другого рівняння відняти перше.

Нове рівняння матиме вигляд

$$\begin{aligned} \frac{d(\Omega_z + 2\omega_z)}{dt} = & -(\Omega_z + 2\omega_z) \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \left( \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \\ & + \left( 2\omega_x \frac{\partial w}{\partial x} + 2\omega_y \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{1}{\rho^2} (\nabla p \times \nabla \rho)_z + (\nabla \times \vec{F})_z, \quad (1.105) \end{aligned}$$

При цьому враховувалось, що локальна похідна за часом від вертикальної проекції переносного вихору і дивергенція цієї складової дорівнюють нулю.

Два останніх доданки в рівнянні (1.101) являють собою проекції на вісь  $z$  векторного добутку градієнта густини і тиску повітря

$$\nabla p \times \nabla \rho = \vec{i} \left( \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\partial \rho}{\partial z} \frac{\partial p}{\partial y} \right) + \vec{j} \left( \frac{\partial \rho}{\partial z} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial z} \right) + \vec{k} \left( \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{\partial p}{\partial x} \right)$$

і вихору сили тертя

$$\nabla \times \vec{F} = \vec{i} \left( \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) + \vec{j} \left( \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) + \vec{k} \left( \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right).$$

Аналогічно можна отримати рівняння і для проекцій вихору  $\Omega_x$  і  $\Omega_y$  застосовуючи вирази (1.69, 1.75):

$$\begin{aligned} \frac{d(\Omega_x + 2\omega_x)}{dt} = & -(\Omega_x + 2\omega_x) \left( \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) - \left( \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \\ & + \left( 2\omega_y \frac{\partial u}{\partial y} + 2\omega_z \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \frac{1}{\rho^2} (\nabla p \times \nabla \rho)_x + (\nabla \times \vec{F})_x, \end{aligned} \quad (1.106)$$

$$\begin{aligned} \frac{d(\Omega_y + 2\omega_y)}{dt} = & -(\Omega_y + 2\omega_y) \left( \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \left( \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \\ & + \left( 2\omega_z \frac{\partial v}{\partial z} + 2\omega_x \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{1}{\rho^2} (\nabla p \times \nabla \rho)_y + (\nabla \times \vec{F})_y, \end{aligned} \quad (1.107)$$

Якщо тепер ліву і праву частини рівнянь (1.105) – (1.107) помножити відповідно на  $\vec{k}$ ,  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$ , а потім їх скласти, то отримаємо рівняння для абсолютного вихору  $\vec{\Omega}_a = \vec{\Omega} + \vec{\Omega}_E$ :

$$\frac{d\vec{\Omega}_a}{dt} = (\vec{\Omega}_a \cdot \nabla) \vec{c} - \vec{\Omega}_a (\nabla \cdot \vec{c}) + \frac{(\nabla p \times \nabla \rho)}{\rho^2} + (\nabla \times \vec{F}), \quad (1.108)$$

де оператори

$$(\vec{\Omega}_a \cdot \nabla) \vec{c} = \left( \Omega_{ax} \frac{\partial}{\partial x} + \Omega_{ay} \frac{\partial}{\partial y} + \Omega_{az} \frac{\partial}{\partial z} \right) (\vec{i}u + \vec{j}v + \vec{k}w), \quad (1.109)$$

$$\vec{\Omega}_a (\nabla \cdot \vec{c}) = (\vec{i}\Omega_{ax} + \vec{j}\Omega_{ay} + \vec{k}\Omega_{az}) \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right). \quad (1.110)$$

Безпосередньою перевіркою переконаємося в тому, що проекції на осі  $x$ ,  $y$ ,  $z$  правої частини рівняння (1.92) співпадають з правими частинами рівнянь (1.89) – (1.91).

Рівняння для відносного вихору  $\vec{\Omega}$  швидкості вітру у векторній формі матиме вигляд:

$$\rho \frac{d}{dt} \left( \frac{\vec{\Omega} + \vec{\omega}}{\rho} \right) = [(\vec{\Omega} + \vec{\omega}) \cdot \nabla] \vec{c} + \frac{(\nabla p \times \nabla \rho)}{\rho^2} + \nabla \times \vec{F}. \quad (1.111)$$

Перепишемо рівняння для вертикальної проекції вихору швидкості руху (1.83) відносно локальної похідної, врахувавши, що локальна похідна за часом від вертикальної проекції переносного вихору і дивергенція цієї складової дорівнюють нулю:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Omega_z}{\partial t} = & - \left( u \frac{\partial \Omega_z}{\partial x} + v \frac{\partial \Omega_z}{\partial y} \right) - w \frac{\partial \Omega_z}{\partial z} - \beta v - \\ & - (\Omega_z + 2\omega_z) \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \left( \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \\ & + \frac{1}{\rho^2} \left( \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \left( \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right), \end{aligned} \quad (1.112)$$

де  $\beta = \frac{\partial(2\omega_z)}{\partial y} = \frac{\partial(2\omega \cos \varphi)}{a}$  – параметр Россбі,  $a$  – радіус Землі (вісь  $y$  спрямована уздовж дотичної до меридіану).

Згідно з рівнянням (1.96), зміна вихору з часом у фіксованій точці простору визначається наступними чинниками:

1. Адвекція вихору, яка забезпечує зростання  $\Omega_z$  в передній частині циклону і зменшення  $\Omega_z$  в тилівій. Під впливом саме цього фактору тиск повітря в передній частині циклону часто зменшується, а в тилівій – збільшується. Аналогічний висновок є справедливим відносно антициклону: в його передній частині  $\Omega_z$ , яке є меншим за нуль, з часом зменшується, а в тилівій частині зростає. В цілому адвективний фактор забезпечує перенесення вихору зі швидкістю вітру на рівні поверхонь 700 або 500 гПа.

2. Конвекція вихору, яка забезпечує поширення вихору з одних рівнів на інші.

3. Меридіональне перенесення повітряної маси і вихору: рух на північ супроводжується послабленням циклонічного і посиленням антициклонічного вихору, рух на південь – посиленням циклонічного вихору і послабленням антициклонічного.



Якщо три перших доданки в правій частині рівняння (1.112) перенести в ліву частину і об'єднати їх з локальною похідною  $\frac{\partial \Omega_z}{\partial t}$ , то рівняння матиме вигляд:

$$\begin{aligned} \frac{d(\Omega_z + 2\omega_z)}{dt} = & -(\Omega_z + 2\omega_z) \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \left( \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \\ & + \frac{1}{\rho^2} \left( \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \left( \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right), \end{aligned} \quad (1.113)$$

де  $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z}$  – знак повної (індивідуальної) похідної, яка характеризує зміну величини всередині повітряного об'єму, який рухається.

Сума  $\Omega_z + 2\omega_z$  – вертикальна проекція абсолютного вихору. У випадку, коли всі доданки правої частини (1.113) обертаються на нуль, то абсолютний вихор в повітряному об'ємі, що рухається, зберігає постійне значення (теорема Россбі):

$$\Omega_z + 2\omega_z = const.$$

Таким чином, роль перших трьох доданків правої частини рівняння (1.113) в сполученні з локальною похідною зводиться до перенесення в незмінному вигляді абсолютного вихору разом з об'ємом повітря, що рухається.

В рівнянні (1.113) всі доданки правої частини породжують новий або змінюють існуючий вихор. Їх можна назвати динамічними факторами зміни вихору.

4. Дивергенція горизонтальної швидкості вітру: від'ємна дивергенція породжує новий або посилює існуючий циклонічний вихор; додатна дивергенція породжує новий або посилює існуючий антициклонічний вихор (перший множник  $\Omega_z + 2\omega_z$  в цьому доданку є завжди додатним, оскільки  $2\omega_z > |\Omega_z|$ ).

5. Зміна вертикальної швидкості по горизонталі (найбільш значна роль цього фактору в гірській місцевості).

6. Бароклинний фактор. Розглянемо його в загальному вигляді  $\frac{1}{\rho^2} \nabla p \times \nabla \rho$ . Коли ізобаричні та ізостеричні поверхні не співпадають, рідина є бароклинною і для неї бароклинний вектор  $\frac{1}{\rho^2} \nabla p \times \nabla \rho \neq 0$ . Відносний вихор змінюється з часом за умови, якщо бароклинний вектор відрізнятиметься від нуля. Для ілюстрації цього механізму розглянемо рис. 1.8. Вектори  $\nabla p$  і  $\nabla \rho$  лежать в площині  $A$ . В розглянутому випадку на більш легку рідину праворуч діє та ж сила тиску ( $-\nabla p$ ), що і на важку

рідину – ліворуч. Внаслідок цього більш легка рідина рухатиметься швидше, ніж більш важка (при відсутності інших ефектів).

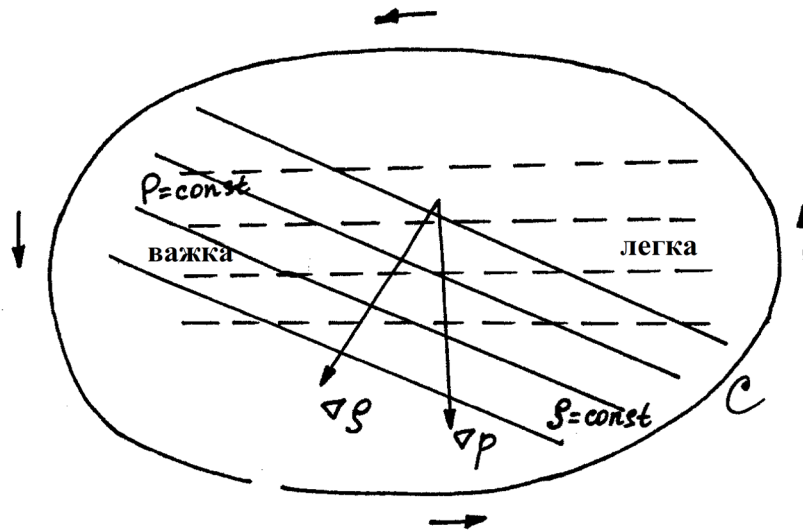


Рисунок 1.13 – До впровадження барокліного фактору

Отже, швидкість руху часток змінюватиметься в просторі. Такий рух згідно з першою теоремою Гемгольца можна представити у вигляді суми поступального і обертального переміщення часток. В результаті уздовж контуру  $C$  виникатиме циркуляція проти годинникової стрілки. Внаслідок дії барокліного фактору утворюватимуться ізобаро-ізостеричні трубки.

В баротропній рідині ( $\rho = \rho(p)$ ) поверхні рівних значень тиску і густини співпадають, тому барокліний фактор дорівнюватиме нулю.

Таким чином, можна зробити висновок, що барокліний фактор, відмінний від нуля, згідно з рівнянням (1.113) породжуватиме новий або посилюватиме існуючий вихор у вертикальній площині.

7. Вертикальна складова вихору сили тертя, яка діє на одиночну масу повітря. З фізичних уявлень і кількісних оцінок випливає, що під впливом цього фактору послаблюється як циклонічний, так і антициклонічний вихор (циклон заповнюється, антициклон руйнується).

В граничному шарі, де вплив сили тертя найбільш суттєвий, сьомий доданок правої частини (1.97) є протилежний з знаком четвертому (дивергентному) доданку і має з ним однаковий порядок. Це означає, що ці фактори в значній мірі компенсують один одного, а їх сума є близькою до нуля.

Більш того, сума

$$2\omega_z \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \left( \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right)$$

строго обертається на нуль в усіх моделях граничного шару атмосфери, якщо в рівняннях руху знехтували нестационарністю і зміною густини повітря по горизонталі.

## 1.7 Питання для самоперевірки

1. Якими метеорологічними величинами можна вичерпно охарактеризувати стан сухого атмосферного повітря, що рухається?
2. Функцією яких аргументів є будь-яка метеорологічна величина?
3. Що характеризує градієнт поля скалярної величини?
4. Які рухи характеризує дивергенція, вихор вектору швидкості?
5. Що характеризує імпульс (кількість руху)?
6. Яке рівняння є математичним записом закону збереження маси?
7. Чим відрізняються рівняння нерозривності для нестисливої і стисливої рідини?
8. Яке рівняння є математичним записом закону збереження енергії?
9. Яке рівняння є математичним записом закону збереження кількості руху (імпульсу)?
10. Які системи відліку називають інерціальними?
11. Які додаткові члени з'являються в неінерціальній системі координат?
12. Які додаткові сили виникають на Землі внаслідок її неінерціальності?
13. Які сили діють в атмосфері?
14. Яка сила є основною рушійною силою в атмосфері?
15. Який фізичний процес називають в'язкістю рідини або газу?
16. Що являє собою сила плавучості?
17. Що характеризує індивідуальна і локальна похідні?
18. Що характеризує горизонтальна адвекція температури?
19. Які фізичні чинники суттєво впливають на зміну потенціальної температури в об'ємі повітря?
20. Які фізичні чинники суттєво впливають на зміну вертикальної складової вихору з часом у фіксованій точці простору?
21. Яка рідина називається бароклинною?
22. Чим відрізняються абсолютний, планетарний та відносний вихор?
23. Чим обумовлений обертальний рух, який описується відносним вихором?
24. Чим обумовлений обертальний рух, який описується планетарним вихором?
25. Що характеризує абсолютний вихор?
26. В яких задачах динамічної метеорології має сенс використовувати абсолютний вихор?

## 2 ДИНАМІКА ВІЛЬНОЇ АТМОСФЕРИ

Вільною атмосферою називають частину тропосфери, що розташована над граничним шаром та в якій вплив підстильної поверхні не позначається на режимі метеорологічних величин.

### 2.1 Спрощення системи рівнянь гідротермодинаміки атмосфери

Система рівнянь гідротермодинаміки, одержана раніше, дозволяє описувати будь-які рухи, що спостерігаються в земній атмосфері. В той же час, просторовий спектр цих атмосферних рухів простягається від сантиметрових розмірів турбулентних вихрів у шарі рослинності до десятків тисяч кілометрів (планетарні хвилі). У цьому розділі ми розглянемо динаміку атмосферних рухів синоптичного масштабу, просторовий масштаб яких складає не менше двох тисяч кілометрів.

Ці рухи характерні для вільної атмосфери – частини атмосфери, на формування динаміки якої мало впливає приземне тертя.

Рухи синоптичного масштабу мають деякі характерні фізичні риси, врахування яких дозволяє істотно спростити вихідну систему рівнянь гідротермодинаміки атмосфери, яку ми отримали у попередньому розділі. Розглянемо ці особливості. Для цього введемо поняття просторового масштабу рухів ( $L$ ) і характерного масштабу швидкості ( $U$ ). Час, за який елементарний об'єм повітря переміститься на відстань  $L$  зі швидкістю  $U$ , представляє собою характерний масштаб часу і дорівнює  $\tau = L/U$ .

Якщо цей проміжок часу істотно менше за період обертання Землі ( $T = 2\pi/\Omega$ ), то за час  $\tau$  цей об'єм навряд чи зможе зазнати впливу від цього обертання. Таким чином, можна припустити, що ефект обертання Землі стане істотним за умови, що

$$\tau \geq T \quad \text{або} \quad L/U \geq 2\pi/\Omega.$$

Оцінимо виконання цієї умови для атмосферних процесів синоптичного масштабу. Маємо

$$L \sim 2000 \text{ км}, \quad U \sim 10 \text{ м/с}, \quad \Omega \sim 7,29 \times 10^{-5} \text{ с}^{-1},$$

тоді ліва частина співвідношення дорівнює  $2 \times 10^5 \text{ с}$ , а права частина  $\sim 10^5 \text{ с}$ . Таким чином, для рухів синоптичного масштабу умова завжди виконується. Отже, першою особливістю атмосферних рухів синоптичного масштабу є істотний вплив сили Коріоліса на динаміку цих процесів.

У метеорології оцінку співвідношення сил інерції і Коріоліса звичайно здійснюють за допомогою безрозмірного параметра  $Ki$ , який будемо

називати числом Кібеля\*

$$Ki = \frac{U}{2 \omega_z L}, \quad (2.1)$$

де  $\omega_z$  – вертикальна складова кутової швидкості обертання Землі.

Таким чином, якщо виконується умова  $Ki \leq 1$ , то вплив сили Коріоліса на динаміку атмосферних рухів стає істотним.

Друга важлива особливість рухів синоптичного масштабу пов'язана з непорівнянністю горизонтального ( $L \sim 2000$  км) і вертикального ( $H \sim 10$  км) масштабів рухів синоптичного масштабу, тобто у вільній атмосфері

$$\frac{H}{L} \ll 1. \quad (2.2)$$

Зі співвідношення (2.2) випливає, що вертикальна складова швидкості повітря в рухах синоптичного масштабу набагато менше від горизонтальної складової, тобто повітряні рухи синоптичного масштабу є квазігоризонтальними. Дійсно, масштаб горизонтальної складової швидкості можна виразити як  $U = L/\tau$ , а масштаб вертикальної складової –  $W = H/\tau$ . Тоді

$$W/U = H/L, \quad (2.3)$$

і в силу (2.3)

$$W/U \ll 1. \quad (2.4)$$

Якщо для цих рухів малі вертикальні швидкості, то можна припустити, що й вертикальні прискорення малі. А малість вертикальних прискорень свідчить про наявність рівноваги сил, що діють у цій площині на частинку повітря. Отже, у вертикальній площині для рухів синоптичного масштабу спостерігається приблизна рівновага сил, що діють на елементарний об'єм повітря і, насамперед, вертикальної складової сили баричного градієнта і сили тяжіння, тобто в цій частині атмосфери виконується умова квазістатичної рівноваги

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g = 0 \quad \text{або} \quad \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \quad (2.5)$$

---

\* Цей параметр пов'язаний з числом Россбі  $\varepsilon = \frac{U}{|\vec{\Omega}|L}$ , де  $\vec{\Omega}$  - вектор кутової швидкості обертання Землі. Число Россбі являє собою відношення сили інерції до сили Коріоліса

Співвідношення (2.5) має назву рівняння статички атмосфери.

Розглянемо тепер, як описані вище особливості атмосферних рухів синоптичного масштабу дозволяють спростити вихідну систему рівнянь гідротермодинаміки атмосфери. Ці спрощення необхідні для того, щоб аналітично досліджувати особливості динаміки рухів цього масштабу.

## 2.2 Вітер у вільній атмосфері

В динамічній метеорології для вільної атмосфери досить поширеними є моделі, в яких швидкість та напрямок вітру напряму залежать від градієнта тиску.

Розглянемо дві найпростіші моделі такого вітру:

- 1) вітер при кругових ізобарах. Цей вітер називають або градієнтним, або гециклострофічним;
- 2) вітер при прямолінійних ізобарах, так званий геострофічний вітер.

### 2.2.1 Градієнтний вітер

Рівняння для визначення градієнтного вітру ( $V_{zp}$ ):

$$\frac{V_{zp}^2}{r} + \ell V_{zp} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = 0, \quad (2.6)$$

де  $r$  – радіус–вектор повітряної частинки,  $\ell$  – параметр Коріоліса,  $\frac{\partial p}{\partial r}$  – градієнт тиску.

Рівняння (2.1) означає рівновагу трьох сил, що віднесені до одиниці маси: відцентрової ( $\frac{V_{zp}^2}{r}$ ), Коріоліса ( $\ell V_{zp}$ ) та градієнта тиску ( $-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r}$ ). Його розв'язок має вигляд:

$$V_{zp} = -\frac{\ell r}{2} + \sqrt{\left(\frac{\ell r}{2}\right)^2 + \frac{r}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r}}, \quad (2.7)$$

або

$$V_{zp} = \frac{\ell r}{2} \left[ -1 + \sqrt{1 + \frac{4}{\rho r \ell^2} \frac{\partial p}{\partial r}} \right], \quad (2.8)$$

Швидкість градієнтного вітру збільшується зі збільшенням градієнта тиску; напрямок співпадає з напрямком дотичної до ізобари. В північній півкулі, де  $\ell > 0$ , в циклоні ( $\frac{\partial p}{\partial r} > 0$ )  $V_{gp}$  – додатна величина, тобто швидкість спрямована проти годинникової стрілки таким чином, що область низького тиску залишається по ліву сторону від напрямку руху (рис. 2.1).

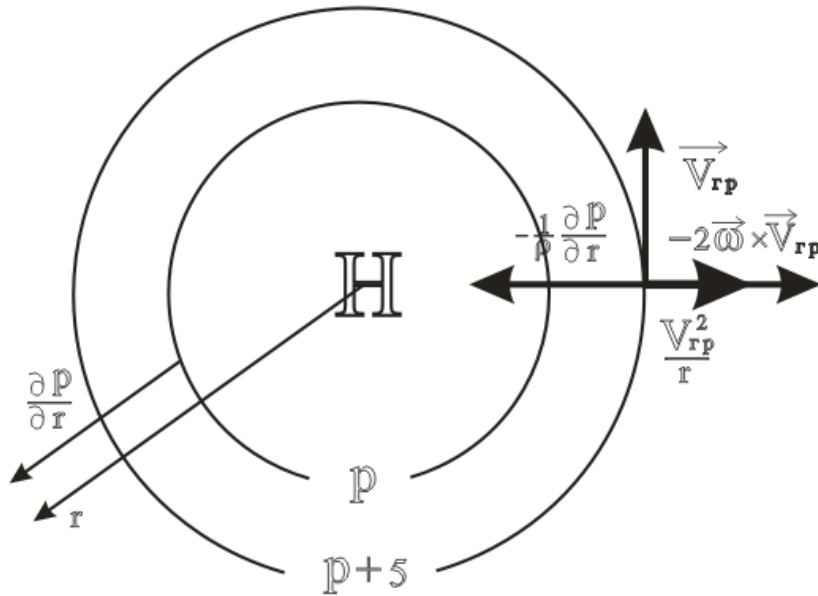


Рисунок 2.1 – Напрямок градієнтного вітру в циклоні в північній півкулі

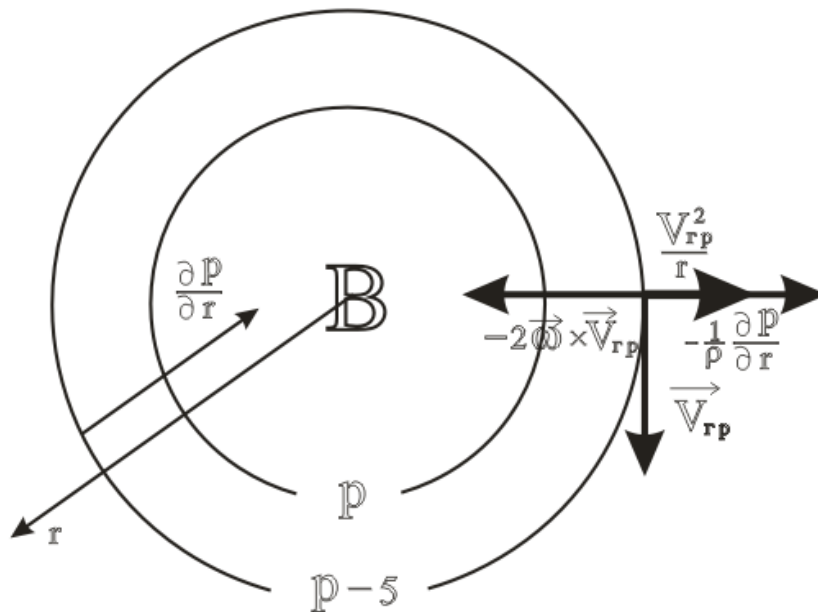


Рисунок 2.2 – Напрямок градієнтного вітру в антициклоні в північній півкулі

В антициклонічному полі ( $\frac{\partial p}{\partial r} < 0$ ),  $V_{cp} < 0$ , тобто рух здійснюється за годинниковою стрілкою та область низького тиску залишається також по ліву сторону (рис. 2.2).

Отже, в полі кругових ізобар швидкість руху залежить від величини баричного градієнта і спрямована по дотичній до ізобари таким чином, що область низького тиску залишається по ліву сторону від напрямку вітру.

В зв'язку з тим, що в циклонах  $\partial p / \partial r > 0$ , а в антициклонах  $\partial p / \partial r < 0$ , то з аналізу формули для швидкості градієнтного вітру (7.87) випливають, принаймні, два висновки:

1) у циклонах швидкість градієнтного вітру  $v_{\theta} > 0$ , тобто у циклонах вектор швидкості спрямований по дотичній до ізобари проти годинникової стрілки. В антициклонах  $v_{\theta} < 0$  – вектор вітру спрямований по дотичній до ізобари за годинниковою стрілкою;

2) через те що в антициклонах  $\partial p / \partial r < 0$ , цей градієнт не може перевищувати деяке критичне значення, рівне

$$\left( \frac{\partial p}{\partial r} \right)_{\max} = \rho r \omega_z^2. \quad (2.9)$$

Крім того, при тому самому значенні горизонтального градієнта тиску в циклоні швидкість градієнтного вітру більше ніж в антициклоні. Це випливає з формули (2.9), тому що в циклонах  $\partial p / \partial r > 0$ , а в антициклонах  $\partial p / \partial r < 0$ .

### 2.2.2 Геоострофічний вітер

В частому випадку, коли радіус кривизни ізобар настільки великий ( $\rightarrow \infty$ ), що їх можна вважати прямолінійними, дією відцентрової сили можна знехтувати. Стаціонарний рух, швидкість якого визначається рівновагою двох сил – сили баричного градієнта і сили Коріоліса, називають геоострофічний вітром.

Вирази для складових швидкості геоострофічного вітру можна отримати з двох перших рівнянь руху, припускаючи, що рух є стаціонарним, та нехтуючи усіма силами, окрім сили Коріоліса та сили баричного градієнта. Третє рівняння вироджується в рівняння квазистатики, оскільки вертикальна складова швидкості дорівнює нулю ( $w = 0$ ). Враховуючи всі припущення, дістанемо рівняння руху у вигляді:

$$0 = 2\omega_z v - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad 0 = -2\omega_z u - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}. \quad (2.10)$$



Звідси знаходимо складові швидкості геострофічного вітру:

$$u_g = -\frac{1}{2\omega_z \rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \quad v_g = \frac{1}{2\omega_z \rho} \frac{\partial p}{\partial x}. \quad (2.11)$$

За визначенням геострофічний вітер – це стаціонарна повітряна течія у прямолінійних ізобарах при відсутності сили тертя. Для модуля вектору геострофічного вітру,  $V_g$ , отримаємо вираз:

$$V_g = \frac{1}{l\rho} \frac{\partial p}{\partial n}, \quad u_g = -V_g \cos \alpha, \quad v_g = V_g \sin \alpha, \quad (2.12)$$

де  $\sin \alpha = \frac{\partial p / \partial y}{\partial p / \partial n}$ ,  $\cos \alpha = \frac{\partial p / \partial x}{\partial p / \partial n}$ ,  $\varphi$  – широта,  $\alpha$  – кут між вектором геострофічного вітру і віссю  $x$ ,  $l = 2 \omega \sin \varphi$  – параметр Коріоліса.

Основні властивості геострофічного вітру.

1) Геострофічний вітер є прямо пропорційним горизонтальному градієнту тиску і обернено пропорційний густині та синусу широти місця. На екваторі поняття геострофічного вітру не має сенсу і тому практичне використання формул (2.11) і (2.12) можливо тільки для широт  $|\varphi| > 5^\circ$ .

2) Геострофічний спрямований уздовж ізобар. Доведемо це твердження. Розглянемо скалярний добуток швидкості геострофічного вітру на горизонтальний градієнт тиску:

$$(\vec{V}_g \cdot \text{grad } p) = u_g \frac{\partial p}{\partial x} + v_g \frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{1}{l\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{l\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad (2.13)$$

Оскільки цей добуток виявився рівним нулю, то це означає, що вектор швидкості геострофічного вітру і градієнт тиску перпендикулярні. Проте градієнт тиску перпендикулярний ізобарам, і тому вітер повинен бути спрямований уздовж ізобар.

3) Відсутність прискорення визначає рівномірний і прямолінійний рух уздовж ізобар. Але швидкість геострофічного вітру буде стала, якщо градієнт тиску не буде змінюватися у напрямку руху. Це з іншого боку означає, що ізобари повинні бути рівнобіжні з постійним градієнтом.

4) Область низького тиску залишається ліворуч щодо руху в північній півкулі і праворуч – у південній. Це твердження відомо як баричний закон вітру.

Очевидно, що, якщо повітряна течія виникає внаслідок дії сили баричного градієнта, то відразу починає діяти сила Коріоліса, яка спрямована під прямим кутом вправо до вектора швидкості. В результаті

встановлюється рівновага цих двох сил і вектор швидкості буде спрямований паралельно ізобарам під прямим кутом до сили баричного градієнта вправо (вліво до градієнта тиску), так, що низький тиск буде ліворуч (рис. 2.3).

Слід зазначити, що в природі ніколи не спостерігається сталий ламінарний рух та ще при строго прямолінійних ізобарах. У цьому розумінні можна було б стверджувати, що це чисто теоретичне поняття. Але, з іншого боку, численні дослідження показали, що вітер у вільній атмосфері дійсно близький до геострофічного. Щоб уникнути непорозумінь, вводять у розгляд так зване квазігеострофічне локальне наближення, яке повинне виконуватися в околі довільної точки з достатньою точністю і служити мірою оцінки характеристик швидкості повітряних течій. Очевидно, що у вільній атмосфері таке наближення буде цілком виправдано, а біля поверхні землі необхідно враховувати, що внаслідок тертя напрямом фактичного вітру буде відхилятися від напрямку ізобар і геострофічного вітру у бік зниженого тиску на кут порядку декількох десятків градусів, а модуль швидкості буде занижений.

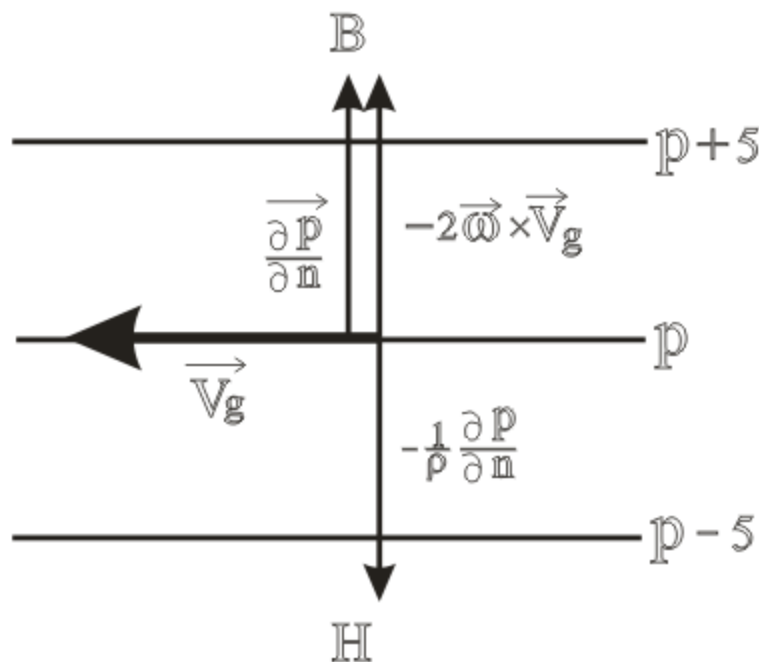


Рисунок 2.3 – Напрямок геострофічного вітру в північній півкулі

Використання виведених співвідношень для вільної атмосфери вимагає переходу до ізобаричної системи координат, зокрема для карт баричної топографії варто перейти від тиску до геопотенціалу. Нагадаємо, що геопотенціалом або потенціалом сили ваги називається робота, яку необхідно зробити, щоб підняти одиницю маси від вихідного рівня до деякої

висоти. Геопотенціал має вираз  $\Phi = \int_0^z g dz$  і власне кажучи характеризує потенційну енергію повітряної частинки, що знаходиться на висоті  $z$ . При переміщенні частинки вздовж рівневої поверхні робота сили ваги дорівнює нулю. За нульову поверхню прийнято вважати поверхню моря. З рівнянь статички і стану маємо

$$d\Phi = g dz = -\frac{dp}{\rho} = -RT \frac{dp}{p}. \quad (2.14)$$

Виконуючи інтегрування цього рівняння від поверхні моря до рівня  $p$  і вводячи середню віртуальну температуру в шарі  $\bar{T}_v$ , знаходимо

$$\Phi_{abc} = R\bar{T}_v \ln \frac{p_0}{p}. \quad (2.15)$$

Дана формула показує пряму залежність геопотенціалу від середньої температури і тиску на рівні моря: чим вище температура і приземний тиск, тим більше значення має геопотенціал. Одиницею виміру геопотенціалу довгий час служив динамічний метр  $[\Phi] = 10 \text{ м}^2/\text{с}^2$ , але в даний час використовується геопотенціальний метр (гп.м):

$$1 \text{ гп.м} = \frac{9.8}{g_{45}} \text{ м}, \quad (2.16)$$

де  $g_{45}$  – прискорення сили ваги на широті  $45^\circ$  і рівні моря. З цього співвідношення видно, що кількісно геопотенціальний і геометричний метри відрізняються незначно.

Оскільки тиск уздовж ізобаричної поверхні не змінюється  $dp = \frac{\partial p}{\partial n} dn + \frac{\partial p}{\partial z} dz = 0$ , то відповідно до рівняння статички і визначенню геопотенціалу маємо:

$$\frac{\partial p}{\partial n} = -\frac{\partial p}{\partial z} \frac{dz}{dn} = \rho \frac{\partial \Phi}{\partial n}, \quad (2.17)$$

Підстановка в (2.17) дає:

$$V_g = \frac{1}{l} \frac{\partial \Phi}{\partial n} = \frac{9.8}{l} \frac{\partial H}{\partial n}, \quad (2.18)$$

де  $H$  – висота ізобаричної поверхні в гп.м.

Із зв'язку між  $\Phi$  и  $p$  випливає, що вектор геострофічного вітру перпендикулярний градієнту абсолютного геопотенціалу і спрямований у північній півкулі так, що низькі значення геопотенціалу залишаються ліворуч (у південній півкулі – праворуч). Відповідно формула для практичного застосування перетворюється до вигляду:

$$V_g = \frac{27}{\Delta n_1 \sin \varphi}, \quad (2.19)$$

де  $\Delta n_1$  – відстань між двома сусідніми ізогіпсами, кратними 4, яка дана в сотнях км.

Із порівняння формули оцінки геострофічного вітру по полю тиску і геопотенціалу, видно, що при однаковому масштабі синоптичних карт (приземних і висотних) відстань між ізобарами еквівалентна відстані між ізогіпсами, проведеними відповідно через 5 гПа і 4 дам, що дозволяє використовувати ту ж саму градієнтну лінійку для висотних і приземних карт.

### 2.2.3 Зв'язок між швидкостями геострофічного та градієнтного вітрів

Швидкості геострофічного та градієнтного вітрів можна пов'язати між собою певними співвідношеннями, які виявляються дуже корисними на практиці.

Швидкість градієнтного вітру  $V_{gp}$  в циклоні пов'язана зі швидкістю геострофічного вітру  $V_g$ , коріолісовим параметром  $\ell$  і радіусом кривизни ізобари  $r$  співвідношенням:

$$V_{gp} = \frac{\ell r}{2} \left[ -1 + \sqrt{1 + \frac{4V_g}{\ell r}} \right], \quad (2.20)$$

Для антициклону формула має вигляд:

$$V_{gp} = \frac{\ell r}{2} \left[ 1 - \sqrt{1 - \frac{4V_g}{\ell r}} \right], \quad (2.21)$$

У випадку малих значень співвідношення  $\frac{V_g}{\ell r}$  доцільно користуватись формулою

$$V_{zp} = V_g \left[ 1 \mp \frac{V_g}{\ell r} \right], \quad (2.22)$$

де верхній знак відноситься до циклону, а нижній – до антициклону.

#### 2.2.4 Наближені формули для градієнтного вітру при кругових ізобарах

Для точок, що розташовані на досить великій відстані від центра баричного утворення, формулу для градієнтного вітру:

$$V_{zp} = -\omega_z r + \sqrt{\omega_z^2 r^2 + \frac{r}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r}} \quad (2.23)$$

можна переписати у спрощеному вигляді:

$$V_{zp} = \frac{1}{4\omega_z r} \left( 1 - \frac{1}{2r\rho\omega_z^2} \frac{\partial p}{\partial r} \right) \frac{\partial p}{\partial r}.$$

Підкореневий вираз у формулі (2.3) можна представити у вигляді:

$$\sqrt{\omega_z^2 r^2 + \frac{r}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r}} = \omega_z r \left( 1 + \frac{1}{\rho\omega_z^2 r} \frac{\partial p}{\partial r} \right)^{\frac{1}{2}},$$

Вираз, який стоїть у дужках, як відомо з математики, представляє собою біном Ньютона (у загальному вигляді  $(a+b)^n$ ), який розвивається у нескінченний ряд, якщо показник степеня є дробовим або від'ємним числом:

$$(a+b)^n = a^n + \frac{n}{1} a^{n-1} b + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^{n-2} b^2 + \dots + \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k} a^{n-k} b^k + \dots \quad (2.24)$$

Цей ряд збігається, якщо  $a < b$ . Оскільки наближена формула знаходиться для великих  $r$  ( $\frac{1}{\rho\omega_z^2 r} \frac{\partial p}{\partial r} < 1$ ), то ця умова виконується.

Тоді відповідно до формули (2.24) маємо:

$$\left(1 + \frac{1}{\rho\omega_z^2 r} \frac{\partial p}{\partial r}\right)^{\frac{1}{2}} = 1^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} 1^{\frac{1}{2}-1} \frac{1}{\rho\omega_z^2 r} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 1\right) \frac{1}{1 \cdot 2} 1^{\frac{1}{2}-2} \left(\frac{1}{\rho\omega_z^2 r} \frac{\partial p}{\partial r}\right)^2 + \dots$$

або

$$\left(1 + \frac{1}{\rho\omega_z^2 r} \frac{\partial p}{\partial r}\right)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} \frac{1}{\rho\omega_z^2 r} \frac{\partial p}{\partial r} - \frac{1}{8} \left(\frac{1}{\rho\omega_z^2 r} \frac{\partial p}{\partial r}\right)^2 + \dots$$

Іншими членами у розвиненні можна знехтувати через їх малість.

Тоді, підставивши отриманий вираз у формулу (2.3), отримаємо:

$$V_{sp} = -\omega_z r + \omega_z r \left(1 + \frac{1}{2} \frac{1}{\rho\omega_z^2 r} \frac{\partial p}{\partial r} - \frac{1}{8} \left(\frac{1}{\rho\omega_z^2 r} \frac{\partial p}{\partial r}\right)^2\right);$$

$$V_{sp} = \frac{1}{2} \frac{1}{\rho\omega_z} \frac{\partial p}{\partial r} - \frac{1}{8\omega_z^3 r} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r}\right)^2 = \frac{1}{2} \frac{1}{\rho\omega_z} \left(1 - \frac{1}{4r\rho\omega_z^2} \frac{\partial p}{\partial r}\right) \frac{\partial p}{\partial r}. \quad (2.25)$$

Вираз (2.25) дозволяє помітити, що при одному й тому самому значенні градієнта тиску, за інших рівних умов, швидкість градієнтного вітру у циклоні менша, ніж в антициклоні.

Іноді є зручним перейти від спрощеної формули (2.5), що пов'язує швидкість градієнтного вітру з баричним градієнтом, до формули, що пов'язує швидкість градієнтного вітру з швидкістю геострофічного вітру.

Для цього у формулі (2.5) виділимо вираз для геострофічного вітру:

$$V_{sp} = \left(1 - \frac{1}{2r\omega_z} \underbrace{\frac{1}{2\rho\omega_z} \frac{\partial p}{\partial r}}_{V_g}\right) \underbrace{\frac{1}{2\rho\omega_z} \frac{\partial p}{\partial r}}_{V_g} = \left(1 - \frac{1}{2r\omega_z} V_g\right) V_g.$$

Враховуючи, що в антициклоні градієнтний вітер має знак „-“, а в циклоні „+“, то вираз набуває вигляду:

$$|V_{sp}| = \left(1 - \frac{|V_g|}{2r\omega_z}\right) |V_g| \text{ в області циклону,} \quad (2.26)$$

та

$$|V_{ep}| = \left( 1 + \frac{|V_g|}{2r\omega_z} \right) |V_g| \text{ в області антициклону.} \quad (2.27)$$

Звідси можна бачити, що вітер під впливом циклонічної кривизни ізобар буде зменшуватись, і під впливом антициклонічної кривизни ізобар – збільшуватись.

### 2.3 Термічний вітер

Зміну геострофічного вітру в шарі  $z_1 \dots z_2$ , причому  $z_1 < z_2$  пов'язану з горизонтальним градієнтом температури, називають *термічним вітром*:

$$\vec{V}_T = \vec{V}_g(z_2) - \vec{V}_g(z_1), \quad (2.28)$$

або інакше,

$$\vec{V}_g(z_2) = \vec{V}_g(z_1) + \vec{V}_T, \quad (2.29)$$

Щоб далі продовжити інтегрування, треба визначитися з формою зміни температури з висотою. Розглянемо два варіанти:

- 1) температура замінюється її середнім значенням  $\bar{T}$  у шарі від  $z_1$  до  $z_2$ ;
- 2) температура змінюється за лінійним законом  $T = T_o - \gamma z$ , де  $T_o$  – значення температури на рівні  $z_1$ ,  $\gamma$  – вертикальний градієнт температури в шарі від  $z_1$  до  $z_2$ .

Розглянемо послідовно результати інтегрування в обох випадках.

#### Випадок 1.

$$u_g(z_2) - u_g(z_1) = \frac{g\bar{T}}{l} \int_{z_1}^{z_2} \left( -\frac{1}{\bar{T}^2} \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} \right) dz = -\frac{g}{l\bar{T}} \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} (z_2 - z_1). \quad (2.30)$$

Аналогічно для іншої складової геострофічного вітру:

$$v_g(z_2) - v_g(z_1) = -\frac{g\bar{T}}{l} \int_{z_1}^{z_2} \left( -\frac{1}{\bar{T}^2} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} \right) dz = \frac{g}{l\bar{T}} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} (z_2 - z_1). \quad (2.31)$$

Вводячи позначення  $\lambda = \frac{g}{T}$  – параметр плавучості і  $\Delta z = (z_2 - z_1)$  – товщина шару, остаточно отримуємо вирази для складових термічного вітру:

$$u_T = u_g(z_2) - u_g(z_1) = -\frac{\lambda}{\ell} \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} \Delta z, \quad (2.32)$$

$$v_T = v_g(z_2) - v_g(z_1) = \frac{\lambda}{l} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} \Delta z, \quad (2.33)$$

або для модуля вектору термічного вітру

$$V_T = V_g(z_2) - V_g(z_1) = \frac{\lambda}{l} \frac{\partial \bar{T}}{\partial n} \Delta z, \quad (2.34)$$

з яких випливає, що термічний вітер (або зміна геострофічного вітру з висотою) прямо пропорційний горизонтальному градієнту температури в шарі і його товщині, і обернено пропорційний синусу широті місця.

### Випадок 2.

Переставляючи операції інтегрування по  $z$  і диференціювання по горизонтальній координаті, знайдемо спочатку інтеграл

$$\begin{aligned} \int_{z_1}^{z_2} \frac{dz}{T} &= \int_{z_1}^{z_2} \frac{dz}{T_o - \gamma z} = \frac{1}{\gamma} [\ln(T_o - \gamma z_1) - \ln(T_o - \gamma z_2)] = \\ &= \frac{1}{\gamma} \left[ \ln T_o - \frac{\gamma z_1}{T_o} - \frac{1}{2} \left( \frac{\gamma z_1}{T_o} \right)^2 - \ln T_o + \frac{\gamma z_2}{T_o} + \frac{1}{2} \left( \frac{\gamma z_2}{T_o} \right)^2 \right] = \quad (2.35) \\ &= \frac{1}{\gamma} \left[ \frac{\gamma(z_2 - z_1)}{T_o} + \frac{\gamma^2(z_2^2 - z_1^2)}{T_o^2} \right] = \frac{\gamma(z_2 - z_1)}{\gamma T_o} \left[ 1 + \frac{\gamma(z_2 + z_1)}{T_o} \right] \approx \frac{(z_2 - z_1)}{T_o}. \end{aligned}$$

Тут були використані наступні перетворення:

$$\ln(T_o - \gamma z) = \ln \left[ T_o \left( 1 - \frac{\gamma z}{T_o} \right) \right] = \ln T_o + \ln \left( 1 - \frac{\gamma z}{T_o} \right) \cong \ln T_o - \frac{\gamma z}{T_o} - \frac{1}{2} \left( \frac{\gamma z}{T_o} \right)^2. \quad (2.36)$$



У результаті підстановки отриманих результатів інтегрування знаходимо:

$$\frac{\partial}{\partial y} \int_{z_1}^{z_2} \frac{dz}{T} = \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{z_2 - z_1}{T_0} \right] = -\frac{z_2 - z_1}{T_0^2} \frac{\partial T_0}{\partial y} = -\frac{\Delta z}{T_0^2} \frac{\partial T_0}{\partial y}, \quad (2.37)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_{z_1}^{z_2} \frac{dz}{T} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{z_2 - z_1}{T_0} \right] = \frac{z_2 - z_1}{T_0^2} \frac{\partial T_0}{\partial x} = \frac{\Delta z}{T_0^2} \frac{\partial T_0}{\partial x}. \quad (2.38)$$

Остаточно маємо:

$$u_T = u_g(z_2) - u_g(z_1) \frac{T_2}{T_1} = -\frac{g}{l} \frac{T_2}{T_0^2} \frac{\partial T_0}{\partial y} \Delta z \cong -\frac{\lambda}{l} \frac{\partial T_0}{\partial y} \Delta z, \quad (2.39)$$

$$v_T = v_g(z_2) - v_g(z_1) \frac{T_2}{T_1} = -\frac{g}{l} \left( -\frac{T_2}{T_0^2} \frac{\partial T_0}{\partial x} \Delta z \right) \cong \frac{\lambda}{l} \frac{\partial T_0}{\partial x} \Delta z. \quad (2.40)$$

Ці вирази також означають, що зміна геострофічного вітру з висотою також прямо пов'язана з горизонтальним градієнтом температури. По мірі віддалення від вихідного рівня роль термічної добавки зростає і геострофічний вітер наближається до термічного. Ізобари перебудовуються і стають паралельними ізотермам. Як показують спостереження, області підвищеного тиску у вільній атмосфері на великих висотах збігаються з областями підвищених температур, а циклонічні зони – з очагами холоду.

Оскільки в північній півкулі термічний градієнт спрямований від полюса до екватора, це припускає, що термічний вітер повинен бути спрямований перпендикулярно йому і вліво від нього, тобто з заходу на схід. І спостереження дійсно показують стійкий західно–східний перенос у тропосфері і посилення вітру з висотою: максимум швидкості відзначається на осі планетарної струминної течії.

На підставі отриманих виразів можна представити вертикальні градієнти складових геострофічного вітру (зсув геострофічного вітру):

$$\frac{\partial u_g}{\partial z} = -\frac{\lambda}{l} \frac{\partial T_0}{\partial y} \Delta z, \quad \frac{\partial v_g}{\partial z} = \frac{\lambda}{l} \frac{\partial T_0}{\partial x} \Delta z, \quad (2.41)$$

або для модуля вектора геострофічного вітру

$$\frac{\partial |\vec{V}_g|}{\partial z} = \frac{\lambda}{l} \frac{\partial T_o}{\partial n} \Delta z, \quad (2.42)$$

де  $n$  – напрямок нормалі до ізотерм у даній точці площини.

Формула (2.41) є формулою С.І. Троїцького для обчислення складових термічного вітру або вертикального зсуву геострофічного вітру.

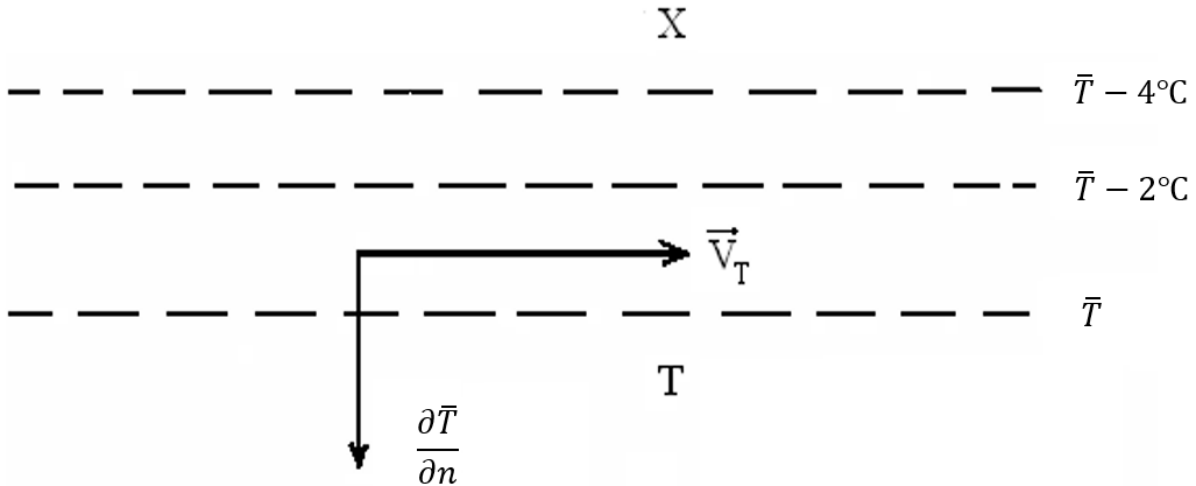


Рисунок 2.4 – Взаємне розташування векторів швидкості термічного вітру  $\vec{V}_T$  і градієнта середньої температури шару  $\partial \bar{T} / \partial n$

Зі співвідношень (2.32) – (2.34) випливає, що зміна геострофічного вітру з висотою (або термічний вітер) визначається не тільки значенням горизонтального градієнта середньої температури у шарі, але і є прямо пропорційним товщині цього шару.

Крім того, оскільки скалярний добуток векторів  $\vec{V}_T$  і  $\partial \bar{T} / \partial n$  дорівнює

$$\vec{V}_T \cdot \frac{\partial \bar{T}}{\partial n} = -\frac{\lambda}{l} \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} \Delta z \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} + \frac{\lambda}{l} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} \Delta z \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} = 0, \quad (2.43)$$

то ці вектори взаємно перпендикулярні, тобто вектор термічного вітру спрямований уздовж ізотерм так, що низькі температури залишаються ліворуч від напрямку вектору вітру (рис. 2.4).

З рівності (2.28) випливає, що

$$\frac{V(z_2)}{V_T} = \frac{V(z_1)}{\frac{g}{\ell \bar{T}} \frac{\partial \bar{T}}{\partial n} \Delta z} + 1. \quad (2.44)$$

Це означає, що зі збільшенням товщини шару  $\Delta z$   $V(z_2) \rightarrow V_T$ , тобто що

в міру віддалення від початкового рівня внесок термічного доданку збільшується і геострофічний вітер все більше наближається до термічного. Ізобари перебудовуються і в решті решт стають паралельними ізотермам. І, дійсно, спостереження показують, що на великих висотах у вільній атмосфері області підвищеного тиску співпадають з областями високих температур, в той самий час як циклонічні центри співпадають з осередками холоду.

Оскільки товщина шару (відносна топографія) є ні що інше, як інший вираз для середньої температури шару, то є корисним в практичному сенсі отримати вирази для термічного вітру через середню температуру в шарі.

Запишемо формули для складових геострофічного вітру через абсолютний геопотенціал, як це було зроблено в пункті 2.2.2 в формулі (2.18) для модуля геострофічного вітру:

$$u_g = -\frac{9,8}{\ell} \frac{\partial H}{\partial y}, \quad v_g = \frac{9,8}{\ell} \frac{\partial H}{\partial x}, \quad (2.45)$$

де  $H$  – абсолютний геопотенціал ізобаричної поверхні, виражений в геопотенціальних метрах.

Використавши визначення термічного вітру (2.32) – (2.34), вирази для його складових через складові геострофічного вітру можна записати:

$$\begin{aligned} u_T = u_g(z_2) - u_g(z_1) &= -\frac{9,8}{\ell} \frac{\partial H(p_2)}{\partial y} + \frac{9,8}{\ell} \frac{\partial H(p_1)}{\partial y} = \\ &= -\frac{9,8}{\ell} \frac{\partial}{\partial y} (H(p_2) - H(p_1)) = -\frac{9,8}{\ell} \frac{\partial H_{p_1}^{p_2}}{\partial y}. \end{aligned} \quad (2.46)$$

де  $H_{p_1}^{p_2}$  – відносний геопотенціал ізобаричної поверхні, виражений в геопотенціальних метрах.

Аналогічно для  $v_T$ :

$$v_T = v(z_2) - v_g(z_1) = \frac{9,8}{\ell} \frac{\partial H_{p_1}^{p_2}}{\partial x}. \quad (2.48)$$

Для модуля термічного вітру:

$$V_T = \frac{9,8}{\ell} \frac{\partial H_{p_1}^{p_2}}{\partial n}. \quad (2.49)$$

Термічний вітер пов'язаний з ізогіпсами відносної топографії так само, як геострофічний вітер пов'язаний з ізогіпсами абсолютної топографії.

В загальному випадку шар, в якому обчислюється термічний вітер,  $p_1 - p_2$ , може не співпадати з шаром, для якого визначений градієнт температури,  $p_3 - p_4$ . Оскільки обидві величини і  $V_T$ , і  $\frac{\partial \bar{T}}{\partial n}$  мало змінюються з висотою, то це не вносить значної помилки.

З рівняння квазістатисти:

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dz} = -\rho g \rightarrow \frac{dp}{dz} = -\frac{pg}{RT} \rightarrow d(\ln p) = -g \frac{dz}{RT} \rightarrow \\ \rightarrow \frac{1}{dz} = -\frac{g}{RT d(\ln p)} \rightarrow g dz = -RT d(\ln p). \end{aligned}$$

або, якщо товщина шару не дуже велика, то

$$g(z_2 - z_1) = R\bar{T} \ln \frac{p_1}{p_2} \rightarrow 9.8 H_{p_1}^{p_2} = R\bar{T} \ln \frac{p_1}{p_2}. \quad (2.50)$$

В свою чергу

$$z_4 - z_3 = \frac{R\bar{T}}{g} \ln \frac{p_3}{p_4} \rightarrow H_{p_3}^{p_4} = \frac{R\bar{T}}{g} \ln \frac{p_3}{p_4}. \quad (2.51)$$

Продиференціюємо (2.51) по  $y$  і виразимо похідну  $\frac{\partial \bar{T}}{\partial y}$ :

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial y} = \frac{9.8}{R \ln(p_3 / p_4)} \frac{\partial H_{p_3}^{p_4}}{\partial y}. \quad (2.52)$$

Підставимо вирази (2.51) і (2.52) в формулу для другої складової термічного вітру (2.33):

$$u_T = -\frac{9.8}{l} \left( \ln \frac{p_1}{p_2} / \ln \frac{p_3}{p_4} \right) \frac{\partial H_{p_3}^{p_4}}{\partial y}. \quad (2.53)$$

Аналогічно для  $v_T$ :

$$v_T = \frac{9.8}{l} \left( \ln \frac{p_1}{p_2} / \ln \frac{p_3}{p_4} \right) \frac{\partial H_{p_3}^{p_4}}{\partial x}. \quad (2.54)$$

А для модуля термічного вітру:

$$V_T = \frac{9.8}{l} \left( \ln \frac{p_1}{p_2} / \ln \frac{p_3}{p_4} \right) \frac{\partial H_{p_3}^{p_4}}{\partial x}. \quad (2.55)$$

Як відомо, атмосфера, в якій ізобаричні поверхні є поверхнями сталої густини, має назву баротропної. Ізобаричні поверхні при цьому є також поверхнями постійної віртуальної температури. В баротропній атмосфері  $\nabla T = 0$  і, отже, згідно з рівняннями (2.34), (2.42) геострофічний вітер не змінюватиметься з висотою. Ці міркування є справедливими і для сухої, і для вологої атмосфери, але у випадку вологої атмосфери в  $\nabla T$  маємо використовувати віртуальну температуру, яка враховує вологість. Атмосфера, яка при будь-яких процесах, що в ній відбуваються, залишається баротропною, має назву автобаротропної.

Якщо ізобаричні поверхні і поверхні однакової густини не співпадають, то атмосфера має назву барокліної. В такій атмосфері геострофічний вітер має змінюватись з висотою.

## 2.4 Зміна геострофічного вітру з висотою в залежності від розташування термічного і баричного градієнтів

Розглянемо два окремих випадки зміни геострофічного вітру з висотою при різних співвідношеннях між градієнтом тиску на початковому рівні і горизонтальним градієнтом температури.

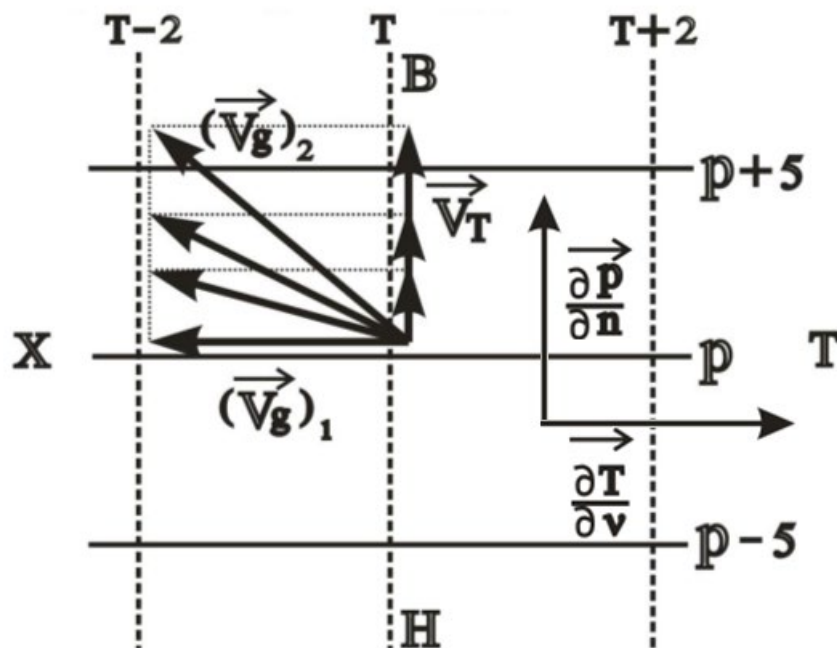


Рисунок 2.5 – Зміна геострофічного вітру з висотою при адвекції тепла

На рис. 2.5 представлено термобаричне поле, в якому ізобари і ізотерми спрямовані взаємно перпендикулярно. Градієнт тиску на нижньому рівні також є перпендикулярним до градієнта температури і відхиляється від нього ліворуч. Це випадок адвекції тепла, оскільки рух повітря відбувається

з боку теплового повітря в бік холодного повітря, тобто поступово холодне повітря заміщується теплим.

З рис. 2.5 видно, що геострофічний вітер на верхній границі шару відхилився від початкового вектора геострофічного вітру праворуч (або в бік високого тиску) та збільшився за модулем.

Проте геострофічний вітер не одразу набув того числового значення та напрямку, що вказані на рисунку, а поступово: із зростанням товщини шару поступово змінювався і геострофічний вітер (це ілюструють проміжні вектори геострофічного вітру).

Тому остаточно можна зробити такий висновок, що при адвекції тепла з висотою геострофічний вітер відхилятиметься праворуч (у бік високого тиску) та збільшуватиметься за модулем.

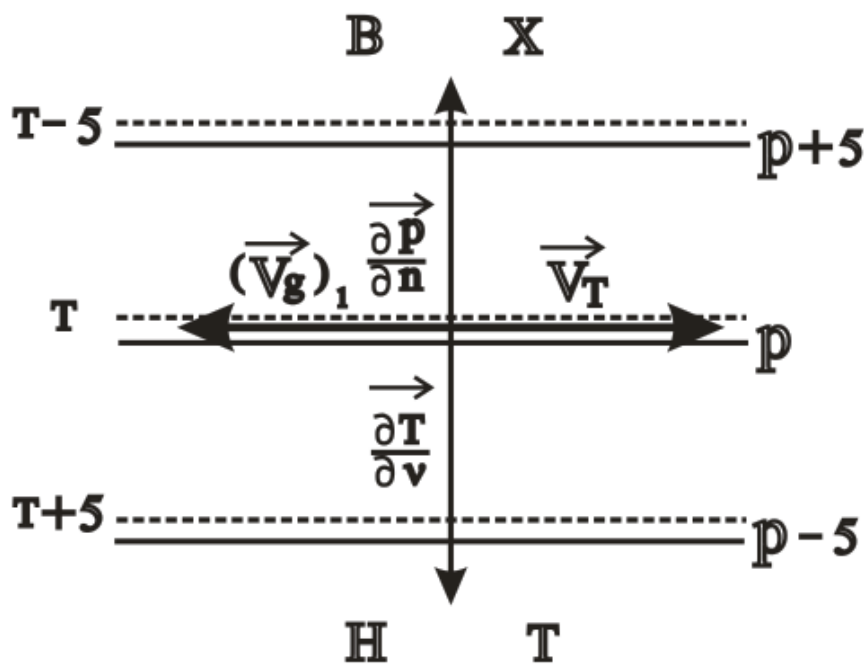


Рисунок 2.6 – Зміна геострофічного вітру з висотою при протилежно спрямованих градієнтах тиску і температури

На рис. 2.6 представлено випадок, в якому градієнт тиску на нижньому рівні і градієнт температури паралельні, але спрямовані в протилежні сторони. В цьому випадку вектор геострофічного вітру на початковому рівні  $z_1$  та вектор термічного вітру у шарі також спрямовані у протилежні сторони і їх векторна сума дорівнює алгебраїчній різниці їх модулів, тобто геострофічний вітер зменшуватиметься за величиною, не змінюючи свого напрямку до тих пір, поки модуль термічного вітру не буде дорівнювати геострофічному на нижньому рівні. На рівні, де термічний вітер дорівнюватиме за величиною початковому значенню геострофічного, швидкість геострофічного вітру дорівнюватиме нулю. Цей рівень отримав назву «висоти обертання». Вище цього рівня вітер змінює свій напрямок на

протилежний, а його швидкість зростатиме. Зрозуміло, що висота рівня обертання залежить від градієнтів тиску і температури.

## 2.5 Зміна градієнтного вітру в циклонах та антициклонах з висотою

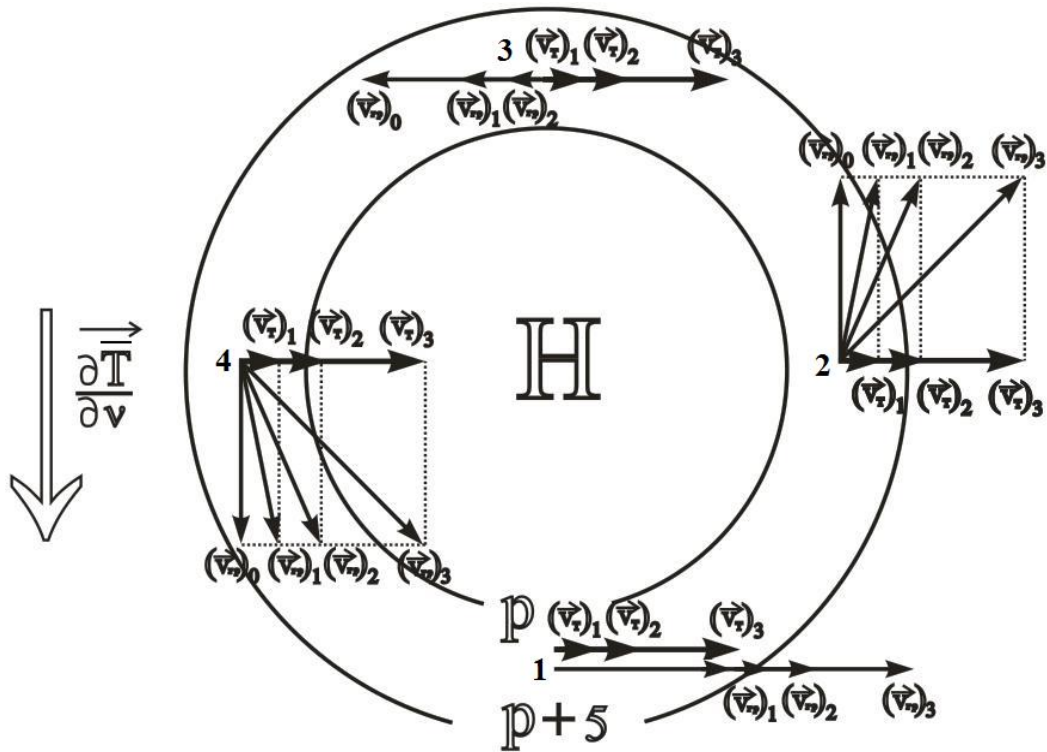


Рисунок 2.7 – Зміна вітру з висотою в циклоні. Вважають, що на рисунку північ знаходиться нагорі, південь – унизу, захід – ліворуч, а схід – праворуч

Якщо розглядати зміну градієнтного вітру з висотою під впливом термічної горизонтальної неоднорідності, то тут ситуація не має такої однозначності, як у випадку прямолінійних ізобар, оскільки градієнт температури вважається сталим, а баричний градієнт постійно змінює свій напрям.

Тому має сенс розглядати кожну точку (або частину) баричного утворення окремо. Розглянемо зміну градієнтного вітру з висотою у чотирьох точках, що позначені на рисунку.

1. В цьому випадку обидва градієнти паралельні. Вектори геострофічного  $(\vec{V}_g)_1$  та термічного  $\vec{V}_T(z)$  вітру спрямовані в один бік, а, отже, на рівнях, що розташовані вище початкового, геострофічний вітер являє собою алгебраїчну суму  $(\vec{V}_g)_1$  та  $\vec{V}_T(z)$ . Він збільшується за модулем

та залишається постійним за напрямком. З рисунку видно, що така ситуація реалізовуватиметься в теплому секторі циклону, що зміщується з заходу на схід, в якому температура зменшується з півдня на північ.

2. Градієнти є перпендикулярними, причому градієнт температури спрямований на південь, а градієнт тиску – на захід. В цьому випадку вектор геострофічного вітру на рівні  $z > z_0$  являє собою діагональ паралелограму, що побудований на векторах  $(\vec{V}_g)_1$  та  $\vec{V}_T(z)$ . З рисунка видно, що з висотою геострофічний вітер збільшуватиметься за модулем та повертатиме праворуч (у бік високого тиску). Кут між векторами  $\vec{V}_T(z)$  та  $\vec{V}_g(z)$  (а, отже, і кут між ізобарою та ізотермою) з висотою зменшуватиметься, наближаючись до нуля. В циклоні така ситуація може мати місце у передній частині циклону.

3. Градієнт тиску на нижньому рівні та градієнт температури є паралельними, проте спрямовані у протилежні боки. В цьому випадку геострофічний вітер на початковому рівні та термічний вітер спрямовані у протилежні боки та їх векторна сума дорівнює алгебраїчній сумі їх модулів, тобто геострофічний вітер зменшується за величиною, не змінюючи свого напрямку доти, доки модуль термічного вітру не дорівнюватиме модулю вітру на початковому рівні. На рівні, де термічний вітер дорівнює за величиною вихідному значенню геострофічного вітру, швидкість геострофічного вітру дорівнює нулю. Цей рівень отримав назву рівня обернення. Вище цього рівня вітер змінює напрямок на протилежний, а його швидкість починає зростати. Очевидно, що висота рівня обернення  $z_{\text{обернення}}$  залежить від величини модулів градієнтів тиску та температури та має місце тільки у випадку, коли градієнти тиску та температури спрямовані у протилежні боки.

У природі така ситуація може спостерігатись у північній частині циклону (див. рисунок), за умови, що він зміщується з заходу на схід, і температура в ньому зменшується з півдня на північ.

4. Ситуація є аналогічною до ситуації у передній частині циклону. Градієнти також є перпендикулярними, проте градієнт температури спрямований на південь, а градієнт тиску – на схід. В цьому випадку з висотою геострофічний вітер також збільшуватиметься за модулем та повертатиме ліворуч, тобто у бік низького тиску. Така зміна геострофічного вітру зазвичай спостерігається у тилівій частині циклону.

Намагання градієнтного вітру з висотою наблизитись до термічного спостерігається за будь-яких співвідношень між термічним та баричним градієнтами. Якщо кут між градієнтами є тупим, то градієнтний вітер спочатку зменшується за величиною до того рівня, на якому він стає перпендикулярним термічному вітру, а потім вже збільшується.



## 2.6 Відхилення вітру від геострофічного. Агеострофічні відхилення

Геострофічний та градієнтний вітер є тільки першим наближенням до реального вітру. Реальні рухи в атмосфері не є рівномірними, оскільки сили, які безпосередньо прикладені і інерційні сили не врівноважуються. При значній перевазі однієї з сил можуть розвиватись значні прискорення, причому вони виявляються тим краще, чим більше відхиляється вітер від геострофічного. З відхиленням вітру від геострофічного або градієнтного пов'язані якісно нові процеси. Зокрема через відмінність ізобари від кола, в потоці виникає дивергенція маси і виникають вертикальні рухи, які відіграють, як відомо, дуже важливу роль в еволюції хмарності і утворенні опадів.

Відхилення вітру від геострофічного мають назву агеострофічних відхилень.

Спостереження показують, що різниця між швидкістю реального вітру і швидкістю геострофічного вітру зазвичай становить 5 – 10% (табл. 2.1).

Таблиця 2.1 – Швидкість фактичного і геострофічного вітру на різних ізобаричних поверхнях

Вітер	Ізобарична поверхня (гПа)		
	850	700	500
Фактичний	11,1	14,9	16,9
Геострофічний	10,7	14,0	17,8

Хоча різниці між наведеними значеннями і невелика, але вони відіграють суттєву роль в еволюції баричних утворень, розвитку вертикальних рухів у вільній атмосфері тощо.

Щоб надати загальну оцінку відхилень вітру від геострофічного, які викликані як горизонтальною неоднорідністю, так і нестационарністю поля тиску, в рівняння руху:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \ell v, \\ \frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - \ell u. \end{cases} \quad (2.56)$$

введемо замість компонентів градієнта тиску компоненти швидкості геострофічного вітру:

$$u_g = -\frac{1}{\ell \rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \quad v_g = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}. \quad (2.57)$$

Тоді отримаємо:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = \ell(v - v_g) = \ell v', \\ \frac{dv}{dt} = -\ell(u - u_g) = -\ell u'. \end{cases} \quad (2.58)$$

де  $u'$  та  $v'$  - компоненти агеострофічних відхилень.

Оскільки  $\frac{du}{dt}$  та  $\frac{dv}{dt}$  – проєкції вектору прискорення на відповідні осі, то з рівності:

$$\vec{V}' \cdot \frac{d\vec{V}}{dt} = u' \frac{du}{dt} + v' \frac{dv}{dt} \equiv 0. \quad (2.59)$$

випливає, що вектор агеострофічних відхилень є перпендикулярним вектору прискорення. Неважко показати, що в північній півкулі він спрямований ліворуч від вектору прискорення.

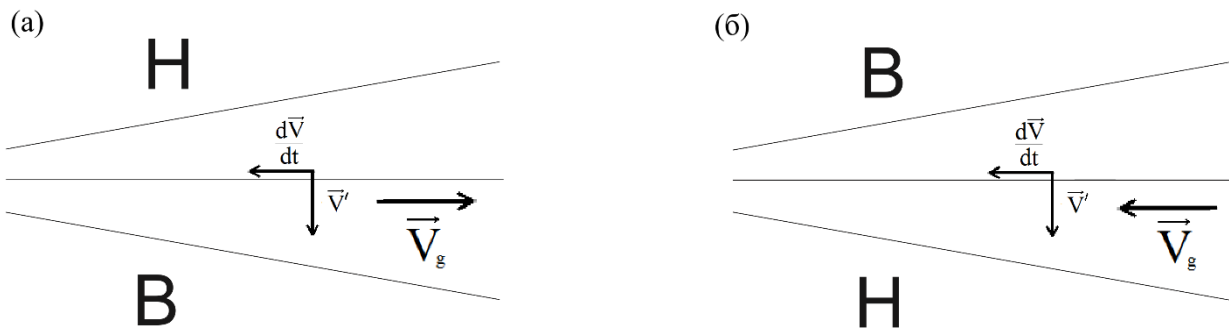


Рисунок 2.8 – Напрямок вектору агеострофічних відхилень

з (2.58) випливає, що

$$\sqrt{\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dt}\right)^2} = \sqrt{u'^2 + v'^2},$$

$$\left|\frac{d\vec{V}}{dt}\right| = \ell |\vec{V}'| \quad \text{або} \quad |\vec{V}'| = \frac{1}{\ell} \left|\frac{d\vec{V}}{dt}\right|. \quad (2.60)$$

Таким чином, агеострофічне відхилення є прямо пропорційним прискоренню.

Розглянемо два випадки, які ілюструє рис. 2.8.

У випадку (рис. 2.8а) частинка рухається в область з меншим градієнтом тиску. Тому швидкість її зменшується, вектор  $\frac{d\vec{v}}{dt}$  спрямований в бік протилежний руху, а вектор агеострофічних відхилень – в бік високого тиску.

У полі ізобар (рис. 2.8б) швидкість частинки в напрямку її руху збільшується, а вектор агеострофічних відхилень спрямований в бік низького тиску.

Ці приклади дозволяють зробити висновок, що вектор агеострофічних відхилень може бути спрямований в бік як низького, так і високого тиску. В залежності від того, куди відхиляється реальний вітер від геострофічного – праворуч чи ліворуч, швидкість його відповідно збільшується або зменшується з часом.

Розглянемо тепер локальні зміни швидкості вітру

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u'}{\partial t}, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial v'}{\partial t}.$$

З (2.45) випливає, що

$$\begin{cases} u = -\frac{1}{\ell\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{1}{\ell} \frac{dv}{dt}, \\ v = \frac{1}{\ell\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\ell} \frac{du}{dt}. \end{cases} \quad (2.61)$$

Візьмемо локальну похідну від обох частин рівняння (2.61), вважаючи  $\ell$  і  $\rho$  сталими

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\ell\rho} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{1}{\ell} \frac{\partial}{\partial t} \frac{dv}{dt}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{1}{\ell\rho} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\ell} \frac{\partial}{\partial t} \frac{du}{dt}. \end{cases} \quad (2.62)$$

Припустимо, що останні члени в рівняннях (2.62) малі порівняно з першими. Нехтуючи цими членами і змінюючи порядок диференціювання, отримаємо:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\ell\rho} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial p}{\partial y}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{1}{\ell\rho} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial p}{\partial x}. \end{cases} \quad (2.63)$$

В формулах (2.63) є швидкість зміни тиску і до деякої степені наближення поле  $\frac{\partial p}{\partial t}$  можна вважати полем ізолобар, отриманих шляхом нанесення на карту ізобаричних тенденцій, які надають зміну тиску за останні три години. Рівняння (2.63) показує, що ізобаричний градієнт викликає локальне прискорення, спрямоване уздовж ізолобари таким чином, що область падіння тиску лишається ліворуч від ізолобари.

Можна побачити, що величина локального прискорення може бути легко отримана за допомогою градієнтної лінійки.

Підставляючи (2.63) в (2.58) і нехтуючи конвективними членами, отримуємо

$$\begin{cases} u' = -\frac{1}{f^2 \rho} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial t}, \\ v' = \frac{1}{f \rho} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial p}{\partial t}. \end{cases} \quad (2.64)$$

Отже, агеострофічне відхилення є пропорційним ізобаричному градієнту. Тому агеострофічне відхилення іноді називають ізобаричним вітром. Ізобаричний вітер дме перпендикулярно до ізолобар в напрямку низьких тенденцій. В той час, як дивергенція геострофічного вітру завжди дорівнює нулю, ізобаричний вітер може мати дивергенцію, яка відрізняється від нуля, обумовлену тим, що ізобаричний градієнт не усюди однаковий. Области зростання і падіння тиску асоціюються з областями конвергенції і дивергенції вітру. Швидкість ізобаричного вітру може сягати 5 м/с.

При виведенні формул (2.64) ми знехтували конвективними членами в (2.58). Взагалі підстав для цього немає, оскільки конвективні члени є членами одного порядку з ізобаричним градієнтом.

## 2.7 Геострофічна адвекція температури

Якщо ізобари та ізотерми не паралельні, спостерігається адвекція температури, тобто локальна зміна температури, викликане переміщенням повітряних мас горизонтально неоднорідному полі температури. Геострофічна адвекція температури описується виразом:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_a = -\left(u_g \frac{\partial T}{\partial x} + v_g \frac{\partial T}{\partial y}\right) = -V_g \frac{\partial T}{\partial n} \cos \varepsilon = -V_g \frac{\partial T}{\partial n} \sin \delta. \quad (2.65)$$

Тут  $V_g$  і  $\frac{\partial T}{\partial n}$  – модулі геострофічного вітру та градієнта температури;  $\varepsilon$  – кут між напрямками вітру та градієнта температури;  $\delta$  – кут між градієнтами тиску та температури, що відраховується від баричного

градієнта до термічного (кут вважається додатним при відліку проти годинникової стрілки, від'ємним – за годинниковою стрілкою, див. рис. 2.9). У першому випадку (див. рис 2.9 а) відображена ситуація, при якій кут  $\varepsilon$  може мати числове значення в інтервалі  $\pm \frac{\pi}{2}$ ,  $(-\frac{\pi}{2} < \varepsilon < \frac{\pi}{2})$ . Отже,  $\cos \varepsilon > 0$  і згідно з формулою (2.65) виходить  $(\frac{\partial T}{\partial t})_a < 0$ , тобто має місце адвекція холоду. У другому випадку (див. рис. 2.9б)  $\frac{\pi}{2} < \varepsilon < \frac{3\pi}{2}$  має місце адвекція тепла.

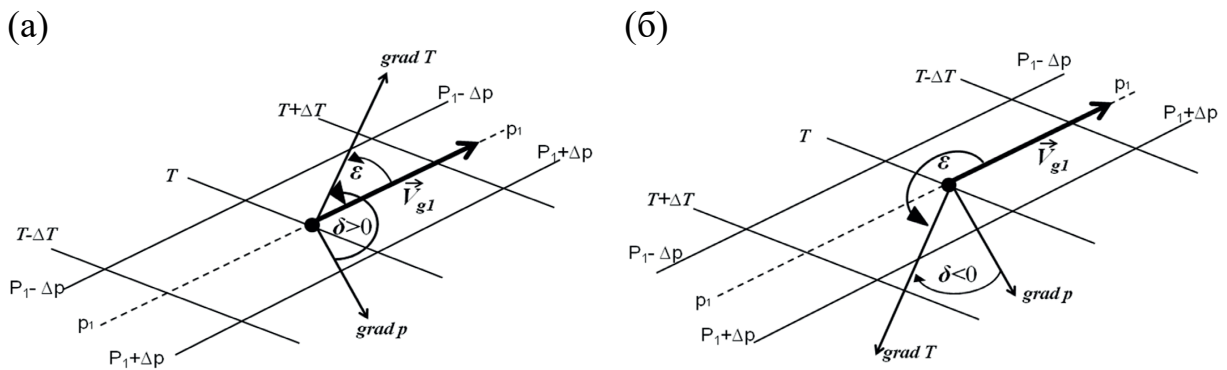


Рисунок 2.9 – Геострофічна адвекція температури при різних кутах між вітром і градієнтом температури: а – адвекція холоду; б – адвекція тепла

Складові градієнта температури в формулі (2.65) можна виразити через термічний вітер, тобто через зміну геострофічного вітру з висотою. Так згідно з (2.60)

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial x} = \frac{\ell \bar{T} v_T}{g \Delta z} = \frac{\ell \bar{T} \Delta v_g}{g \Delta z}.$$

При малій товщині шару  $T_1 \approx T_2 \approx \bar{T} = T$ ,  $\frac{\Delta v_g}{\Delta z} \approx \frac{\partial v_g}{\partial z}$  і тоді  $\frac{\partial \bar{T}}{\partial x} = \frac{\ell \bar{T} \partial v_g}{g \partial z}$ , за аналогією  $\frac{\partial \bar{T}}{\partial y} = \frac{\ell \bar{T} \partial u_g}{g \partial z}$ .

В цьому випадку формула (2.15) набуває вигляду:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_a = -\left(u_g \frac{\partial T}{\partial x} + v_g \frac{\partial T}{\partial y}\right) = -\frac{\ell \bar{T}}{g} \left(u_g \frac{\partial v_g}{\partial z} + v_g \frac{\partial u_g}{\partial z}\right). \quad (2.66)$$

Далі складові геострофічного вітру виразимо через модуль  $V_g$  і кут  $\alpha$  між напрямком вітру і віссю  $x$  (рис. 2.10). Напрямок осі вибрано довільно, але, заради наочності висновку,  $\alpha < \frac{\pi}{2}$ .

Очевидно, що  $u_g = V_g \cos \alpha$ ,  $v_g = V_g \sin \alpha$ .

Тоді

$$u_g = V_g \cos \alpha, \quad \frac{\partial u_g}{\partial z} = \frac{\partial V_g}{\partial z} \cos \alpha - V_g \sin \alpha \frac{\partial \alpha}{\partial z};$$

$$v_g = V_g \sin \alpha, \quad \frac{\partial v_g}{\partial z} = \frac{\partial V_g}{\partial z} \sin \alpha + V_g \cos \alpha \frac{\partial \alpha}{\partial z}.$$

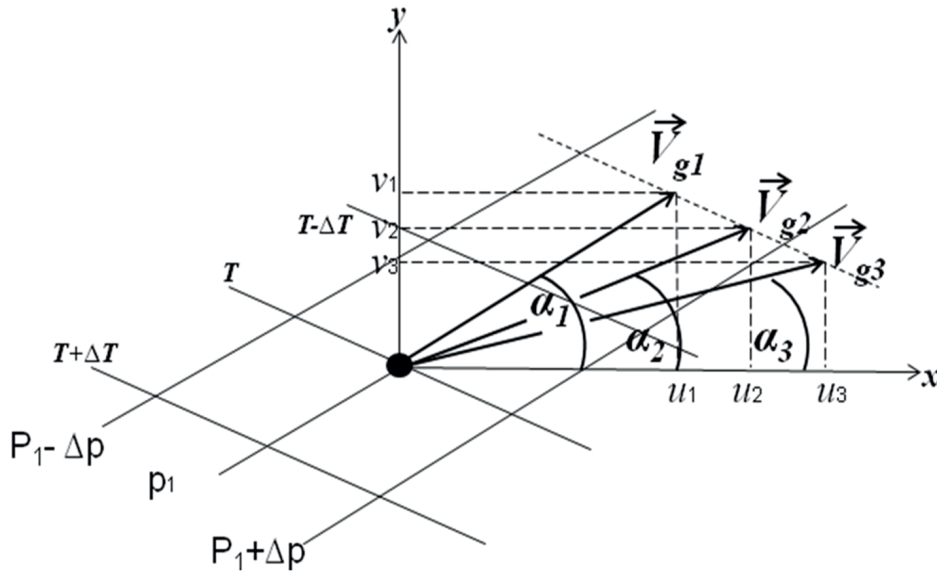


Рисунок 2.10 – Зв'язок між поворотом геострофічного вітру і зміною його складових з висотою

Підставляючи ці вирази в (2.60) і приводячи подібні члени, отримаємо

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_a = -\frac{\ell \bar{T}}{g} V_g^2 \frac{\partial \alpha}{\partial z}.$$

Як бачимо на рис. 2.10, кут має додатну величину, але зменшується з висотою, тобто і, отже, згідно з формулою (2.60), у фіксованій точці відзначатиметься підвищення температури. З цього аналізу випливає правило: при зміні напрямку вітру з висотою за годинниковою стрілкою відбувається адвекція тепла і як наслідок – локальне підвищення температури повітря.

Покажемо, що адвекція температури безпосередньо пов'язана з барокліним фактором  $\frac{1}{\rho^2} \nabla p \times \nabla \rho$  в рівнянні вихору. Запишемо барокліний фактор в проекції на вісь Z:

$$\frac{1}{\rho^2} \left( \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{\partial p}{\partial x} \right). \quad (2.67)$$

Саме ця складова бароклінного фактору описує виникнення вихрового руху в горизонтальній площині, який сприяє розвитку нових циклонів і антициклонів і підживлює вже існуючі циклони та антициклони

Скористаємось рівнянням стану волого повітря

$$P = R_c \rho T_v, \quad (2.68)$$

де  $T_v = T(1 + 0.61q)$  – віртуальна температура,  $q$  – масова частка водяної пари. Прологарифмуємо і продиференціюємо рівняння (2.68) по координаті  $s$  ( $s$  слід покласти  $x$  або  $y$ ):

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial s} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} - \frac{1}{T_v} \frac{\partial T_v}{\partial s}. \quad (2.69)$$

Якщо скористатись виразами для складових геострофічного вітру

$$u_g = -\frac{1}{2\omega_z \rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \quad v_g = \frac{1}{2\omega_z \rho} \frac{\partial p}{\partial x}$$

і замінити похідні від густини повітря за допомогою співвідношень (2.69), то барокліний фактор матиме вигляд:

$$\frac{1}{\rho^2} \left( \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{\partial p}{\partial x} \right) = \frac{2\omega_z}{T_v} \left( u_g \frac{\partial T_v}{\partial x} + v_g \frac{\partial T_v}{\partial y} \right). \quad (2.70)$$

Через співставлення правої і лівої частин виразу (2.70) випливає, щ барокліний фактор є додатним при адвекції холоду чи більш сухого повітря та від'ємним при адвекції тепла чи більш волого повітря. Таким чином, адвекція холоду сприяє зародженню нового циклонічного вихору або посилює вже існуючий, а адвекція тепла породжує новий або посилює вже існуючий антициклонічний вихор. Дуже часто холодне повітря є більш сухим, а тепле більш вологим. В цих випадках адвекція як тепла, так і вологи діє в одному напрямку, збільшуючи внесок бароклінного фактору.

## 2.8 Вплив агеострофічних відхилень на розвиток вертикальних рухів

Розглянемо приклад, який ілюструє вплив агеострофічних відхилень на розвиток вертикальних рухів. Для цього отримаємо вираз для вертикальної компоненти швидкості вітру з рівняння нерозривності, записаного в декартовій системі координат:

$$\frac{\partial \rho w}{\partial z} = -\left( \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} \right) - \frac{\partial \rho}{\partial t}. \quad (2.71)$$

Оскільки

$$u = u_g + u', \quad v = v_g + v'$$

то згідно з виразами для складових швидкості геострофічного вітру (2.11):

$$\begin{aligned} \rho u &= -\frac{1}{l} \frac{\partial p}{\partial y} + \rho u', \\ \rho v &= \frac{1}{l} \frac{\partial p}{\partial x} + \rho v'. \end{aligned}$$

Підставимо отримані вирази в (2.71) і виконав диференціювання, отримаємо

$$\frac{\partial \rho w}{\partial z} = -\left(\frac{\partial \rho u'}{\partial x} + \frac{\partial \rho v'}{\partial y}\right) + \frac{1}{l^2} \left(\frac{\partial l}{\partial y} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial l}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial y}\right) - \frac{\partial \rho}{\partial t}. \quad (2.72)$$

На підставі рівняння (2.72) можна сказати, що поле вертикальних швидкостей у вільній атмосфері визначається трьома чинниками: 1) агеострофічністю потоку; 2) локальною зміною густини; 3) зміною параметра Кориоліса.

Зробимо деякі оцінки. Якщо припустити, що вісь  $OX$  спрямована уздовж дотичної до широтного кола, то

$$\frac{1}{l^2} \left(\frac{\partial l}{\partial y} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial l}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial y}\right) = \frac{1}{l^2} \frac{\partial l}{\partial y} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{ctg \varphi}{a} \frac{1}{l} \frac{\partial p}{\partial x} = \rho v_g \frac{ctg \varphi}{a}.$$

Тут  $\varphi$  – широта місця,  $a$  – радіус Землі.

Оцінимо порядок величини цього виразу:

$$O\left(\rho v_g \frac{ctg \varphi}{a}\right) = \frac{1 \cdot 1.3 \cdot 10}{6.4 \cdot 10^6} \approx 2 \cdot 10^{-6} \frac{\text{кг}}{\text{м}^3 \cdot \text{с}}.$$

Для оцінки порядку величини локальної зміни густини скористаємось таблицею стандартів метеорологічних елементів та їх похідних (додаток А):

$$O\left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right) = 3 \cdot 10^{-7} \frac{\text{кг}}{\text{м}^3 \cdot \text{с}}.$$

За цією ж таблицею

$$O\left(\frac{\partial \rho w}{\partial t}\right) = 10^{-5} \frac{\text{кг}}{\text{м}^3 \cdot \text{с}}.$$



Виконані оцінки показали, що в реальних умовах локальна зміна густини і зміна параметра Коріоліса відіграють незначну роль в формуванні вертикальної швидкості, а головний внесок надає агеострофічність потоку.

На рис. 2.11 наведено приклад баричного поля, при якому розвиваються вертикальні рухи.

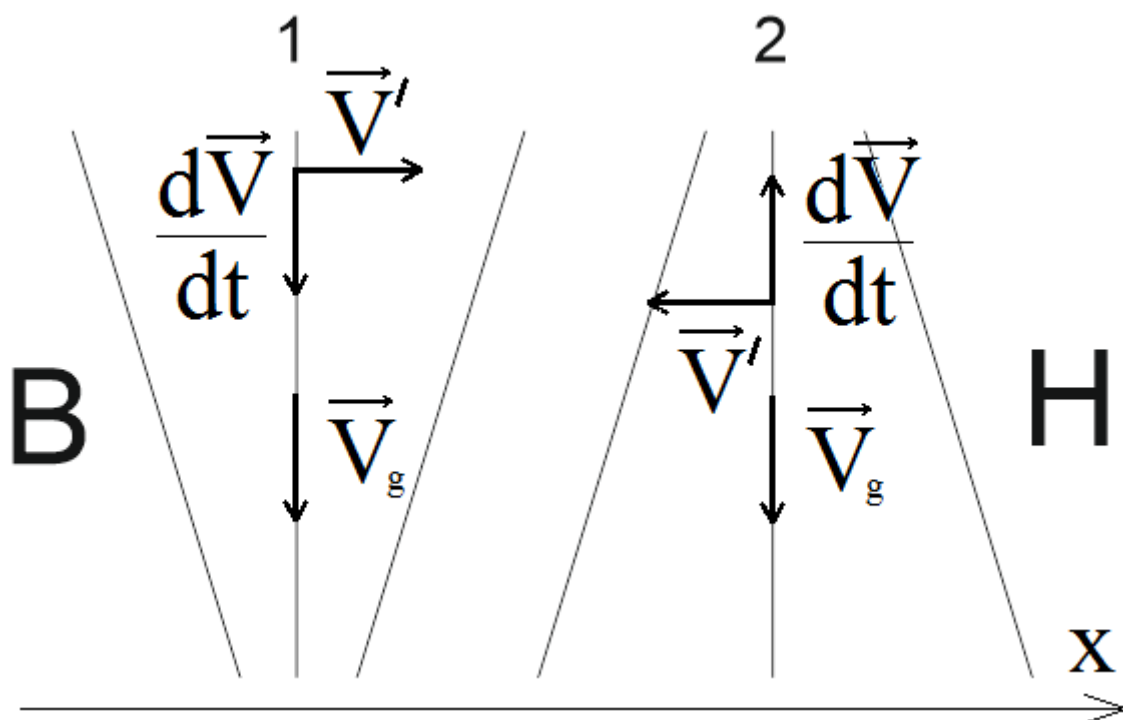


Рисунок 2.11 – Поле ізобар, в якому можуть розвиватись вертикальні рухи

В лівій частині поля (випадок 1) градієнт тиску суттєво збільшується в напрямку руху частинок. Тому частинки тут рухаються з досить великим прискоренням, а отже, згідно з (2.60), досить великими є і значення  $|\vec{V}'|$ . Зі збільшенням  $x$  з аналогічних міркувань величина  $|\vec{V}'|$  зменшується, тобто  $\frac{\partial \rho |\vec{V}'|}{\partial x} < 0$ .

Згідно з (2.72), за такої ситуації швидкість вертикальних рухів збільшується з висотою, якщо на нижній межі вільної атмосфери спостерігається висхідний потік (пов'язаний, наприклад, з процесами в граничному шарі), і зменшується, якщо рух спрямований донизу. Якщо на нижньому рівні вертикальні рухи відсутні, то за рахунок агеострофічності розвиватимуться висхідні рухи.

## 2.9 Питання для самоперевірки

1. Які властивості притаманні вільній атмосфері?
2. Які рухи називають великомасштабними в атмосфері (їх масштаби)?
3. Чим відрізняються великомасштабні рухи від рухів інших масштабів?
4. Які сили мають найбільший порядок у рівняннях руху?
5. Якою силою можна знехтувати у вільній атмосфері?
6. Які сили врівноважуються при великомасштабних атмосферних рухах у горизонтальній площині?
7. Які сили врівноважуються при великомасштабних атмосферних рухах у вертикальній площині?
8. Який рух в атмосфері має назву градієнтного вітру?
9. Який рух в атмосфері має назву геострофічної течії?
10. Які сили врівноважуються для геострофічної течії в атмосфері?
11. Якими особливостями характеризується геострофічна течія?
12. Як спрямовані вектори геострофічного вітру та горизонтального баричного градієнта один відносно одного? Доведіть.
13. Що являє собою термічний вітер?
14. За допомогою якої синоптичної карти можна визначити термічний вітер?
15. Якими особливостями характеризується термічний вітер?
16. Як спрямовані вектори термічного вітру та горизонтального градієнта середньої температури в шарі один відносно одного?
17. Що таке висота обертання геострофічного вітру?
18. Як спрямовані горизонтальні градієнти температури та тиску при наявності обертання геострофічного вітру?
19. Як змінюватиметься геострофічний вітер з висотою при адвекції холоду (тепла)?
20. Як змінюється геострофічний вітер з висотою при горизонтальних градієнтах тиску та середньої температури, спрямованих в одну й ту саму сторону (в протилежні сторони)?
21. Які сили врівноважуються для градієнтного вітру в циклоні (антициклоні)?
22. Як змінюватиметься градієнтний вітер з висотою в західній (східній) частині циклона при збільшенні температури з півночі на південь?
23. Як змінюватиметься градієнтний вітер з висотою в західній (східній) частині антициклону при збільшенні температури з півночі на південь?
24. Як змінюватиметься градієнтний вітер з висотою в північній (південній) частині циклона при збільшенні температури з півночі на південь?
25. Де існує обмеження для градієнтного вітру: в циклоні чи антициклоні? Доведіть.

### 3 ХВИЛЬОВІ РУХИ В АТМОСФЕРІ

Хвилі в атмосфері можуть виникати, з одного боку, внаслідок дії зовнішніх сил, які змінюються періодично, а з другого боку, вони можуть являти собою результат еволюції невеликих збурень, які накладаються на визначений вихідний стан.

Перший тип хвиль виникає, наприклад, в результаті сил притягання Місяця та інших планет, тому ці хвилі називаються припливними. Другий тип формується при порушенні рівноваги діючих сил (наприклад, сили баричного градієнта і сил тяжіння або Коріоліса), тобто хвильові збурення виникають в тих шарах атмосфери, де частинки повітря під дією миттєвої сили виводяться із стану спокою і починають спонтанно коливатися біля стану рівноваги або біля деякого стану атмосфери, який розглядається як основний. Хвильові рухи такого типу називаються власними або вільними на відміну від першого типу хвиль, які називаються вимушеними.

#### 3.1 Класифікація хвильових рухів в атмосфері

В атмосфері (як і в океані) виключно велике різноманіття хвильових рухів в атмосфері, яке обумовлено впливом сил різного походження.

В реальних умовах сили зазвичай мають нерегулярний характер. Окрім того, внаслідок нелінійності хвильових рухів відбувається обмін енергією між хвилями різних масштабів і походження, а також між хвилями і рухами в атмосфері нехвильового типу (наприклад, зональним потоком). Хвилі, які виникли під дією тих або інших сил, або затухають під впливом сили в'язкості, або стають динамічно нестійкими, які трансформуються в турбулентні вихори різних масштабів. Внаслідок цього хвильові рухи в атмосфері мають виключно складний характер. З цієї причини все більш широке застосування знаходить ймовірнісно-статистичний підхід до опису хвильових рухів різних просторово-часових масштабів.

Проте як при гідродинамічному, так і при статистичному моделюванні основоположне значення зберігає уявлення про основні хвильові рухи.

В залежності від переважаючої ролі тієї чи іншої сили у виникненні хвильових рухів всі хвилі поділяють на чотири класи. При цьому виходить, що в різних класах хвиль суттєво відрізняється співвідношення між періодом хвилі ( $P$ ) і періодом інерційних коливань ( $P_\varphi$ ). Останній являє собою період, з яким обертається горизонтальна площина на широті  $\varphi$  навколо вертикалі (період коливань маятника). Оскільки на широті  $\varphi$  вертикальна складова ( $\omega_z$ ) кутової швидкості ( $\omega$ ) дорівнює  $\omega_z = \omega \sin\varphi$ , то період обертання горизонтальної площини на широті  $\varphi$

$$P_\varphi = \frac{2\pi}{\omega_z} = \frac{2\pi}{\omega \sin\varphi} = \frac{P_c}{\sin\varphi},$$

де  $P_c = 2\pi/\omega$  – період добового обертання Землі.

Перший клас хвильових рухів називають гравітаційними хвилями, у формуванні яких домінуючу роль відіграє сила тяжіння. При цьому період хвилі суттєво менший за період інерційних коливань ( $P \ll P_\varphi$ ).

Другий клас складають інерційно-гравітаційні хвилі, в формуванні яких визначальний внесок робить сила тяжіння і відхиляюча сила обертання Землі (інерційна коріолісова сила). Період таких хвиль не перевищує періоду інерційних коливань ( $P \ll P_\varphi$ ).

Хвилі першого і другого класу широко розповсюджені в атмосфері. Вони виникають в шарах з різкою зміною вертикального градієнта температури (зокрема, в інверсійних шарах), швидкості вітру і вологості повітря. Такі ж хвилі формуються під впливом неоднорідностей земної поверхні (в першу чергу гір і височин, а також термічних неоднорідностей). Хвилі цих класів здійснюють суттєвий вплив на структуру хмарних полів.

До третього класу відносяться інерційні або гіроскопічні хвилі. Визначальною силою хвильових рухів цього класу є коріолісова сила. Період цих хвиль близький до  $P_\varphi$  ( $P \approx P_\varphi$ ).

В атмосфері виключно велика роль належить планетарних хвилям (хвилям Россбі), які складають четвертий клас. У формуванні цих хвиль визначальний внесок здійснюють ефекти, які обумовлені обертанням (коріолісова сила) і сферичністю Землі.

В кожному з названих класів виділяють два види хвиль. Перший вид – це баротропні хвилі, які формуються в середовищі з постійною густиною. Характеристики баротропних хвиль не залежать, зокрема, від розподілу густини повітря по вертикалі. Баротропні хвилі називають також поверхневими хвилями, оскільки їх амплітуда максимальна поблизу поверхні, на знаходиться джерело, що порушує хвилю. Зі збільшенням відстані від джерела амплітуда хвилі зменшується приблизно за експоненціальним законом.

До другого виду відносяться бароклінічні хвилі, у формуванні і структурі яких суттєву роль відіграє розподіл густини (температури) повітря по горизонталі і вертикалі, який породжує сили плавучості. Параметри бароклінічних хвиль тісно пов'язані з термічною стратифікацією атмосфери (частотою Ваясяля-Брента). Пояснімо, що таке частота Ваясяля-Брента.

Частота Ваясяля-Брента ( $N$ ) – це частота, з якою елемент повітря (рідини), який було переміщено вертикально в стратифікованому середовищі, коливатиметься в цьому середовищі.

$$N^2 = \frac{g}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial z}$$

При  $\frac{\partial \theta}{\partial z} = 0$  частинка, виведена із стану рівноваги, буде залишатись на тому рівні, куди вона буде переміщена. Така стратифікація називається нейтральною.

При  $\frac{\partial \theta}{\partial z} < 0$  напрямок сили плавучості співпадає з напрямком руху частинки (незалежно від того, вгору чи вниз рухається частинка) і вона діє на рідку частинку, яка зміщується прискорено.

В результаті частинка віддаляється від початкового рівня. Така стратифікація є нестійкою. При слабкій дії дисипативних чинників в середовищі розвинеться конвекція, яка за допомогою роботи сил плавучості буде здобувати кінетичну енергію за рахунок потенціальної енергії нестійкої стратифікації.

При  $\frac{\partial \theta}{\partial z} > 0$  сила плавучості напрямлена проти руху частинки, яка адіабатично переміщується, діє на неї повертаючим чином і намагається повернути частинку на вихідний рівень. Така стратифікація є стійкою.

Вертикальне зміщення рідкої частинки вимагає при стійкій стратифікації витрати енергії на роботу проти сили плавучості. Якщо таке переміщення здійснено, то, поки не з'являться дисипативні фактори, частинка коливатиметься по вертикалі відносно свого рівноважного рівня з частотою  $N$ . Це пов'язано з тим, що при досягненні початкового рівня частинка за рахунок сили плавучості набула деякої швидкості і по інерції продовжуватиме рух до рівня, на якому швидкість обертається на нуль. Потім рух повторюється в зворотному напрямку. Величину  $N$  можна визначити з рівняння, яке виходить прирівнюванням прискорення частинки силі плавучості, діючій на одиницю маси рідини:

Бароклинні хвилі називають також внутрішніми хвилями, оскільки вони поширюються зазвичай на значні шари атмосфери (наприклад, на всю тропосферу або стратосферу).

Розрізняють також вільні і вимушені хвилі. Вимушені хвилі знаходяться під безпосереднім впливом сил, що їх порушують. Вільні хвилі виникають під впливом початкового збурення.

Існує також кінематична класифікація, ураховує лише кінематичні особливості рухів, зокрема, взаємне розташування напрямку розповсюдження хвилі і траєкторій частинок, які коливаються. В залежності від цього хвилі підрозділяються на три типи: повздовжні, вертикально-поперечні та горизонтально-поперечні.

Повздовжні хвилі або хвилі стиснення – це такі коливання, при яких траєкторії частинок паралельні напрямку розповсюдження хвилі (рис. 3.1а). Такі хвилі можуть виникати і поширюватися тільки в пружному середовищі (стиснення і розширення), які виникають в процесі деформації. Рисунок 3.1а наочно демонструє виникнення повздовжної хвилі в результаті стиснення повітря уздовж лінії, яка розділяє протилежні течії. Відповідно до рисунку

3.1а поширюватися праворуч і ліворуч буде лінія стиснення, але це у випадку одновимірної повздовжньої хвилі. Якщо маємо справу з тривимірною хвилею, то вона буде поширюватися у всіх напрямках і фронтом хвилі, тобто поверхнею перпендикулярною до напрямків поширення хвилі, будуть концентричні сферичні поверхні, що очолюють сферу, в центрі якої знаходиться джерело хвиль. До повздовжніх відносяться акустичні або звукові хвилі.

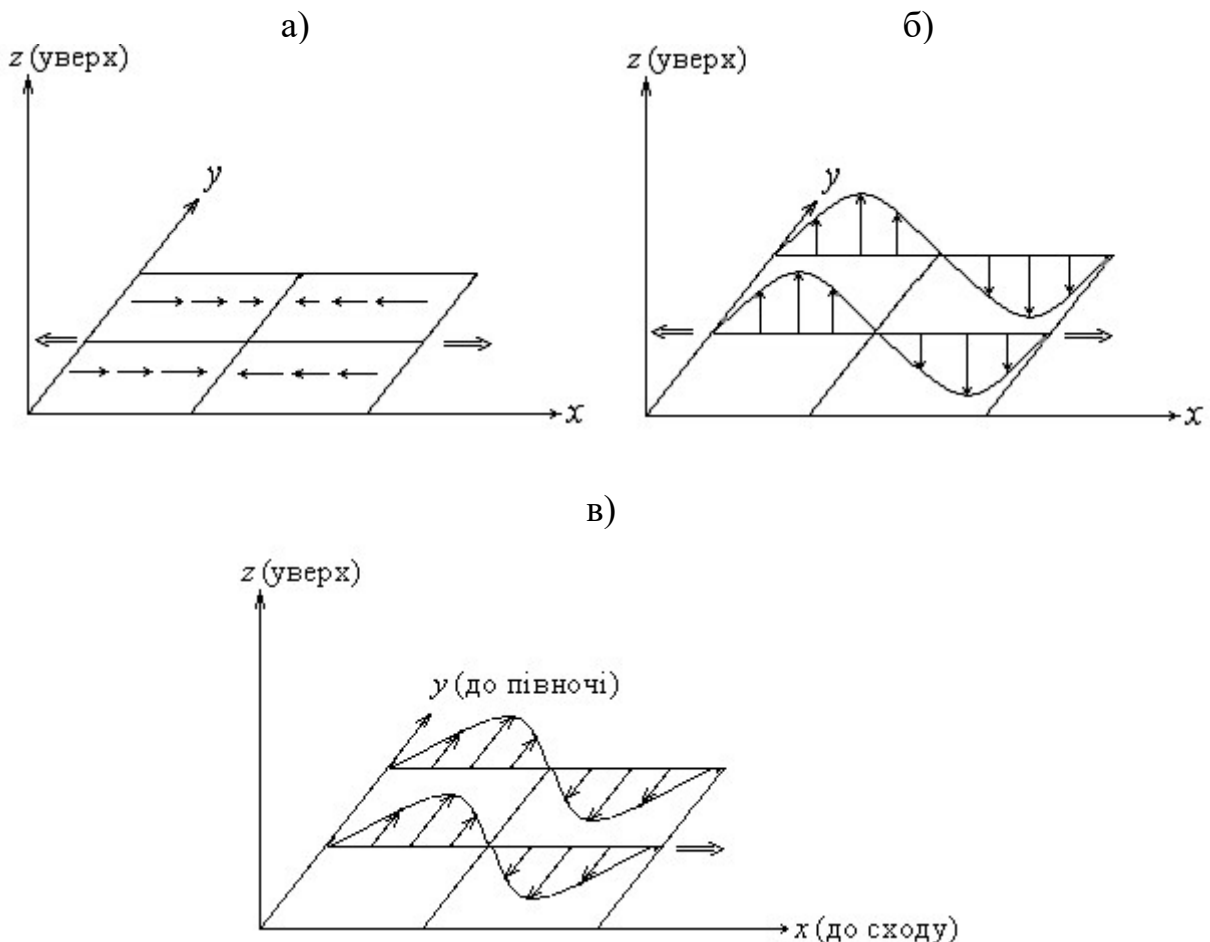


Рисунок 3.1 – Схематичне зображення траєкторій частинок і напрямку поширення для повздовжніх хвиль (а), вертикально-поперечних (б) і горизонтально-поперечних (в)

Вертикально-поперечні хвилі – це такі коливання, при яких частинки середовища рухаються уверх і униз, а сама хвиля розповсюджується в горизонтальному напрямку. На рисунку 3.1б зображена одновимірна вертикально-поперечно хвиля, яка поширюється уздовж осі  $x$  ліворуч і праворуч від місця її виникнення. Якщо хвиля двовимірна то хвильове збурення розповсюджується уздовж осей  $x$  та  $y$ , а у випадку тривимірної хвилі поширення відбувається ще й уздовж осі  $z$ .

В атмосфері вертикально-поперечні хвилі виникають під дією сили плавучості і формування їх можливе лише в стратифікованій по температурі

атмосфері. До цього типу належать гравітаційні хвилі або хвилі плавучості. До гравітаційних відносяться також хвилі, які виникають завдяки порушенню геострофічної рівноваги в атмосфері. Ці хвилі на відміну від хвиль плавучості поширюються зі значно більшими швидкостями.

Горизонтально-поперечні хвилі – це коливання, в якому частинки середовища зміщуються з півночі на південь і з півдня на північ, а сама хвиля поширюється, як правило, на схід (рис. 3.1в). Ці хвилі можуть охоплювати потужний шар атмосфери і розповсюджуватися не тільки уздовж осі  $x$ , а і уздовж осі  $y$ , тобто ці хвилі можуть бути одновимірними і двовимірними.

На закінчення відзначимо, що відповідно до гідродинамічної класифікації всі атмосферні рухи достатньо грубо можна поділити на макромасштабні, мезомасштабні і мікромасштабні. Більш придатною для хвиль є класифікація, яка базується на порівнянні періодів  $L$  і  $L_{\text{ін.}}$ , відповідно до якої в атмосфері виділяють гравітаційні хвилі, інерційногравітаційні та планетарні хвилі Россбі.

Але атмосферні рухи багатомасштабні, тому існують і інші класифікації, в яких ураховуються параметри хвиль, їх спектральні характеристики, або процеси та явища, що супроводжують хвилі. Деякі з цих класифікацій досить детально викладені в підручнику з хвильових процесів в атмосфері (автор А.Ф. Ківганов).

### 3.2 Хвилі Россбі

Хвилі Россбі за кінематичною класифікацією належать до горизонтально-поперечних хвиль, в яких повітряні маси рухаються з півдня на північ і з півночі на південь, а самі хвилі розповсюджуються з заходу на схід або зі сходу на захід. Оскільки ці хвилі займають великий простір, ми говоримо тут про повітряні маси, а не дрібні об'єми повітря.

Як відзначалося вище, хвилі Россбі виникають завдяки добовому обертанню Землі і її сферичній формі, із-за якої параметр Кориоліса змінюється з широтою. На необертовій Землі такі хвилі були б неможливі.

В розділі 1 даного Конспекту наведений якісний аналіз рівняння перенесення вихору. Тут надається розв'язок цього рівняння в окремому, вкрай важливому, випадку.

Припустимо, наслідуючи Россбі, що рух повітряної маси 1) баротропний, 2) бездивергентний (соленоїдальний), 3) горизонтальний і 4) ідеальний (за відсутності сил тертя). В цьому випадку рівняння переносу вихору (1.78) набуде вигляду

$$\frac{\partial \Omega_z}{\partial t} + u \frac{\partial \Omega_z}{\partial x} + v \frac{\partial \Omega_z}{\partial y} + \beta v = 0, \quad (3.1)$$

або

$$\frac{d(\Omega_z + 2\omega_z)}{dt} = 0, \quad (3.2)$$

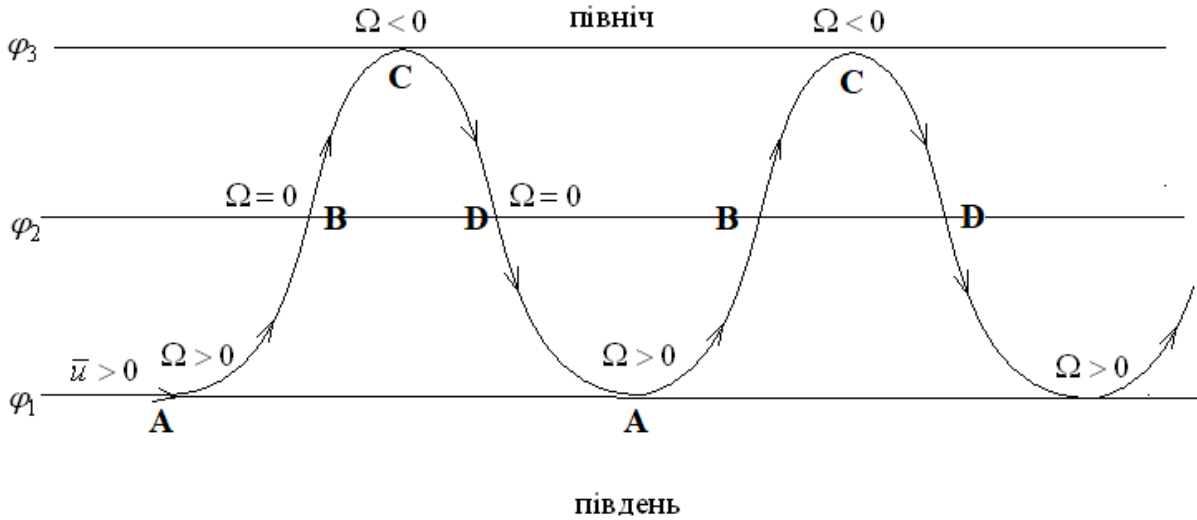


Рисунок 3.2 – Схема, яка пояснює виникнення хвиль Россбі

З рівняння (3.2) випливає, що в повітряній масі, яка рухається за вказаних припущеннях абсолютний вихор  $\Omega_a = \Omega_z + 2\omega_z$  зберігає постійне значення, тобто є інваріантом:

$$\Omega_z + 2\omega \sin \varphi = const. \quad (3.3)$$

Перш ніж побудувати розв'язок рівняння (3.1), покажемо, що рух атмосфери, який описується рівнянням (3.3), має коливальний (хвильовий) характер.

Припустімо, що в частинці, яка переміщується із самого початку з заходу на схід, під впливом бароклинності (або якогось іншого фактору) виникає циклонічний вихор ( $\Omega_z > 0$ ). Це означає, що траєкторія частинки набуває циклонічної кривизни, а разом з нею і додатну складову швидкості руху ( $v > 0$ ) уздовж меридіану (точка A на рис. 3.2). Проте як тільки частинка почне переміщатися до полюса, її відносний вихор  $\Omega_z$ , як показує рівняння (3.3), почне зменшуватися, оскільки зі збільшенням широти зростатиме другий доданок в лівій частині (3.3). На деякій широті вихор  $\Omega_z$  зменшиться до нуля (траєкторія частинки перейде через точку перегину B, де кривизна дорівнюватиме нулю). Оскільки частинка продовжує рухатися до полюсу ( $v > 0$ ) і широта її зростає, то після точки B в частинці виникає і починає посилюватись від'ємний (антициклонічний) вихор ( $\Omega_z < 0$ ). Оскільки при цьому кривизна траєкторії частинки від'ємна, то, як показує рис. 3.2, частинка невідворотно досягне в деякій точці C крайнього північного положення, а потім почне переміщуватись у напрямку до



екватору ( $v < 0$ ). При цьому від'ємний вихор частинки зростатиме (оскільки зменшуватиметься широта) і в деякій точці  $D$  обернеться на нуль (траєкторія перейде через другу точку перегину). Після точки  $D$  вихор буде додатним ( $\Omega_z > 0$ ), а кривизна траєкторії – циклонічною. При такій кривизні частинка невідворотно досягне крайнього південного положення (точка  $A'$  на рис. 3.2), після чого почне рухатись в напрямку до полюсу, послідовно проходячи через точки  $B', C', D'$  тощо.

Підкреслимо, що вихор є від'ємним ( $\Omega_z < 0$ ) між точками  $B$  і  $D$ , додатним ( $\Omega_z > 0$ ) – між точками  $D$  і  $B'$ ; сягає максимуму – в точках  $A$  і  $A'$  (підосва хвилі) і мінімуму – в точках  $C, C'$  (гребінь хвилі). В повітряній частинці, яка рухається,  $\Omega_z$  зменшуватиметься з часом між точками  $A$  і  $C$ , зростає між точками  $C$  і  $A'$ .

Такі самі міркування приводять до висновку, що хвилі в західному потоці виникають також і в тому випадку, коли початкове збурення є антициклонічним.

Проте в деяких регіонах Землі (наприклад, в субтропіках або в високих широтах) спостерігається перенесення повітря зі сходу на захід. Якщо в такому потоці частинка відхилиться до півночі (виникне антициклонічна кривизна), то з рухом частинки далі на північ від'ємний вихор посилюватиметься, оскільки в рівнянні (3.3) другий доданок при цьому зростатиме, а вихор  $\Omega_z$  має зменшуватиметься (зростатиме за абсолютною величиною). При такому русі частинка на деякій широті сягне крайнього північного положення, а вихор – мінімального значення (максимального за модулем). Після цього частинка розпочне рух до півдня, вихор її при цьому збільшуватиметься і, коли маса повернеться на початкову широту, її вихор буде таким самим, як і в початковий момент.

Наведені міркування показують, що при виникненні (наприклад, під впливом бароклинності) у східному потоці від'ємної кривизни частинка опише замкнену антициклонічну траєкторію. Такі рухи відіграють важливу роль в розчленуванні субтропічного поясу тиску на окремі антициклони (Азорський над Атлантичним океаном, Гонолульський над Тихим тощо).

Якщо у східному потоці повітряна маса відхилиться до півдня, тобто виникне циклонічна кривизна, то маса рухатиметься уздовж замкненої циклонічної траєкторії – сформується циклонічний вихор.

Перейдемо до розв'язання рівняння (3.3). Оскільки рух є бездивергентним

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \equiv D_s = 0, \quad (3.4)$$

то можна ввести функцію течії  $\psi = \psi(x, y, t)$ , яка пов'язана з  $u$  і  $v$  співвідношеннями:

$$u = -\frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial\psi}{\partial x}. \quad (3.5)$$

Вихор швидкості  $\Omega_z$  запишеться у вигляді:

$$\Omega_z = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = \nabla^2\psi. \quad (3.6)$$

Рівняння (3.1) є нелінійним. В загальному випадку його розв'язання можна отримати лише за допомогою чисельних методів. Проте структура повітряного потоку така, що як перше наближення рівняння (3.1) можна лінеаризувати.

Для лінеаризації рівняння (3.6) згідно з методом малих збурень представимо величини  $u$ ,  $v$  і  $\Omega_z$  як суми характеристик основного стану  $\bar{u}$ ,  $\bar{v}$ ,  $\bar{\Omega}$  і характеристик хвильових збурень  $u'$ ,  $v'$  і  $\Omega'$ . В якості основного стану будемо розглядати зональну течію, швидкість якої дорівнює  $\bar{u}$ , а меридіональна складова швидкості в такому випадку дорівнює нулю. Таке припущення достатньо коректне, тому що у вільній атмосфері помірних широт переважає західно-східне перенесення повітряних мас, тому хвилі Россбі найчастіше формуються і розповсюджуються в зональних течіях. Отже, відповідно до сказаного представимо величини  $u$ ,  $v$  і  $\Omega_z$  таким чином

$$u = \bar{u} + u'; \quad v = v'; \quad \Omega_z = \bar{\Omega}_z + \Omega'_z. \quad (3.7)$$

Швидкість  $\bar{u}$  вважається постійною (не залежить від  $x$  і  $y$ ). Тому вихор:

$$\Omega_z = \frac{\partial v'}{\partial x} - \frac{\partial(\bar{u} + u')}{\partial y} = \nabla^2\psi', \quad (3.8)$$

де  $\psi'$  – функція течії, яка описує малі відхилення швидкості руху від  $\bar{u}$ :

$$u' = \frac{\partial\psi'}{\partial y}, \quad v' = \frac{\partial\psi'}{\partial x}. \quad (3.9)$$

Підставивши величини  $\Omega_z$ ,  $u$  і  $v$ , які було визначено співвідношеннями (3.7) – (3.9), в рівняння (3.1), отримаємо

$$\frac{\partial\nabla^2\psi'}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial\nabla^2\psi'}{\partial x} + \beta\frac{\partial\psi'}{\partial x} = 0, \quad (3.10)$$

при цьому ми знехтували доданками малих величин порівняно з їх першими степенями.

Рівняння (3.10) – це вже лінійне рівняння відносно  $\psi'$ . Підставимо  $\psi'$  в такому вигляді

$$\psi' = A \sin \frac{2\pi}{\lambda} (x - ct) \cos \frac{2\pi}{b} y, \quad (3.11)$$

де  $\lambda$  – довжина хвилі,  $c$  – фазова швидкість руху її уздовж осі  $x$  (кола широти),  $b$  – ширина хвилі уздовж осі  $y$  (меридіональна),  $A$  – амплітуда хвилі.

Оскільки

$$\begin{aligned} \nabla^2 \psi' &= -A \left[ \left( \frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 + \left( \frac{2\pi}{b} \right)^2 \right] \sin \frac{2\pi}{\lambda} (x - ct) \cos \frac{2\pi}{b} y, \\ \frac{\partial \nabla^2 \psi'}{\partial t} &= Ac \frac{2\pi}{\lambda} \left[ \left( \frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 + \left( \frac{2\pi}{b} \right)^2 \right] \cos \frac{2\pi}{\lambda} (x - ct) \cos \frac{2\pi}{b} y, \\ \frac{\partial \nabla^2 \psi'}{\partial x} &= -A \frac{2\pi}{\lambda} \left[ \left( \frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 + \left( \frac{2\pi}{b} \right)^2 \right] \cos \frac{2\pi}{\lambda} (x - ct) \cos \frac{2\pi}{b} y, \\ \frac{\partial \psi'}{\partial x} &= A \frac{2\pi}{\lambda} \cos \frac{2\pi}{\lambda} (x - ct) \cos \frac{2\pi}{b} y, \end{aligned}$$

то після підстановки трьох останніх виразів в рівняння (3.10) і скорочення загальних множників отримаємо

$$c \left[ \left( \frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 + \left( \frac{2\pi}{b} \right)^2 \right] - \bar{u} \left[ \left( \frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 + \left( \frac{2\pi}{b} \right)^2 \right] + \beta = 0.$$

Звідси швидкість руху хвилі, яка нас саме і цікавить

$$c = \bar{u} - \frac{\beta \lambda^2}{4\pi^2} \frac{b^2}{\lambda^2 + b^2}$$

або

$$c = \bar{u} - \frac{\beta \lambda^2}{4\pi^2} \frac{1}{1 + \lambda^2/b^2}. \quad (3.12)$$

Якщо не враховувати у співвідношенні (3.12) залежності функції течії від  $y$  (для цього потрібно параметр  $b$  спрямувати до нескінченності), то формула (3.12) набуде вигляду

$$c = \bar{u} - \frac{\beta \lambda^2}{4\pi^2}. \quad (3.13)$$

Цю формулу вперше отримав К.Г. Россбі в 1939 р. Врахував залежність  $\psi'$  від  $u$  і отримав загальну формулу Б. Гаурвіц в 1940 р.

Одержані рівняння для  $c$  показують, що на відміну від акустичних та гравітаційних хвиль, фазова швидкість хвиль Россбі залежить не тільки від характеристик основного стану, а і від параметрів самих хвиль. Так, із рівняння (3.13) випливає, що  $c$  залежить від швидкості зонального потоку  $\bar{u}$  і зміни параметра Кориоліса з широтою  $\beta$ , а також від довжини хвилі  $\lambda$ .

Треба відзначити, що незважаючи на численні спрощення, які були прийняті при постановці задачі і її розв'язанні, побудована лінійна модель досить добре описує процеси, які відбуваються в реальній атмосфері. Про це свідчать результати аналізу розв'язку (3.13). Зробимо цей аналіз.

1. Розглянемо спочатку випадок, коли хвиля нерухома, тобто  $c = 0$ . Із формули (3.13) маємо

$$0 = \bar{u} - \frac{\beta \lambda_0^2}{4\pi^2}, \quad (3.14)$$

де  $\lambda_0$  – довжина стоячої хвилі. Знайдемо цю довжину

$$c = 2\pi \sqrt{\frac{\bar{u}}{\beta}}, \quad (3.15)$$

де  $\beta = \frac{2\omega \cos \varphi}{a}$  – параметр Россбі.

Результати розрахунків  $\lambda_0$  наведено в таблиці 3.1.

Таблиця 3.1 – Довжина стаціонарних хвиль (км)

$\varphi$	$\bar{u}$ , м/с				
	5	10	15	20	25
30	3150	4460	5640	6310	7050
45	3490	4940	6050	6980	7790
60	4140	5850	7180	8300	9260

Згідно з даними табл. 3.1, довжина стаціонарних хвиль становить декілька тисяч кілометрів, вона зростає зі збільшенням швидкості зонального потоку і географічної широти.

Фазова швидкість  $c$  рухомих хвиль, згідно з формулами (3.12) і (3.13), завжди менша ніж швидкість зонального потоку:  $c < \bar{u}$ , тобто хвилі відстають від ведучого потоку.

Оскільки, згідно з (3.14)

$$\frac{\beta}{4\pi^2} = \frac{\bar{u}}{\lambda_0^2},$$

то формулу (3.13) можна записати у вигляді

$$c = \bar{u} \left( 1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_0^2} \right), \quad (3.16)$$

Звідси випливає, що хвилі, довжина яких менша за  $\lambda_0$  ( $\lambda < \lambda_0$ ), рухаються з заходу на схід (їх фазова швидкість додатна,  $c > 0$ ), а хвилі, довжина яких більша за  $\lambda_0$  ( $\lambda > \lambda_0$ ), рухаються зі сходу на захід (їх фазова швидкість від'ємна,  $c < 0$ ).

Швидкість руху дуже коротких хвиль (такі хвилі зазвичай мають і невелику амплітуду) мало відрізняється від швидкості зонального потоку ( $c \approx \bar{u}$ ). Зі збільшенням довжини хвилі швидкість  $c$  все більше відхиляється (в бік зменшення) від  $\bar{u}$ , а при  $\lambda > \lambda_0$  швидкості  $c$  і  $\bar{u}$  вже відрізняються і за знаком:  $\bar{u} > 0$  і  $c < 0$ .

Відзначимо, що хвилі більшої довжини зазвичай мають і більшу амплітуду. З такими малорухомими хвилями пов'язано явище, яке отримало назву блокування: нерухомі ( $c = 0$ ) або гребні і улоговини, які повільно рухаються, затримують (блокують) рух більш коротких хвиль, а також приземних циклонів і антициклонів.

Хвилі Россбі добре виявляються на картах погоди. Гребені цих хвиль збігаються з осями баричних гребенів або центрами антициклонів, а улоговини – з осями баричних улоговин або центрами циклонів. Довжини хвиль можна визначити як відстань між центрами сусідніх циклонів (антициклонів) або між осями сусідніх баричних улоговин (гребенів).

Із синоптичної практики відомо, що більшість баричних утворень переміщується з заходу на схід і горизонтальні розміри баричних систем, які утворюють хвилі Россбі, менші за довжини стоячих хвиль на відповідних широтах. Прикладом хвилі, яка переміщується у зворотному напрямку, тобто зі сходу на захід, є сибірський антициклон (півхвиля). Відомо, що гребень цього антициклону має тенденцію розповсюджуватися на райони європейського континенту і може досягати атлантичного узбережжя. Таким чином, висновки, які були зроблені, з теоретичного дослідження хвиль Россбі, підтверджуються процесами, що неперервно відбуваються в реальній атмосфері.

При розповсюдженні хвиль Россбі відбуваються значні зміни в полях метеорологічних величин. Наприклад, амплітуди цих хвиль в полі тиску складають 20 – 100 гПа, а іноді досягають і 120 гПа. Такі зміни тиску сприяють суттєвому збільшенню амплітуд в полі вітру, а значить і в полях інших метеорологічних величин, тобто довгі хвилі відповідні за різкі зміни погоди над великими територіями, і з точки зору задачі прогнозу погоди саме ці хвилі представляють найбільший інтерес. Отже, це метеорологічно значущі хвилі і в будь-якій прогностичній моделі вони повинні враховуватися в першу чергу.

### 3.3 Питання для самоперевірки

1. Які рухи називаються хвильовими?
2. Які рухи в атмосфері можна віднести до хвильових?
3. Які коливання відносяться до вільних та вимушених?
4. Які класифікації хвильових рухів Ви знаєте?
5. За якими принципами побудовано кінематичну класифікацію хвильових рухів?
6. За якими принципами побудовано гідродинамічну класифікацію хвильових рухів?
7. Які хвилі відносяться до хвиль Россбі? Чи можемо ми ці хвилі виявити на синоптичних картах?
8. Які хвилі є значущі з метеорологічної точки зору?
9. Якщо відфільтрувати гравітаційні хвилі, то які процеси в атмосфері в цьому випадку не враховуються?
10. Які фізичні чинники приводять до виникнення хвиль Россбі в атмосфері?
11. За кінематичною класифікацією до якого класу відносяться хвилі Россбі?
12. За кінематичною класифікацією до якого класу відносяться акустичні хвилі?
13. За кінематичною класифікацією до якого класу відносяться гравітаційні хвилі?
14. Від чого залежить швидкість хвиль Россбі?
15. На яких об'єктах в атмосфері спостерігається найбільша швидкість гравітаційних хвиль?
16. Які об'єкти в атмосфері є наочним проявом гравітаційних хвиль?
17. Які параметри хвиль Ви знаєте? Як вони пов'язані між собою?
18. У чому полягає сутність метод малих збурень?
19. Які характеристики зв'язує дисперсійне рівняння?
20. Якою функцією можна описати форму одновимірної хвилі?
21. Що таке стаціонарні хвилі?
22. В якому напрямку рухаються короткі та довгі хвилі Россбі?

## 4 ФІЗИКА ГРАНИЧНОГО ШАРУ АТМОСФЕРИ

### 4.1 Поняття ламінарного і турбулентного потоку. Критерій переходу з одного стану до іншого

З курсу фізики атмосфери відомо, що всі течії, які спостерігаються в атмосфері, умовно можна поділити на два види: ламінарні і турбулентні. Нагадаємо, що ламінарний режим руху – це такий режим, при якому частинки рідини або газу переміщуються паралельно одна одній, за траєкторіями, що являють собою плавні, мало мінливі у часі криві або прямі.

При турбулентному режимі рух окремої частинки рідини або газу має неправильні, хаотичні траєкторії з поперечними та навіть назадніми (по відношенню до загального руху) переміщеннями окремих малих об'ємів.

Про турбулентний характер атмосферних рухів свідчать записи змін у часі і в просторі метеорологічних величин, які отримані за допомогою малоінерційної вимірювальної апаратури, а також спостережень за розповсюдженням диму від промислових джерел.

Ламінарні і турбулентні течії являють собою два види рухів, властивості яких істотно відрізняються і які при певних умовах можуть переходити один в другий. Відмінність між ними полягає в цілій низці процесів, які мають велике практичне значення. Наприклад, відомо, що при турбулентному режимі вплив потоку повітря на тіла, що обтікаються потоком повітря, є значно більшим, ніж при ламінарному. Окрім того, в турбулентних потоках поширення тепла і домішок відбувається значно інтенсивніше.

Тому визначення умов переходу ламінарного режиму в турбулентний є дуже важливим при розв'язанні багатьох прикладних задач.

Теоретичні і експериментальні дослідження показали, що характер руху рідини або газу залежить від безрозмірного числа, яке має назву числа Рейнольдса (критерій виникнення турбулентності було отримано англійським фізиком Рейнольдсом в 1883 р. під час вивчення рухів рідини в круглих скляних трубах).

$$Re = \frac{UL}{\nu}, \quad (4.1)$$

Ламінарний рух переходить у турбулентний, коли число  $Re$  стає більшим за деяке критичне значення  $Re_{кр}$ . Тут  $U$  і  $L$  – відповідно характерні масштаби швидкості і довжини ( $L$  – характерний масштаб руху),  $\nu$  – кінематичний коефіцієнт в'язкості. Відповідно до (4.1) число  $Re$  характеризує відносну роль сил інерції і молекулярної в'язкості в динаміці

руху. Отримаємо вираз для  $Re$ . Для цього оцінимо порядки відповідних членів в рівнянні руху Нав'є-Стокса:

$$\frac{v \frac{\partial v}{\partial s}}{v \frac{\partial^2 v}{\partial^2 s}} \sim \frac{U \frac{U}{L}}{v \frac{U}{L^2}} \sim \frac{UL}{v} = Re$$

Сили інерції, завдяки яким здійснюється перенесення кількості руху в просторі, сприяє виникненню неоднорідностей в потоці. Сили в'язкості, навпаки, вирівнюють неоднорідності, які виникають. Для малих  $Re$ , коли сили інерції невеликі, сили в'язкості встигають вирівняти виникаючі неоднорідності, тому рух лишається ламінарним. Для великих числах  $Re$ , коли переважальними стають сили інерції, в потоці виникають різкі неоднорідності і всі характеристики потоку зазнають нерегулярних змін; рух стає турбулентним.

Критичні значення  $Re_{кр}$  було визначено експериментально для різних типів турбулентних течій. Встановлено, що величина  $Re_{кр}$  суттєво залежить від ступеня збуреності ламінарного потоку, тобто його початкової турбулізації. Число  $Re_{кр}$  тим менше, чим більше початкова турбулізація; інакше кажучи, в більш збуреному ламінарному потоці турбулентний режим виникає при менш критичних числах Рейнольдса.

## 4.2 Система рівнянь гідротермодинаміки для турбулентної атмосфери

### 4.2.1 Методика осереднення рівнянь гідротермодинаміки. Правила осереднення

Як вже було зазначено, структура турбулентного потоку є настільки складною, що всі величини, які входять до рівнянь руху (швидкість, температура, тиск), зазнають значних змін у часі і просторі. Тому рівняння для миттєвих реальних швидкостей можна застосувати до вивчення руху окремої частинки, але знайти інтеграли цих рівнянь є абсолютно неможливим.

З іншого боку, всі прилади не пристосовані для фіксування миттєвих значень гідродинамічних величин, а надають значення різного ступеня осередненості.

Тому має сенс при вивченні турбулентних рухів отримати осереднені рівняння руху.

Починаючи, таким чином, вивчення турбулентних рухів, ми маємо звернутись перш за все до операцій осереднення. Операція осереднення для турбулентних потоків має таку мету: вона має виявити закономірності



метеорологічних процесів, просторові і часові масштаби яких набагато більші за масштаби турбулентних вихорів. Нехай масштаб великомасштабних процесів  $\mathcal{L}$ , вихорів -  $\ell$ ; тоді  $\mathcal{L} \gg \ell$ . Осереднена величина  $\bar{f}$  має відбивати закономірності процесів масштабу  $\mathcal{L}$  (процесів, пов'язаних з проходженням циклонів, антициклонів й інших великомасштабних об'єктів);  $f' = f - \bar{f}$  має відбивати закономірності масштабу  $\ell$ .

Скоріше за все ми будемо осереднювати значення функції за певний відрізок часу  $T$ , який називається періодом осереднення. На останній накладаються такі обмеження:

1. Період осереднення має бути набагато більшим за характерний період турбулентних пульсацій, тобто період осереднення має бути достатньо тривалим для того, щоб за незмінних зовнішніх умов  $\bar{f}$  не залежало від  $T$ , тобто необхідно виконання умови  $T_{\Pi} \ll T$ , де  $T_{\Pi}$  – характерний період турбулентних пульсацій.
2. Період осереднення має бути набагато меншим за характерний період великомасштабних коливань для того, щоб під час осереднення  $T_{\text{ср}}$  не зникли суттєво важливі зміни осереднювальної величини  $\bar{f}$ , тобто, інакше кажучи, характерний час зміни поля осередненої величини  $\bar{f} - T_{\text{ср}}$  – має значно перевищувати  $T$  ( $T_{\text{ср}} \gg T$ ), що дозволяє вважати процес квазістаціонарним.

При скінченному періоді осереднення вираз для середніх за часом матиме вигляд:

$$\bar{f}(t) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} f(t + \tau) d\tau, \quad (4.2)$$

Якщо період осереднення  $T$  задовольняє умовам, які було сформульовано вище, то за допомогою (4.2) можна переконатися в справедливості наступних співвідношень:

1.  $\overline{f + \varphi} = \bar{f} + \bar{\varphi}$  – середнє від суми дорівнює сумі середніх;
2.  $\overline{af} = a\bar{f}$  – сталий множник має бути винесений з-під знаку осереднення;
3.  $\frac{\partial \bar{f}}{\partial s} = \bar{\frac{\partial f}{\partial s}}$ , де  $s$  – просторова координата, оскільки  $\frac{\partial f}{\partial s} \approx \frac{f_2 - f_1}{\Delta s}$  – лінійні операції.  $\frac{\partial \bar{f}}{\partial s} \neq \bar{\frac{\partial f}{\partial s}}$ , оскільки диференціювання і інтегрування не можна міняти місцями;
4.  $\overline{f\varphi} = \bar{f}\bar{\varphi}$  – середнє від добутку випадкової величини на середню є добуток середніх.

Ці співвідношення мають назву правил осереднення Рейнольдса.

Висновки з правил:

1.  $\overline{\overline{f}} = \overline{f}$  – це випливає з правила 4, якщо припустити, що  $\varphi = 1$ ;
2.  $\overline{\overline{f\varphi}} = \overline{f\varphi}$  – е випливає з обмеження, яке ми встановили для середньої величини;
3.  $\overline{f\varphi} = \overline{f}\overline{\varphi} + \overline{f'\varphi'}$ ;
4.  $\overline{f'} = 0$ ;
5.  $\overline{f'\overline{\varphi}} = 0$ .

Доведемо правило (1), інші можна доказати аналогічно. У відповідності з (4.2)

$$\begin{aligned}\overline{f + \varphi} &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} [f(t + \tau) + \varphi(t + \tau)] d\tau \\ &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} f(t + \tau) d\tau + \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} \varphi(t + \tau) d\tau = \overline{f} + \overline{\varphi}\end{aligned}$$

Доведемо висновок (3), (4) і (5), як найбільш важливі

$$\begin{aligned}\overline{f'} &= \overline{f - \overline{f}} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} [f(t + \tau) - \overline{f}(t + \tau)] d\tau = \\ &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} f(t + \tau) d\tau + \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} \overline{f}(t + \tau) d\tau = \overline{f} - \overline{f} = 0;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{f'\overline{\varphi}} &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} \overline{f}\varphi' d\tau = \overline{f} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} (\varphi - \overline{\varphi}) d\tau = \\ &= \overline{f} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} \varphi d\tau - \overline{f} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} \overline{\varphi} d\tau = \overline{f} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} \varphi d\tau - \overline{f} \overline{\varphi} = \overline{f}(\overline{\varphi} - \overline{\varphi}) = 0;\end{aligned}$$

$$\overline{f\varphi} = \overline{(\overline{f} + f')(\overline{\varphi} + \varphi')} = \overline{\overline{f}\overline{\varphi} + \overline{f}\varphi' + f'\overline{\varphi} + f'\varphi'} = \overline{f}\overline{\varphi} + \overline{f'\varphi'}.$$

Відмінність від нуля величини  $\overline{f'\varphi'}$  означає, що в атмосфері різні компоненти системи змінюються взаємопов'язано, так що в середньому знаки пульсацій зазвичай або одні й ті самі, або протилежні.

#### 4.2.2 Осереднені рівняння гідротермодинаміки для турбулентного середовища

Для турбулентного середовища, як і для будь-якого фізичного середовища, є справедливими фундаментальні закони збереження: закон збереження кількості руху, закон збереження маси, закон збереження енергії. Запишемо систему рівнянь, яка описує ці закони.

$$\begin{aligned}
 \frac{du}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - 2\omega_y w + 2\omega_z v + \frac{\nu}{3} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \\
 &\quad + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right); \\
 \frac{dv}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - 2u\omega_z + \frac{\nu}{3} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right); \\
 \frac{dw}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + 2u\omega_y - g + \frac{\nu}{3} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \\
 &\quad + \nu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \\
 \frac{d\rho}{dt} &= -\rho \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right); \\
 \frac{d\theta}{dt} &= C_p \frac{dT}{dt} - \frac{RT}{p} \frac{dp}{dt}.
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

Тут  $u, v, w$  – складові швидкості повітряного потоку,  $p$  – атмосферний тиск,  $\rho$  – густина повітря,  $T$  – абсолютна температура повітря.  $C_p$  – питома теплоємність при постійному тиску,  $R$  – питома газова стала,  $g$  – прискорення вільного падіння,  $\nu$  – кінематичний коефіцієнт в'язкості.

В систему (4.3) входять миттєві значення метеорологічних величин, тому використовується для опису ламінарних течій. Але ці рівняння можна застосувати і до опису турбулентних полів. Проте, навіть якщо нам поталанило б розв'язати цю систему, ми змогли б описати лише хаотичну поведінку окремих елементарних об'ємів повітря в турбулентному потоці, тобто ці розв'язки не відбивали б поведінки потоку в цілому, тому для дослідження турбулентних рухів рівняння мають бути осереднені. Розв'язок осереднених рівнянь дозволяє описати закономірності турбулентного потоку в цілому.

Для простоти будемо розглядати нестисливу рідину ( $\rho = const$ ). Тоді  $div \vec{V} = 0$  і члени  $\frac{v}{3} \frac{\partial}{\partial x} div \vec{V} = \frac{v}{3} \frac{\partial}{\partial y} div \vec{V} = \frac{v}{3} \frac{\partial}{\partial z} div \vec{V} = 0$ . Для лінійних членів в рівняннях досить замінити миттєві величини середніми. Члени, які враховують молекулярну в'язкість, лінійні, сила Кориоліса є лінійним членом, сила баричного градієнта при  $\rho = const$  також лінійна величина. Тому осереднення правої частини виконується дуже просто. Перепишемо рівняння руху за умови  $\rho = const$  і застосуємо операцію осереднення:

$$\begin{aligned}\frac{\overline{du}}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{p}}{\partial x} - 2\omega_y \overline{w} + 2\omega_z \overline{v} + \nu \nabla^2 \overline{u}; \\ \frac{\overline{dv}}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{p}}{\partial y} - 2\omega_z \overline{u} + \nu \nabla^2 \overline{v}; \\ \frac{\overline{dw}}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{p}}{\partial z} + 2\omega_y \overline{u} - \overline{g} + \nu \nabla^2 \overline{w};\end{aligned}\tag{4.4}$$

Оскільки ліві частини рівнянь мають однаковий вигляд, проведемо осереднення  $\frac{df}{dt}$ , де  $f$  – це будь-яка складова швидкості потоку ( $u, v, w$ ). Відзначимо, що при  $\rho = const$  повну похідну можна записати, як в адвективній  $(\frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} + v \frac{\partial f}{\partial y} + w \frac{\partial f}{\partial z})$ , так і дивергентній формі  $(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial fu}{\partial x} + \frac{\partial fv}{\partial y} + \frac{\partial fw}{\partial z})$ , тоді, застосовуючи висновок (3) з правил осереднення, отримаємо

$$\begin{aligned}&\overline{\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial fu}{\partial x} + \frac{\partial fv}{\partial y} + \frac{\partial fw}{\partial z}} + \\ &= \frac{\partial \overline{f}}{\partial t} + \frac{\partial \overline{fu}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{fv}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{fw}}{\partial z} + \frac{\partial \overline{f'u'}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{f'v'}}{\partial y} \\ &+ \frac{\partial \overline{f'w'}}{\partial z},\end{aligned}\tag{4.5}$$

Підставимо тепер ліві частини (4.4) у вигляді (4.5) і отримаємо рівняння руху для турбулентного середовища, які мають назву рівняння Рейнольдса:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial \overline{u}}{\partial t} + \frac{\partial \overline{uu}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{uv}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{uw}}{\partial z} + \frac{\partial \overline{u'u'}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial z} = \\ &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{p}}{\partial x} - 2\omega_y \overline{w} + 2\omega_z \overline{v} + \nu \nabla^2 \overline{u} \\ &\frac{\partial \overline{v}}{\partial t} + \frac{\partial \overline{vu}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{vv}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{vw}}{\partial z} + \frac{\partial \overline{v'u'}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v'v'}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{v'w'}}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{p}}{\partial y} - 2\omega_z \overline{u} + \nu \nabla^2 \overline{v} \\ &\frac{\partial \overline{w}}{\partial t} + \frac{\partial \overline{wu}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{wv}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{ww}}{\partial z} + \frac{\partial \overline{w'u'}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{w'v'}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{w'w'}}{\partial z} =\end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + 2\omega_y \bar{u} - \bar{g} + \nu \nabla^2 \bar{w}, \quad (4.6)$$

Отже, ми отримали рівняння руху для осереднених величин в дивергентній формі. В правій частині рівняння фігурують всі основні сили – сила баричного градієнта, сила Коріоліса, тяжіння і сила тертя. В лівій частині з'явилися нові члени:

$$\begin{aligned} R_u &= \frac{\partial \overline{u'u'}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial z}, \\ R_v &= \frac{\partial \overline{v'u'}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v'v'}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{v'w'}}{\partial z}, \\ R_w &= \frac{\partial \overline{w'u'}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{w'v'}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{w'w'}}{\partial z}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

В рівняннях, віднесених до одиничної маси, члени слід тлумачити як певну силу (всі члени мають розмірність прискорення). Пояснимо фізичний сенс додаткових членів. Уявімо, що ми зафіксували деякій об'єм повітря в два моменти часу  $t = t_0$  і  $t = t_1$ . Внаслідок турбулентного руху буде відбуватись обмін частинками між обраним об'ємом і навколишнім середовищем.

В результаті чого середня швидкість зміниться, оскільки частинки, які увійшли до об'єму матимуть іншу швидкість. Але зміна швидкості викликає зміну кількості руху, а у відповідності з другим законом Ньютона зміну кількості руху слід розглядати як результат дії певної сили. Ця сила і описується додатковими членами.

Введемо позначення:

$$\begin{aligned} \tau_{xx} &= -\rho \overline{u'u'}; \tau_{xy} = -\rho \overline{u'v'}; \tau_{xz} = -\rho \overline{u'w'}; \\ \tau_{yx} &= -\rho \overline{v'u'}; \tau_{yy} = -\rho \overline{v'v'}; \tau_{yz} = -\rho \overline{v'w'}; \\ \tau_{zx} &= -\rho \overline{w'u'}; \tau_{zy} = -\rho \overline{w'v'}; \tau_{zz} = -\rho \overline{w'w'}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Всі ці члени можуть бути представлені у вигляді матриці

$$\begin{vmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{vmatrix} \quad (4.9)$$

Це так званий тензор турбулентних напружень – напружень Рейнольдса. Ця матриця є симетричною відносно діагональних членів, тобто  $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ ,  $\tau_{xz} = \tau_{zx}$ ,  $\tau_{yz} = \tau_{zy}$ , тому тензор містить шість незалежних змінних, замість дев'яти. Будь-яка з величин  $\tau$  являє собою турбулентний потік кількості руху через одиничну площинку в одиницю часу. Таким

чином,  $\tau_{xx} = -\rho \overline{u'u'}$  описує перенесення кількості руху зональної компоненти в напрямку осі  $x$  зі швидкістю  $u'$ , тобто зональним компонентом. Зміна швидкості виділеного об'єму залежить не від турбулентних потоків кількості руху, а від їх рівнодіючої (від суми цих потоків через межі виділеного об'єму). Якщо об'єм в цілому втрачає кількість руху, то швидкість його зменшується, і це зменшення швидкості ми маємо розглядати як результат дії сили турбулентної в'язкості. Тому величини  $R_u, R_v, R_w$  являють собою сумарні потоки і є силами турбулентної в'язкості, які спроектовані на відповідні осі ( $x, y, z$ )

Знайдемо з рівностей (4.8) вирази

$$\begin{aligned} u'u' &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x}, & u'v' &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}, & u'w' &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}, \\ v'w' &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z}, & v'v' &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y}, & w'w' &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z}, \end{aligned} \quad (4.10)$$

Підставимо (4.10) в (4.6) і отримаємо рівняння руху в термінах напружень Рейнольдса. При цьому всі сили представимо в правих частинах рівнянь.

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}\bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}\bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{u}\bar{w}}{\partial z} = \\ &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} - 2\omega_y \bar{w} + 2\omega_z \bar{v} + \nu \nabla^2 \bar{u} + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{v}\bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}\bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}\bar{w}}{\partial z} &= \\ &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} - 2\omega_z \bar{u} + \nu \nabla^2 \bar{v} + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial \bar{w}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{w}\bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{w}\bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}\bar{w}}{\partial z} &= \\ = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + 2\omega_y \bar{u} - \bar{g} + \nu \nabla^2 \bar{w} + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right), & \end{aligned} \quad (4.11)$$

Запишемо тепер рівняння нерозривності для осередненого руху. Для нестисливої рідини це рівняння має вигляд:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

Тут всі члени лінійні, тому миттєві величини замінюємо на середні і отримуємо рівняння нерозривності для турбулентної атмосфери.

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = 0, \quad (4.12)$$

Отримаємо рівняння припливу тепла за допомогою правил осереднення Рейнольдса. Для цього представимо його в такому вигляді:

$$\frac{dT}{dt} - \frac{RT}{C_p p} \frac{dp}{dt} = \frac{\varepsilon_{\text{пр}}}{C_p \rho}, \quad (4.13)$$

Для осереднення більш зручно використовувати це рівняння в термінах потенціальної температури. Для цього рівняння для потенціальної температури  $\theta = T \left(\frac{p_0}{p}\right)^{R/C_p}$ , де  $p_0 = 1000$  гПа. Спочатку прологарифмуємо, а потім продиференціюємо по змінній  $t$ :  $\ln \theta = \ln T + \frac{R}{C_p} (\ln 1000 - \ln p)$  або  $\frac{1}{\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{T} \frac{dT}{dt} - \frac{R}{C_p p} \frac{dp}{dt}$ . Знайдемо з цього рівняння  $\frac{d\theta}{dt}$ , помноживши обидві частини рівності на  $T$  і враховуючи, що відношення  $\frac{T}{\theta}$  є близьким до одиниці:

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{dT}{dt} - \frac{RT}{C_p p} \frac{dp}{dt}, \quad (4.14)$$

Порівнюючи рівняння (4.14) з (4.13), бачимо, що

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\varepsilon_{\text{пр}}}{C_p \rho}, \quad (4.15)$$

Осереднимо ліву і праву частини рівняння (4.15).

$$\frac{d\bar{\theta}}{dt} = \frac{\bar{\varepsilon}_{\text{пр}}}{C_p \rho},$$

де  $\varepsilon_{\text{пр}}$  – це приплив або відтік тепла за одиницю часі за рахунок променистої енергії (сонячної радіації).

$$\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\theta} \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\theta} \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\theta} \bar{w}}{\partial z} = \frac{\bar{\varepsilon}_{\text{пр}}}{C_p \rho}.$$

Звідки

$$\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\theta} \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\theta} \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\theta} \bar{w}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{\theta}' u'}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\theta}' v'}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\theta}' w'}{\partial z} = \frac{\bar{\varepsilon}_{\text{пр}}}{C_p \rho}. \quad (4.16)$$

В рівнянні з'явилися додаткові члени, які характеризують перенесення тепла за рахунок турбулентності руху, тобто турбулентні потоки тепла.

Введемо позначення

$$\begin{aligned} Q_x &= C_p \rho \overline{\theta' u'}, \\ Q_y &= C_p \rho \overline{\theta' v'}, \\ Q_z &= C_p \rho \overline{\theta' w'}. \end{aligned} \quad (4.17)$$

$Q_x, Q_y, Q_z$  – це потоки тепла через одиничні площинки, перпендикулярні до відповідних осей, в одиницю часу. Розмірності  $[Q_x] = [Q_y] = [Q_z] = \text{Дж/м}^2\text{с} = \text{Вт/м}^2$ . Очевидно, що турбулентний потік тепла виникатиме лише у випадку, коли температура в атмосфері розподілена нерівномірно, тобто, якщо  $\frac{\partial \theta}{\partial x}, \frac{\partial \theta}{\partial y}, \frac{\partial \theta}{\partial z} \neq 0$ .

Знайдемо з останніх рівностей вираз для осереднених добутоків пульсаційних величин:

$$\begin{aligned} \overline{\theta' u'} &= \frac{Q_x}{C_p \rho}, \\ \overline{\theta' v'} &= \frac{Q_y}{C_p \rho}, \\ \overline{\theta' w'} &= \frac{Q_z}{C_p \rho}. \end{aligned}$$

і підставимо їх у рівняння (4.16):

$$\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\theta} \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\theta} \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\theta} \bar{w}}{\partial z} + \frac{1}{C_p \rho} \left( \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + \frac{\partial Q_z}{\partial z} \right) = \frac{\bar{\varepsilon}_{\text{пр}}}{C_p \rho}. \quad (4.18)$$

Приплив (відтік) тепла до (від) одиничного об'єму визначається не потоками в окремих напрямках, а результуючим потоком, який являє собою векторну величину

$$\vec{Q}_p = \vec{i}Q_x + \vec{j}Q_y + \vec{k}Q_z.$$

Із гідромеханіки відомо, що приплив будь-якої субстанції визначається дивергенцією результуючого потоку з оберненим знаком. В нашому випадку

$$\varepsilon_T = -\text{div} \vec{Q}_p = - \left( \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + \frac{\partial Q_z}{\partial z} \right).$$

де  $\varepsilon_T$  – турбулентний приплив тепла.



Видно, що вираз у дужках в рівнянні (4.18) представляє собою турбулентний приплив тепла ( $-\varepsilon_T$ ). З урахуванням цього рівняння припливу тепла для турбулентної атмосфери набуває вигляду:

$$\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\theta} \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\theta} \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\theta} \bar{w}}{\partial z} = \frac{1}{C_p \rho} (\bar{\varepsilon}_{\text{пр}} + \bar{\varepsilon}_T). \quad (4.19)$$

Таким чином, ми бачимо, що в результаті осереднення в рівнянні припливу тепла з'явився новий вид припливу тепла – турбулентний, як в рівняннях руху з'явилася сила турбулентної в'язкості.

Для розв'язання задач з урахуванням процесів конденсації, окрім вказаних рівнянь, необхідно використовувати рівняння припливу вологи. Представимо його для миттєвих величин в такому вигляді:

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\varepsilon_q}{\rho}, \quad (4.20)$$

де  $q$  – масова частка водяної пари ( $[q] = \text{кг/кг}$ ),  $\rho$  – густина повітря ( $[\rho] = \text{кг/м}^3$ ) і  $\varepsilon_q$  – приплив водяної пари за рахунок молекулярного вологообміну, тобто за рахунок молекулярної дифузії.

Звернемо увагу, що в рівняннях для миттєвих величин присутні лише ті члени, які описують молекулярний обмін різними субстанціями. Для урахування турбулентного обміну над рівнянням (4.20) слід здійснити операцію осереднення:

$$\overline{\frac{dq}{dt}} = \frac{\bar{\varepsilon}_q}{\rho},$$

або

$$\overline{\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial q u}{\partial x} + \frac{\partial q v}{\partial y} + \frac{\partial q w}{\partial z}} = \frac{\bar{\varepsilon}_q}{\rho}.$$

Використавши правила осереднення і висновки з них, отримаємо:

$$\frac{\partial \bar{q}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{q} \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{q} \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{q} \bar{w}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{q}' u'}{\partial x} + \frac{\partial \bar{q}' v'}{\partial y} + \frac{\partial \bar{q}' w'}{\partial z} = \frac{\bar{\varepsilon}_q}{\rho}. \quad (4.21)$$

Бачимо, що як і під час осереднення нелінійних членів в інших рівняннях, тут з'явилися додаткові члени. Для їх інтерпретації введемо позначення:

$$\begin{aligned}(P_q)_x &= \rho \overline{q'u'}, \\ (P_q)_y &= \rho \overline{q'v'}, \\ (P_q)_z &= \rho \overline{q'w'}.\end{aligned}\tag{4.22}$$

Знайдемо розмірність величини  $P_q$

$$[P_q] = \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \frac{\text{кг}}{\text{кг}} \frac{\text{м}}{\text{с}} = \frac{\text{кг}}{\text{м}^2 \text{с}}.$$

Розмірність показує, що додаткові члени описують потоки водяної пари, які переносяться турбулентними вихорами через одиничні площинки, перпендикулярними до відповідних осей, за одиницю часу.

Зміна маси водяної пари в об'ємі повітря визначається результируючим потоком

$$\vec{P}_p = \vec{i}(P_q)_x + \vec{j}(P_q)_y + \vec{k}(P_q)_z.\tag{4.23}$$

Знайдемо з (4.23) осереднені добутки пульсацій:

$$\begin{aligned}\overline{q'u'} &= \frac{(P_q)_x}{\rho}, \\ \overline{q'v'} &= \frac{(P_q)_y}{\rho}, \\ \overline{q'w'} &= \frac{(P_q)_z}{\rho}.\end{aligned}$$

Підставимо ці вирази в (4.21) і отримаємо

$$\frac{\partial \bar{q}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{q}\bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{q}\bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{q}\bar{w}}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial (P_q)_x}{\partial x} + \frac{\partial (P_q)_y}{\partial y} + \frac{\partial (P_q)_z}{\partial z} \right) = \frac{\bar{\varepsilon}_q}{\rho}.\tag{4.24}$$

В дужках в правій частині рівняння (4.24) сума похідних являє собою  $-\text{div} \vec{P}_q$ , яка описує приплив водяної пари до одиничного об'єму за одиницю часу за рахунок перенесення водяної пари турбулентними вихорами (або за рахунок турбулентного вологообміну).

$$(\bar{\varepsilon}_q)_{\text{турб}} = -\text{div} \vec{P}_q.\tag{4.25}$$

Підставимо (4.25) в (4.24) і перенесемо додаткові члени в праву частину:

$$\frac{\partial \bar{q}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{q}\bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{q}\bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{q}\bar{w}}{\partial z} = \frac{1}{\rho} (\bar{\varepsilon}_q + \bar{\varepsilon}_{q_{\text{турб}}}). \quad (4.26)$$

Таким чином, ми ще раз показали, що члени, які описують турбулентні припливи кількості руху, тепла і вологи з'являються тільки в осереднених рівняннях руху, тобто в рівняннях для турбулентної атмосфери.

Слід відзначити, що турбулентні припливи різних субстанцій на декілька порядків більші за припливи, обумовлені молекулярною дифузією, тому при постановці багатьох задач для граничного шару атмосфери останніми можна знехтувати.

Випишемо систему рівнянь для турбулентної атмосфери, залишаючи в лівих частинах повні похідні від осереднених величин, тобто

$$\frac{d\bar{f}}{dt} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{f}\bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{f}\bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{f}\bar{w}}{\partial z},$$

де  $\bar{f}$  – це  $\bar{u}$ ,  $\bar{v}$ ,  $\bar{w}$  в рівняннях руху,  $\bar{\theta}$  – в рівнянні припливу тепла,  $\bar{q}$  – в рівнянні перенесення водяної пари.

Отже, запишемо систему рівнянь для осереднених величин, які містять три рівняння руху і рівняння нерозривності, перенесення тепла і вологи.

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{u}}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} - 2\omega_y \bar{w} + 2\omega_z \bar{v} + \nu \nabla^2 \bar{u} - \left( \frac{\partial \overline{u'u'}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial z} \right), \\ \frac{d\bar{v}}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} - 2\omega_z \bar{u} + \nu \nabla^2 \bar{v} - \left( \frac{\partial \overline{v'u'}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v'v'}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{v'w'}}{\partial z} \right), \\ \frac{d\bar{w}}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + 2\omega_y \bar{u} - \bar{g} + \nu \nabla^2 \bar{w} - \left( \frac{\partial \overline{w'u'}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{w'v'}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{w'w'}}{\partial z} \right), \\ \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} &= 0, \\ \frac{d\bar{\theta}}{dt} &= \frac{\bar{\varepsilon}_{\text{пр}}}{C_p \rho} - \left( \frac{\partial \overline{\theta'u'}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{\theta'v'}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{\theta'w'}}{\partial z} \right), \\ \frac{d\bar{q}}{dt} &= \frac{\bar{\varepsilon}_q}{\rho} - \left( \frac{\partial \overline{q'u'}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{q'v'}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{q'w'}}{\partial z} \right). \end{aligned} \quad (4.27)$$

Як вже згадувалось вище, перші три рівняння системи (4.27) мають назву рівнянь руху в формі Рейнольдса. Система складається з шести рівнянь і містить 8 невідомих –  $\bar{u}$ ,  $\bar{v}$ ,  $\bar{w}$ ,  $\bar{\theta}$ ,  $\bar{q}$ ,  $\bar{\varepsilon}_{\text{пр}}$ ,  $\bar{\varepsilon}_q$  і 12 додаткових членів, які виражені через осереднені добутки пульсаційних величин (6 – в

рівняннях руху,  $3$  – в рівняннях припливу тепла і  $3$  – в рівняннях припливу вологи). Навіть при заданих зовнішніх умовах (сила баричного градієнта і сила Коріоліса) і відомих величинах  $\bar{\epsilon}_{пр}$  і  $\bar{\epsilon}_q$  система лишається незамкненою (кількість невідомих більша за кількість рівнянь). Таким чином, виникає проблема доповнення цієї системи деякими новими співвідношеннями, які зв'язують невідомі члени рівняння з відомими або визначеними при розв'язанні задачі величинами. Ця проблема має назву – проблема замкнення.

#### 4.3 Замкнення системи рівнянь гідротермодинаміки для турбулентного середовища

Розглянемо питання про замкнення на прикладі рівнянь руху. Як вже відзначалося, система рівнянь руху для турбулентної атмосфери є незамкненою на відміну від рівнянь руху в формі Нав'є-Стокса. Остання є замкненою при заданих зовнішніх умовах, тобто містить три рівняння і таку саму кількість невідомих величин ( $u, v, w$ ).

Отже, система рівнянь руху в формі Рейнольдса містить 9 невідомих: три складові вектору швидкості  $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$  і шість турбулентних напружень  $\tau$  за умови, що зовнішні сили (сила баричного градієнта і сила Коріоліса) є заданими

При пошуках додаткових співвідношень, які пов'язують пульсаційні швидкості, в теорії турбулентності існує два напрямки – напівемпірична і статистична теорія турбулентності.

Основні положення напівемпіричної теорії турбулентності було отримано Прандтлем шляхом проведення аналогії між молекулярним і турбулентним обмінами. Незважаючи на простоту напівемпірична теорія призводить до досить прийнятних результатів. Зробимо спробу на основі цієї теорії зв'язати пульсації з відповідними осередненими величинами.

Отже, будемо виходити з наступної простої моделі.

1. Розглядатимемо турбулентний потік з нерівномірно розподіленими властивостями. Через фіксовану точку в просторі, в якій спостерігається турбулентний потік, неперервно проходять дискретні об'єми повітря – вихори, які виділилися з основного потоку. Неперервна зміна вихорів викликає пульсації відповідних величин в точці, що розглядається;

2. Характеристики вихору (швидкість, температура, вологість тощо) в місці виникнення дорівнюють середнім значенням відповідних величин в навколишньому середовищі.

3. Рух вихорів протягом деякої відстані  $l'$ , якій має назву шлях змішування, відбувається квазістатично ( $p = \bar{p}$ ) і без змішування з навколишнім середовищем. Наприкінці шляху вихори раптово і повністю перемішуються, викликаючи зміни характеристик турбулентного потоку.

Результатом такого руху є потік різних субстанцій з областей з великою їх концентрацією до областей, де їх концентрація нижча. Отже, турбулентність приводить до вирівнювання нерівномірно розподілених властивостей, і, таким чином, турбулентний обмін є важливим механізмом формування полів метеорологічних величин.

Для простоти міркувань розглянемо шар, в якому швидкість змінюється лише у вертикальному напрямку. Нехай на рівні  $z_1$  вихор виникає, а на рівні  $z_2$  – щезає, тобто віддає свою кількість руху навколишньому середовищу. Нехай шлях, який пройшов цей вихор від моменту виникнення до моменту зникнення дорівнює  $\ell'$ . Оскільки, відповідно до умови (3), вихор зберігає свою швидкість  $\bar{u}(z_1)$ , то на рівні  $z_2$  виникає пульсація швидкості.

$$\bar{u}(z_1) - \bar{u}(z_2) = u'(z) \approx -\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \ell'.$$

Підставимо цей вираз в рівняння для  $\tau_{xz}$

$$\tau_{xz} = -\overline{\rho u' w'} = \rho \overline{\ell' w'} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = \rho k_{xz} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z}, \quad (4.28)$$

У виразі (4.28) коефіцієнт  $\overline{\ell' w'}$  при  $\frac{\partial \bar{u}}{\partial z}$  є аналогічним коефіцієнту молекулярної в'язкості. Тому  $\overline{\ell' w'}$  називають коефіцієнтом турбулентного обміну і позначають через  $k_{xz}$ , оскільки він характеризує турбулентний обмін зональною складовою кількості руху у вертикальній площині.

Аналогічні міркування можна привести для випадку, коли швидкість осередненого руху змінюється в горизонтальній площині; тоді вираз для  $\tau_{xx}$  і  $\tau_{xy}$  можна представити у вигляді:

$$\tau_{xx} = -\overline{\rho u' u'} = \rho \overline{\ell' u'} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = \rho k_{xx} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}, \quad (4.29)$$

$$\tau_{xz} = -\overline{\rho u' v'} = \rho \overline{\ell' v'} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \rho k_{xy} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}. \quad (4.30)$$

Через коефіцієнти турбулентності і градієнти осередненої швидкості виражаються інші турбулентні напруження. Отже, к-теорія дозволяє виразити невідомі члени через градієнти осереднених величин, які можна обчислити за даними спостережень. Оскільки в граничному шарі атмосфери градієнти практично всіх метеовеличин значно менші вертикальних і мають однаковий порядок уздовж осей  $x$  і  $y$ , замість коефіцієнтів  $k_{xx}$ ,  $k_{xy}$ ,  $k_{yx}$ ,  $k_{yy}$ ,  $k_{zx}$ ,  $k_{zy}$  можна ввести один коефіцієнт горизонтального турбулентного

обміну  $k_S$ . Вважатимемо, що в горизонтальній площині коефіцієнт турбулентності є однаковим, позначивши його через  $k_S$ . Тоді у співвідношеннях (4.29), (4.30) замість  $k_{xx}$  і  $k_{xy}$  ми маємо записати величину  $k_S$ . Для вертикального обміну будемо вважати, що коефіцієнт турбулентності для перенесення зональної і меридіональної складових є однаковими, тобто  $k_{xz} = k_{yz} = k_{zz} = k_Z$ .

Тоді члени, які описують турбулентну в'язкість можна записати у вигляді:

$$\begin{aligned} R_u &= -\frac{\partial}{\partial x} \left( k_S \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( k_S \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( k_Z \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right), \\ R_u &= -\frac{\partial}{\partial x} \left( k_S \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( k_S \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( k_Z \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \right), \\ R_u &= -\frac{\partial}{\partial x} \left( k_S \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( k_S \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( k_Z \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \right). \end{aligned} \quad (4.31)$$

З урахуванням виразів (4.31) і з урахуванням того, що молекулярна в'язкість є маленькою порівняно з турбулентною, запишемо рівняння Рейнольдса:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}\bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}\bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{u}\bar{w}}{\partial z} = \\ & = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} - 2\omega_y \bar{w} + 2\omega_z \bar{v} + \nu \nabla^2 \bar{u} + \frac{\partial}{\partial x} \left( k_S \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k_S \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k_Z \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right), \\ & \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{v}\bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}\bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}\bar{w}}{\partial z} = \\ & = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} - 2\omega_z \bar{u} + \nu \nabla^2 \bar{v} + \frac{\partial}{\partial x} \left( k_S \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k_S \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right) + \\ & \quad + \frac{\partial}{\partial z} \left( k_Z \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \right), \\ & \frac{\partial \bar{w}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{w}\bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{w}\bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}\bar{w}}{\partial z} = \\ & = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + 2\omega_y \bar{u} - \bar{g} + \nu \nabla^2 \bar{w} + \frac{\partial}{\partial x} \left( k_S \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k_S \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k_Z \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \right). \end{aligned} \quad (4.32)$$

В рівняннях (4.32), поряд з невідомими функціями  $\bar{u}$ ,  $\bar{v}$ ,  $\bar{w}$ , які мають бути визначені, з'являються ще різні коефіцієнти турбулентності (нові невідомі), тобто система рівнянь (4.32) як і раніше лишається незамкненою.

Слід мати на увазі, що коефіцієнт турбулентності нічого не має спільного з коефіцієнтом молекулярної в'язкості  $\nu$ . Коефіцієнт турбулентності від них зовсім не є залежним. Він визначається характером

поток (залежить від величини пульсацій і від розмірів турбулентних вихорів), тому не може бути заданий при розрахунках параметрів турбулентності потоку, і має знаходитись з загальної системи рівнянь поряд з такими характеристиками, як швидкість, температура тощо.

Як і у випадку напружень Рейнольдса припустимо, що турбулентні потоки тепла пропорційні першим похідним від осередненої потенціальної температури, тобто градієнтам  $\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z}$ . Коефіцієнти турбулентності в цьому випадку матимуть назву коефіцієнтів турбулентності для потоків тепла.

Як і раніше вважатимемо, що  $k_{TS}$  – горизонтальний коефіцієнт турбулентності, а  $k_{TZ}$  – вертикальний. Вони істотно відрізняються один від одного. Турбулентні потоки тепла з використанням к-теорії запишуться в наступному вигляді:

$$\begin{aligned} Q_x &= -C_p \rho k_{TS} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x}, \\ Q_y &= -C_p \rho k_{TS} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial y}, \\ Q_z &= -C_p \rho k_{TZ} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z}. \end{aligned} \quad (4.33)$$

З урахуванням (4.33) рівняння припливу тепла перепишемо у вигляді:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\theta} \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\theta} \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\theta} \bar{w}}{\partial z} = \\ &= \frac{1}{C_p \rho} \frac{d \bar{Q}}{dt} + \frac{\partial}{\partial x} \left( k_{TS} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k_{TS} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k_{TZ} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} \right), \end{aligned} \quad (4.34)$$

де  $\frac{d \bar{Q}}{dt} = \frac{\bar{\epsilon}_{np}}{\rho}$ .

В рівнянні припливу вологи (4.21) осереднені добутки  $\overline{q'u'}$ ,  $\overline{q'v'}$ ,  $\overline{q'w'}$  в рамках к-теорії виражаються через відповідні градієнти масової частки водяної пари, тобто

$$\begin{aligned} \overline{\rho q'u'} &= -\rho k_{qs} \frac{\partial \bar{q}}{\partial x}, \\ \overline{\rho q'v'} &= -\rho k_{qs} \frac{\partial \bar{q}}{\partial y}, \\ \overline{\rho q'w'} &= -\rho k_{qz} \frac{\partial \bar{q}}{\partial z}. \end{aligned} \quad (4.35)$$

Тут, як і у випадку з рівняннями руху і припливу тепла вводяться горизонтальний і вертикальний коефіцієнти турбулентного обміну для водяної пари.

З урахуванням (4.35) рівняння припливу тепла або перенесення вологи набуває вигляду:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \bar{q}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{q}\bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{q}\bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{q}\bar{w}}{\partial z} = \\ & = \frac{d\bar{Q}_q}{dt} + \frac{\partial}{\partial x} k_{qs} \frac{\partial \bar{q}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} k_{qs} \frac{\partial \bar{q}}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} k_{qz} \frac{\partial \bar{q}}{\partial z}, \end{aligned} \quad (4.36)$$

де  $\frac{d\bar{Q}_q}{dt} = \frac{\bar{\epsilon}_q}{\rho}$ .

Запишемо ще рівняння стану для осередненого руху. Це рівняння має вигляд

$$\bar{p} = \rho R \bar{T}, \text{ для нестисливої рідини, тобто для випадку } \rho = \text{const}. \quad (4.37)$$

Отримана система рівнянь для турбулентної атмосфери є незамкненою, при розв'язанні багатьох задач динамічної метеорології, як вже було загадано вище, для замкнення використовуються додаткові співвідношення, які отримуються на основі напівемпіричної теорії турбулентності, або статистичної. Одним з додаткових є рівняння балансу кінетичної енергії.

#### 4.4 Рівняння балансу кінетичної енергії турбулентних вихорів

Кінетична енергія турбулентності є однією з найважливіших змінних в мікрометеорології, оскільки є мірою інтенсивності турбулентності. Вона прямо пов'язана з перенесенням кількості руху, тепла і водяної пари в граничному шарі.

Індивідуальні члени рівняння кінетичної енергії турбулентності описують фізичні процеси, які генерують турбулентність. Відносний баланс цих процесів визначає здатність потоку підтримувати турбулентність або ставати турбулентним, і, таким чином, вказує на стійкість потоку.

Звичайне визначення кінетичної енергії  $KE = \frac{1}{2} mV^2$ , де  $m$  – це маса. Коли ми маємо справу з рідиною такою як повітря, то зручніше відносити кінетичну енергію до одиниці маси, тобто  $\frac{1}{2} V^2$ .

Можна поділити, як і у випадку інших змінних, кінетичну енергію на кінетичну енергію, пов'язану з осередненим рухом, і кінетичну енергію, пов'язану з турбулентним рухом. Користуючись представленням миттєвої величини, запропонованим Рейнольдсом, можна записати:



$$MKE/m = \frac{1}{2}(\bar{u}^2 + \bar{v}^2 + \bar{w}^2)$$

$$b = \frac{1}{2}(u'^2 + v'^2 + w'^2)$$

де  $b$  представляє миттєву кінетичну енергію турбулентності на одиницю маси. Після осереднення миттєвих значень, можна визначити середню кінетичну енергію турбулентності як

$$\bar{b} = \frac{1}{2}(\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2}), \quad (4.38)$$

Розглянемо рівняння балансу кінетичної енергії в спрощеному вигляді, припускаючи, що осереднені значення потоків турбулентної енергії і її джерел залежать тільки від висоти  $z$ , тобто є функціями лише координати  $z$ , і що впливом пульсацій тиску можна знехтувати через їх малість, тоді на основі напівемпіричної теорії турбулентності рівняння балансу матиме вигляд:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \bar{b}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{b}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{b}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{b}}{\partial z} = \\ & = \frac{\partial}{\partial z} \left( k_b \frac{\partial b}{\partial z} \right) - \frac{g}{\theta} k_T \frac{\partial \theta}{\partial z} + k_z \left[ \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \right)^2 \right] - \varepsilon_T, \end{aligned} \quad (4.39)$$

або

$$\frac{D\bar{b}}{Dt} = \frac{\partial}{\partial z} \left( k_b \frac{\partial b}{\partial z} \right) - \frac{g}{\theta} k_T \frac{\partial \theta}{\partial z} + k_z \left[ \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \right)^2 \right] - \varepsilon_T. \quad (4.40)$$

де  $\bar{b}$  – осереднена кінетична енергія турбулентності,  $k_z$  – коефіцієнт турбулентності для вертикального обміну кількістю руху,  $k_b$ ,  $k_T$  – коефіцієнти вертикального обміну відповідно кінетичною енергією турбулентності і теплом.

Відзначимо, що коефіцієнти  $k_b$  і  $k_T$  можуть бути виражені через  $k_z$  за допомогою деяких множників  $\alpha_T$  і  $\alpha_b$  отриманих експериментальним шляхом:

$$k_b = \alpha_b k_z, \quad k_T = \alpha_T k_z.$$

В цьому випадку замість трьох невідомих  $k_z$ ,  $k_b$  і  $k_T$  маємо одну невідому  $k_z$ .

$\frac{Db}{Dt}$  – приплив (відтік) кінетичної енергії турбулентності до (від) одиничної маси повітря за одиницю часу.

Розглядатимемо тільки процеси з додатною турбулентною в'язкістю, тобто  $k > 0$ , тоді в рівнянні (4.40) перший член правої частини завжди додатна величина. Тобто розглядатимемо процеси, в яких передача енергії переходить від середнього руху до турбулентних вихорів. Саме ці процеси є головними в динаміці нижнього граничного шару.

Розглянемо другий член правої частини рівняння (4.40). При нестійкій стратифікації  $\frac{\partial\theta}{\partial z} = \frac{\theta}{T}(\gamma_a - \gamma) \approx (\gamma_a - \gamma) < 0$  напрямком руху вихорів співпадає з напрямком сил плавучості, і це призводить до збільшення кінетичної енергії турбулентності  $\frac{Db}{Dt} > 0$ . При стійкій стратифікації  $\frac{\partial\theta}{\partial z} < 0$ ,  $\frac{Db}{Dt} < 0$ , тобто кінетична енергія турбулентності зменшуватиметься.

При байдужій стратифікації  $\frac{\partial\theta}{\partial z} = 0$ , і робота сил плавучості дорівнюватиме нулю. Таким чином, другий член є знакозмінним.

Третій член правої частини рівняння (4.38) є дифузійним, оскільки процес переміщення турбулентних вихорів називається дифузією. Якщо в двох суміжних шарах кінетична енергія турбулентності буде різною, то за рахунок дифузії вихорів відбуватиметься зміна кінетичної енергії, середньої для всіх турбулентних вихорів, які містяться в об'ємі, який розглядається.

Четвертий член правої частини рівняння (4.40) є дисипативним. Він описує перехід кінетичної енергії турбулентності вихорів в теплову, тобто  $\varepsilon_T$  завжди більше за нуль, тобто за рахунок  $\varepsilon_T$  кінетична енергія вихорів завжди зменшується. Можна вивести, що за рахунок першого члена кінетична енергія турбулентності зростає, а за рахунок другого і третього – можливе і те, і інше.

Нехай в рівнянні (4.40) дисипативний і дифузійний члени досить малі, тоді рівняння можна переписати у вигляді:

$$\frac{D\bar{b}}{Dt} = k_z \left[ \left( \frac{\partial\bar{u}}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial\bar{v}}{\partial z} \right)^2 \right] \left[ 1 - \alpha_T \frac{\frac{g}{\theta} k_T \frac{\partial\theta}{\partial z}}{\left( \frac{\partial\bar{u}}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial\bar{v}}{\partial z} \right)^2} \right]. \quad (4.41)$$

Величина  $\frac{g}{\theta} k_T \frac{\partial\theta}{\partial z} / \left( \left( \frac{\partial\bar{u}}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial\bar{v}}{\partial z} \right)^2 \right)$  має назву градієнтного числа Річардсона або просто числа Річардсона і позначається як  $Ri$ .

Теоретичні і лабораторні дослідження показали, що ламінарна течія втрачає стійкість, коли число Річардсона є меншим за його критичне значення,  $R_c$ . Інше значення,  $R_T$ , вказує на припинення турбулентності. Критерії динамічної стійкості можуть бути визначені як:

Ламінарний потік стає турбулентним, коли  $Ri < R_c$ .

Турбулентний потік стає ламінарним  $Ri < R_T$

Хоча все ще точаться дискусії щодо точних значень  $R_c$  і  $R_T$ , було показано, що наближення  $R_c = 0.21 \dots 0.25$  і  $R_T = 1.0$  працюють дуже добре. Таким чином, тут з'являється гістерезисний ефект, оскільки  $R_T < R_c$ .

Враховуючи, що

$$Ri = \frac{\frac{g}{\theta} k_T \frac{\partial \theta}{\partial z}}{\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial z}\right)^2}, \quad (4.42)$$

можна записати:

$$\frac{D\bar{b}}{Dt} = k_z \left[ \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial z}\right)^2 \right] (1 - \alpha_T Ri). \quad (4.43)$$

Згідно з рівнянням (4.43) знак змін з часом кінетичної енергії турбулентності залежить від значення числа Річардсона:

- якщо  $(1 - \alpha_T Ri) < 0$ , тобто  $Ri > \frac{1}{\alpha_T}$ , то  $\frac{D\bar{b}}{Dt} < 0$ ,
  - якщо  $(1 - \alpha_T Ri) > 0$ , тобто  $Ri < \frac{1}{\alpha_T}$ , то  $\frac{D\bar{b}}{Dt} > 0$ ,
  - якщо  $(1 - \alpha_T Ri) = 0$ , тобто  $Ri = \frac{1}{\alpha_T}$ , то  $\frac{D\bar{b}}{Dt} = 0$ .
- (4.44)

Число Річардсона визначає роль термічної конвекції в зародженні турбулентної енергії порівняно з динамічними факторами, які обумовлюють передачу енергії турбулентності від осередненого руху. Величина представляє собою співвідношення сили плавучості до сил інерції.

Вплив сили плавучості на турбулентний режим залежить від вертикального градієнта температури. При стійкій стратифікації сили плавучості протидіють розвитку турбулентності, оскільки частина турбулентної енергії витрачається на подолання сил плавучості. При нестійкій стратифікації (термічна стратифікація в цьому випадку сприяє розвитку конвекції) сили плавучості сприяють виникненню і розвитку турбулентності.

При значеннях  $\frac{\partial \theta}{\partial z}$ , близьких до нуля, сила плавучості не впливає на турбулентний режим.

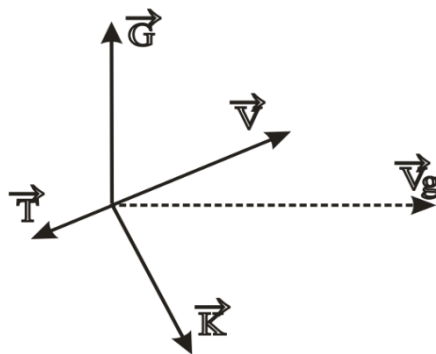
В загальному випадку турбулентність в термічно неоднорідному середовищі може розвиватися тоді, коли число  $Ri$  менше за деяке критичне значення, яке, як впливає з (4.42), має бути меншим за  $\frac{1}{\alpha_T}$ .

## 4.5 Граничний шар атмосфери

Граничним шаром атмосфери (ГША) називають шар атмосфери від підстильної поверхні до рівня приблизно 1-2 км, динаміка якого визначається сумісною дією сил баричного градієнта, Коріоліса і тертя. Остання сила виникає в атмосфері біля поверхні землі при русі повітря відносно підстильної поверхні. Схематично взаємодію цих основних сил, що визначають динаміку вільного граничного шару, можна представити графічно так (рис. 4.1).

Відзначимо, що основні складності при дослідженні структури ГША полягають у визначенні характеристик турбулентності, які пов'язані з профілями метеорологічних величин складними нелінійними залежностями. Разом з цим відомо, що груба апроксимація профілю коефіцієнта турбулентного обміну  $k$  (або навіть задання його сталою величиною в межах ГША) дозволяє побудувати гідродинамічні моделі, які добре відтворюють дані спостережень. Так, наприклад, моделі з апіорним заданням  $k$  якісно правильно описують відомий з досвіду факт – зростання вектору вітру з висотою в ГША і його поворот: праворуч – в північній півкулі, ліворуч – в південній півкулі.

У планетарному граничному шарі динамічний і термічний режими є взаємозалежними і взаємообумовленими. Так, вертикальні профілі вітру, що встановилися, з одного боку, визначають інтенсивність турбулентного перемішування і відповідно вертикальні потоки тепла, і тим самим встановлюють вертикальний розподіл температури в ПГШ, а з іншого боку, вертикальні профілі температури, що встановилися, визначають термічну стратифікацію в ПГШ і тим самим (через дію сили плавучості) визначають інтенсивність турбулентного перемішування, а отже, і вертикальний розподіл вітру.



$\vec{V}$  – вектор фактичного вітру в ПГШ;  $\vec{V}_g$  – вектор геострофічного вітру при даному значенні сили баричного градієнта  $\vec{G}$ ;  $\vec{K}$  – сила Коріоліса.

Рисунок 4.1 – Взаємодія основних сил, що визначають динаміку граничного шару атмосфери

Однією з найбільш важливих задач динаміки ГША є дослідження розподілу вітру з висотою. Знаючи закономірності формування профіля вітру, можна зв'язати між собою характеристики руху на різних рівнях. Тому теорії розподілу вітру з висотою в ГША присвячено багато робіт.

Розглянемо досить просту модель (з апріорним заданням  $k$ ), яка приводить до чітких і зрозумілих фізичних висновків, які допомагають викрити характер основних рухів в ГША.

Для побудови моделі скористаємось рівняннями горизонтального руху для турбулентної атмосфери (знак осереднення не записуватимемо):

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - 2\omega_y w + 2\omega_z v + \nu \nabla^2 u + \frac{\partial}{\partial x} k_s \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} k_s \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} k_z \frac{\partial u}{\partial z}, \\ \frac{dv}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - 2\omega_z u + \nu \nabla^2 v + \frac{\partial}{\partial x} k_s \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} k_s \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} k_z \frac{\partial v}{\partial z}.\end{aligned}\quad (4.45)$$

В моделі, що розглядається, взято такі спрощуючі припущення:

- рух є стаціонарним (швидкість не змінюється з часом, тобто  $\frac{du}{dt} = \frac{dv}{dt} = 0$ ), плоскопаралельним (вертикальна складова швидкості  $w = 0$ ), горизонтально однорідним (похідні  $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0$ ,  $u$  і  $v$  залежать тільки від  $z$ );
- стисливість повітря в межах ГША неістотна, тому  $\rho = const$ ;
- коефіцієнт турбулентності апріорі заданий і є сталою величиною ( $k = const$ ).

З урахуванням перерахованих обмежень рівняння (4.45) набуває вигляду:

$$\begin{aligned}0 &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + 2\omega_z v + k_z \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \\ 0 &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - 2\omega_z u + k_z \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}.\end{aligned}\quad (4.46)$$

З урахуванням геострофічних співвідношень

$$u_g = -\frac{1}{2\omega_z \rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \quad v_g = \frac{1}{2\omega_z \rho} \frac{\partial p}{\partial x}.\quad (4.47)$$

рівняння (4.45) набуває вигляду:

$$k_z \frac{d^2 u}{dz^2} + 2\omega_z v = 2\omega_z v_g,$$

$$k_z \frac{d^2 v}{dz^2} - 2\omega_z u = -2\omega_z u_g. \quad (4.48)$$

Перепишемо їх у вигляді:

$$\begin{aligned} k \frac{d^2 u}{dz^2} + 2\omega_z (v - v_g) &= 0, \\ k \frac{d^2 v}{dz^2} - 2\omega_z (u - u_g) &= 0, \end{aligned} \quad (4.49)$$

де  $k = k_z$ .

Скористаємося наступними крайовими умовами:

$$\text{при } z = 0 \quad u = v = 0, \quad (4.50)$$

$$\text{при } z \rightarrow H \quad u \rightarrow u_g, v \rightarrow v_g. \text{ де } H \text{ – це верхня межа граничного шару.} \quad (4.51)$$

Крайову умову (4.50) слід було б сформулювати іншим чином. Оскільки підстильна поверхня граничного шару атмосфери не є гладкою, то з наближенням до земної поверхні вітер дуже послаблюється під впливом сили тертя і внаслідок існуючих нерівностей середня швидкість обертається на нуль не на самій підстильній поверхні, а трохи вище неї, на деякому рівні  $z_0$ , нижче якого мають місце тільки турбулентні пульсації. Ця величина  $z_0$  має назву параметра шорсткості. Тому ми мали б в умові (4.50) записати  $z = z_0$ , а не  $z = 0$ . Проте проста модель, яка розглядається, заздалегідь спотворює профіль вітру поблизу поверхні землі, тому введення додаткового параметру  $z_0$  не має сенсу.

Помножимо друге рівняння системи (4.47) на  $i$  ( $i = \sqrt{-1}$ ) і додамо до першого. Тоді отримаємо

$$\frac{d^2 \Phi}{dz^2} - 2a^2 i \Phi = 0. \quad (4.52)$$

де

$$\Phi = u + iv - u_g - iv_g, \quad a = \sqrt{\omega_z/k}.$$

Розв'язання рівняння (4.50) має вигляд

$$\Phi = C_1 e^{a(1+i)z} + C_2 e^{-a(1+i)z}. \quad (4.53)$$

Для визначення  $C_1$  і  $C_2$  переписемо для  $\Phi$  крайові умови (4.50) і (4.51):

$$\begin{aligned} \text{при } z = 0 \quad \Phi &= -u_g - iv_g, \\ \text{при } z \rightarrow H \quad \Phi &= 0. \end{aligned} \quad (4.54)$$

Підставляючи (4.52) в (4.51), отримаємо  $C_1 = 0$ ,  $C_2 = -u_g - iv_g$ . В такому випадку

$$u + iv = (u_g + iv_g)(1 - e^{-(1+i)az}), \quad (4.55)$$

Якщо виразити  $e^{-iaz}$  в тригонометричній формі і розділити в (4.55) дійсні і уявні частини, то

$$\begin{aligned} u &= u_g - e^{-az}(u_g \cos az + v_g \sin az) \\ v &= v_g - e^{-az}(v_g \cos az + u_g \sin az), \end{aligned} \quad (4.56)$$

Годограф вітру, якій описується співвідношеннями (4.56), має назву спіральної Екмана. Для окремого випадку, коли вісь  $x$  співпадає з напрямком геострофічного вітру ( $v_g = 0$ ,  $u_g = V_g$ ), формули (4.56) набувають вигляду:

$$\begin{aligned} u &= V_g(1 - e^{-az} \cos az) \\ v &= V_g e^{-az} \sin az. \end{aligned} \quad (4.57)$$

На рис. 4.2 показано універсальний годограф вітру, якій побудований в системі координат  $u/V_g$  і  $v/V_g$ , точки на кривій відповідають різним значенням  $az$ .

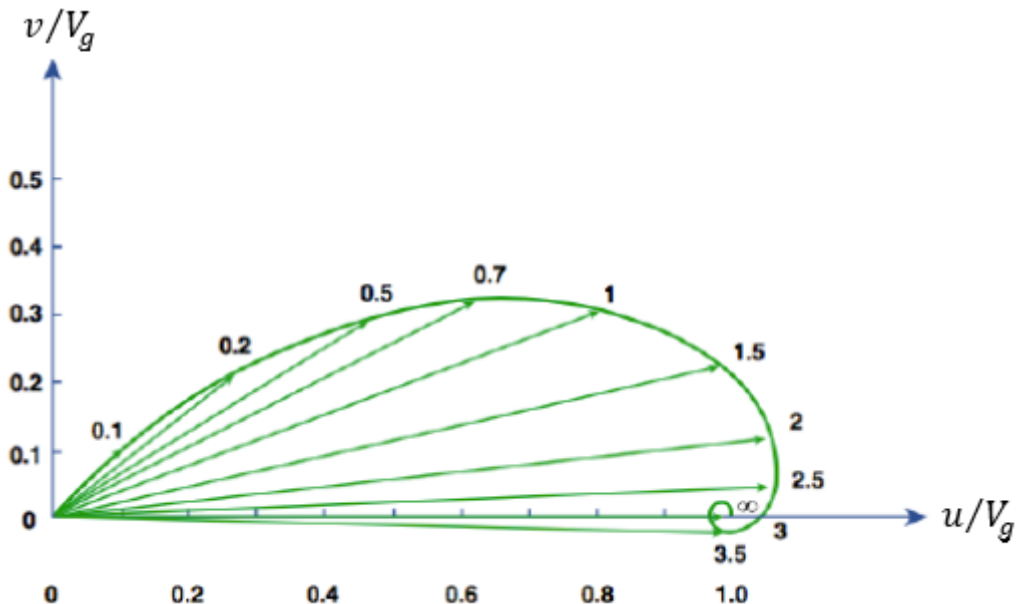


Рисунок 4.2 – Універсальна спіраль Екмана

В граничному шарі як видно з рис. 4.2 має місце праве обертання вітру з висотою.

З аналізу (4.56) і (4.57) можна бачити вплив турбулентності на вертикальний профіль вітру: сильна турбулентність (великі значення  $k$ ) викликає повільне зростання вітру з висотою, а слабка – швидке. Оскільки  $\omega_z = \omega \sin \varphi$ , то збільшення широти сприяє зменшенню коефіцієнта турбулентності, а зменшення  $\varphi$  – збільшенню  $k$ .

Кут між вектором геострофічного вітру і вектором вітру на будь-якій висоті визначається як

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v}{u} = \frac{e^{-az} \sin az}{1 - e^{-az} \cos az}. \quad (4.58)$$

При  $z = 0$  в (4.56) виходить невизначеність типу  $0/0$ , якщо її розкрити за правилом Лопіталя, то знайдемо, що  $\alpha|_{z=0} = 45^\circ$ , тобто вітер у поверхні землі відхиляється від геострофічного на кут  $45^\circ$ . Отримане значення кута приблизно в 1.5 – 2.0 рази більше спостерігаемого (для середніх умов), що пов'язано головним чином з припущенням про середній коефіцієнт турбулентності.

Тепер знайдемо висоту, на якій вектор вітру співпадає за напрямком з геострофічним ( $\alpha = 0$  і  $\operatorname{tg} \alpha = 0$ ). На цій висоті в (4.56) чисельник має обертатись на нуль, що може бути, якщо  $\sin az = 0$  і  $az = \pi, 2\pi, 3\pi, \dots$ , або  $z \rightarrow \infty$  і  $e^{-az} \rightarrow 0$ . Найменша висота  $H$ , на якій вітер стає за напрямком геострофічним, називається висотою ГША.

Таким чином:

$$aH = \pi, \quad H = \frac{\pi}{a} = \pi \sqrt{\frac{k}{\omega_z}}. \quad (4.59)$$

#### 4.6 Питання для самоперевірки

1. Яку течію називають ламінарною?
2. Яку течію називають турбулентною?
3. Чим відрізняється турбулентна течія від ламінарної?
4. Що означає термін «турбулентна дифузія»?
5. У чому полягає фізичний сенс числа Рейнольдса?
6. Співвідношенням яких сил є число Рейнольдса?
7. Як впливає на випадково виникаючи в потоці дрібні неоднорідності полів швидкості сила молекулярної в'язкості?
8. Як впливає на випадково виникаючи в потоці дрібні неоднорідності полів швидкості сила інерції?
9. Що представляє собою вираз  $f = \bar{f} + f'$  за методикою Рейнольдса?



10. Які рівняння використовуються для опису турбулентних рухів?
11. У чому полягає сенс застосування К-теорії турбулентності?
12. Які основні положення використовуються при побудові К-теорії турбулентності?
13. У чому полягає сутність градієнтної гіпотези?
14. Яка величина характеризує інтенсивність обміну різними субстанціями за рахунок перенесення їх турбулентними вихорами?
15. Який потік характеризує доданок  $\overline{\theta'v'}$ ?
16. Який вигляд набуває вираз  $\overline{\theta'w'}$  на підставі „К-теорії”?
17. Який вигляд набуває вираз  $\overline{\theta'u'}$  на підставі „К-теорії”?
18. Який вигляд набуває вираз  $\overline{u'w'}$  на підставі „К-теорії”?
19. Який вигляд набуває вираз  $\overline{u'v'}$  на підставі „К-теорії”?
20. Який вигляд набуває вираз  $v'^2$  на підставі „К-теорії”?
21. У чому полягає фізичний сенс числа Річардсона?
22. Для стратифікованої рідини як критерій розвитку турбулентності в течії використовується число Рейнольдса чи число Річардсона?
23. Що означає термін «дисипація»?
24. Як впливає дисипація на турбулентність?
25. Для вихорів якого масштабу процес дисипації є максимальним?
26. Визначення граничного шару атмосфери.
27. Чим обумовлено виникнення граничного шару в атмосфері?
28. Що таке шорсткість? Від характеристик підстильної поверхні, атмосфери вона залежить?
29. Під дією яких зовнішніх факторів відбувається формування граничного шару атмосфери?
30. Як впливає збільшення (зменшення) геострофічного вітру на висоту граничного шару?
31. Як впливає збільшення (зменшення) бароклінності (горизонтальних градієнтів температури) на висоту граничного шару?
32. Як впливає збільшення (зменшення) параметру шорсткості на висоту граничного шару?
33. Як впливає термічна стратифікація на висоту граничного шару?
34. Які фактори сприяють розвитку турбулентності?
35. При якій стратифікації турбулентне перемішування буде більш інтенсивним?
36. Як змінюється вітер у вільному граничному шарі атмосфери?
37. Який поворот вітру спостерігається у вільному граничному шарі?
38. Спрощення, які вводяться при описі динаміки граничного шару.
39. Якою величиною вважається коефіцієнт турбулентності в моделі Екмана: сталою, несталою чи незмінною?
40. Від чого залежить зміна вітру з висотою у вільному граничному шарі?

## ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ

1. Белинский В. А. Динамическая метеорология. ОГИЗ, Гостехиздат, 1948. 704 с.
2. Основы динамической метеорологии / Гандин Л.С., Лайхтман Д.Л., Матвеев Л.Т., Юдин М.И.; под ред. Лайхтмана Д.Л. и Юдина М.И. Ленинград: Гидрометеиздат, 1955. 642 с.
3. Динамическая метеорология : учебное пособие / под ред. Д.Л. Лайхтмана. Ленинград : Гидрометеиздат, 1976. 608 с.
4. Задачник по динамической метеорологии / под ред. Д.Л. Лайхтмана, Л.С. Гандина. Ленинград : Гидрометеиздат, 1967. 216 с.
5. Метеорологія і кліматологія : підручник / за ред. С.М. Степаненка. Одеса : ТЕС, 2008. 534 с.
6. Тарнопольський А. Г. Фізика граничного шару атмосфери. Одеса, 2001. 155 с.
7. Хоменко Г. В., Бондаренко В. М. Хвильові процеси в атмосфері. Одеса : Екологія, 2012. 104 с.
8. Хоменко Г. В., Хохлов В. М. Гідродинамічні методи прогнозу погоди : підручник. Одеса: Екологія, 2008. 344 с.
9. Шакина Н. П. Динамическая метеорология. Москва : ТРИАДА ЛТД, 2013. 160 с.
10. Holton J. An Introduction to Dynamic Meteorology. Volume 88. 4th Edition. Academic Press, 2004. 535 p.

## ДОДАТОК А

### ТАБЛИЦЯ ПОРЯДКІВ МЕТЕОРОЛОГІЧНИХ ВЕЛИЧИН ТА ЇХ ПОХІДНИХ

**Таблиця А.1 – Характерні значення метеорологічних величин та їх похідних (за даними Юдіна М.І. для великомасштабних рухів нижньої половини тропосфери позатропічних широт. Кроки  $\delta x = \delta y = 500$  км =  $5 \cdot 10^5$  м,  $\delta z = 2.5$  км =  $2,5 \cdot 10^3$  м,  $\delta t = 12$  год =  $4,32 \cdot 10^4$  с).**

Похідна	Метеорологічні величини					
	$u, v$ (мс <sup>-1</sup> ), $7 \cdot 10^0$	$p$ (кг м <sup>-1</sup> с <sup>-2</sup> ) $10^5$	$T$ (К), $3 \cdot 10^{-2}$	$\rho$ (кг м <sup>-3</sup> ), $10^0$	$w$ (м с <sup>-1</sup> ), $10^{-2}$	$\Omega$ (с <sup>-1</sup> ), $2 \cdot 10^{-5}$
$\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}$	$1,2 \cdot 10^{-5}$	$8 \cdot 10^{-4}$	$7 \cdot 10^{-6}$	$3 \cdot 10^{-8}$	$2 \cdot 10^{-8}$	$4 \cdot 10^{-11}$
$\frac{\partial}{\partial t}$	$1,2 \cdot 10^{-4}$	$8 \cdot 10^{-3}$	$7 \cdot 10^{-5}$	$3 \cdot 10^{-7}$	$2 \cdot 10^{-7}$	$4 \cdot 10^{-10}$
$\frac{\partial}{\partial z}$	$1,2 \cdot 10^{-3}$	$10^1$	$6 \cdot 10^{-3}$	$10^{-4}$	$3 \cdot 10^{-6}$	$6 \cdot 10^{-9}$
$\frac{\partial^2}{\partial z^2}$	$1,2 \cdot 10^{-6}$	$10^{-3}$	$7 \cdot 10^{-7}$	$10^{-8}$		
$\frac{\partial^2}{\partial x^2}, \frac{\partial^2}{\partial y^2}$	$3 \cdot 10^{-11}$	$1,5 \cdot 10^{-9}$	$2 \cdot 10^{-11}$	$8 \cdot 10^{-14}$		
$\frac{\partial^2}{\partial x \partial t}, \frac{\partial^2}{\partial y \partial t}$	$3 \cdot 10^{-10}$	$1,5 \cdot 10^{-8}$	$2 \cdot 10^{-10}$	$8 \cdot 10^{-13}$		
$\frac{\partial^2}{\partial x \partial z}, \frac{\partial^2}{\partial y \partial z}$	$5 \cdot 10^{-9}$	$3 \cdot 10^{-7}$	$3 \cdot 10^{-9}$	$6 \cdot 10^{-12}$		
$\frac{\partial^2}{\partial z \partial t}$	$5 \cdot 10^{-8}$	$3 \cdot 10^{-6}$	$3 \cdot 10^{-8}$	$6 \cdot 10^{-11}$		

Примітка: порядки всіх метеорологічних величин та їх похідних указані в одиницях Міжнародної системи (кілограм, метр, секунда).

Навчальне електронне видання

ХОМЕНКО Інна Анатоліївна

## ДИНАМІЧНА МЕТЕОРОЛОГІЯ

Конспект лекцій

**Видавець і виготовлювач**

Одеський державний екологічний університет

вул. Львівська, 15, м. Одеса, 65016

тел./факс: (0482) 32-67-35

E-mail: [info@odeku.edu.ua](mailto:info@odeku.edu.ua)

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи

ДК № 5242 від 08.11.2016