МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ОДЕСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ЕКОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Методичні вказівки

для практичних занять з дисципліни

ВИЩА МАТЕМАТИКА

(Розділ «Диференціальні рівняння»)
для студентів 1 року денної форми навчання спеціальності
207 „Водні біоресурси та аквакультура”

Одеса 2022

Методичні вказівки для практичних занять з дисципліни «Вища математика» (Розділ „Диференціальні рівняння”) для студентів 1 року денної форми навчання спеціальностями 207 „Водні біоресурси та аквакультура”.

Одеса, ОДЕКУ, 2022 р., 38 с., укр. мова.

Укладачі: Хецеліус О.Ю, д. ф.-м. н., проф., Сєрга І.М., к. ф.-м. н., доц.

ЗМІСТ

І ЗАГАЛЬНА ЧАСТИНА

1.1 Передмова

Вища математика належить до однієї з основних дисциплін фундаментального циклу, яка спрямована на вивчення основних положень лінійної алгебри, диференціального і інтегрального числення, теорії поля, числових та функціональних рядів, звичайних диференціальних рівнянь, теорії функції комплексної змінної, операційного числення, рівнянь математичної фізики та узагальнення можливостей практичного використання вивчених методів при вирішенні практичних задач у конкретній науково-практичній діяльності.

Мета вивчення дисципліни: забезпечити фундаментальне засвоєння теоретичних курсів з вищої математики, сприяти формуванню навичок у застосуванні відомих методів вищої математики в різних галузях, навичок творчого дослідження та математичного моделювання задач.

Загальний обсяг навчального процесу в годинах, рівнянь знань та вмінь при вивченні дисципліни визначаються освітньо-професійними програмами.

Завдання розділу «Диференційні рівняння» - навчити студентів: правильно використовувати вивчені методи при вирішуванні задач, правильно аналізувати результати математичних обчислень. Вивчення цього розділу потребує від студентів знання таких розділів вищої математики, як диференціальне та інтегральне числення функції однієї змінної.

Дуже часто треба описати деякі процеси та явища, враховуючи змінні параметри, які завжди є в реальній ситуації. Математична модель таких явищ- це рівняння, які містять не тільки невідомі функції та незалежні змінні,а й похідні цих функцій.

Розділ «Диференціальні рівняння» вивчається на першому курсі навчання і передбачає лекційні та практичні заняття та самостійну роботу студентів.

Вивчення розділу «Диференціальні рівняння» надасть студентам знання основних типів диференціальних рівнянь першого порядку та методи їх розв''язання ,диференціальних рівнянь вищих порядків, які інтегруються пониженням порядку,а також лінійних однорідних рівнянь другого порядку із сталими коефіцієнтами.

В результаті вивчення розділу студент повинен знати матеріал в обсязі програми та вміти використовувати отриманні знання при розв'язуванні задач відповідних розділів вищої математики.

Мета методичних вказівок - роз'яснити та допомогти студентам засвоїти основні поняття теоретичного курсу та навчити використовувати знання при розв'язанні задач даної дисципліни.

В результаті вивчення розділу студент повинен:

знати –

основні визначення;

задачі,що приводять до диференціальних рівнянь;

основні типи диференційних рівнянь першого порядку та методи їх розв"язання;

диференційні рівняння вищих порядків;

лінійні однорідні рівняння другого порядку із сталими коефіцієнтами.

вміти – вміти – влучно і стисло виражати математичну думку під час розв'язання конкретних задач, самостійно розв'язувати типові задачі, що найбільш часто зустрічаються, використовуючи для цього отримані під час вивчення даного розділу дисципліни знання, аналізувати отримані результати. Отримані у процесі навчання знання повинні створити базу, необхідну для вивчення багатьох спеціальних дисциплін професійно – орієнтованого циклу, що формують фахівця в галузі.

А також:

1. Формулювати задачі,що приводять до диференціальних рівнянь.

2. Вміти розрізняти типи рівнянь(рівняння з відокремленими та відокремлюваними змінними,однорідні рівняння відносно x та y, лінійні рівняння першого порядку, рівняння Бернуллі.)

3.Вміти правильно застосовувати методи розв'язку для різних типів рівняннь .

4. Знаходити частинний розв"язок шуканого рівняння, який задовольняє початковим умовам- вирішувати задачу Коші.

5. Визначати рівняння вищих порядків, та їх порядок.

6. Визначати окремі види рівнянь другог порядку ,інтегрування яких зводиться до рівнянь першого порядку.зробивши відповідну підстановку.

7.Відрізняти конкретні випадки ров"язку лінійних однорідних рівнянь другого порядку із сталими коефіцієнтами (знаходити характеристичне рівняння, його корені, загальний розв"язок та задачу Коші).

8. Інтегрувати лінійні неоднорідні рівняння другого порядку із сталими коефіцієнтами.

9. Використовувати теоретичні знання та навички при виконанні різноманітних практичних задач, правильно аналізувати результати математичних обчислень.

Обсяг вивчення розділу визначається силабусами, розробленими з урахуванням професійного спрямування потоків і окремих груп.

Вид контролю знань після вивчення зазначених розділів – модульна контрольна робота, опитування.

1.2 Зміст розділу «Диференціальні рівняння »

Програма розділу диференціальні рівняння складається з переліку основних математичних понять і фактів, якими повинен володіти студент (вміти правильно їх використовувати при розв'язанні задач, посилатися на них при доведенні теорем), переліку основних математичних вмінь та навичок, якими повинен володіти студент.

Мета та завдання даних методичних вказівок – допомогти засвоїти та повторити теоретичний матеріал та підготуватись до практичних занять за розділом «Диференціальні рівняння» та до виконання модульної контрольної роботи після вивчення розділу.

ОСНОВНІ МАТЕМАТИЧНІ ПОНЯТТЯ, ФАКТИ ЯКІ ВИКОРИСТОВУЮТЬСЯ У РОЗДІЛУ

1. Основні поняття теорії диференціальних рівнянь
2. Диференціальні рівняння I порядку: загальні поняття
3. Геометричний зміст диференціального рівняння I порядку
4. Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними
5. Однорідні диференціальні рівняння
6. Лінійні рівняння
7. Рівняння Бернуллі
8. Рівняння у повних диференціалах
9. Задачі, що призводять до диференціальних рівнянь
10. Диференціальні рівняння другого порядку. Загальні поняття
11. Диференціальні рівняння другого порядку, що допускають пониження порядку
12. Лінійні диференціальні рівняння *n*-го порядку
13. Лінійні однорідні диференціальні рівняння другого порядку (ЛОДР -2) зі сталими коефіцієнтами
14. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння другого порядку (ЛНДР-2)
15. Метод варіації довільних сталих Лагранжа
16. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами

<u>вміти:</u> використовувати отримані знання при розв’язанні конкретних задач, застосовувати ці знання для подальшого вивчення дисциплін професійноорієнтованого циклу, а також наукової роботи.

II МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

2.1 Загальні поради

Робота над навчальним матеріалом складається з наступних елементів: вивчення матеріалу на основі лекційних занять, рішення задач на практичних заняттях, самостійна робота, самоперевірка, виконання завдань модульного контролю. Студент може звертатися до викладача з питаннями для одержання письмової чи усної консультації. Завершальним етапом вивчення розділу є виконання модульної контрольної роботи.

У методичних вказівках наведено розв'язання типових завдань з поясненнями алгоритму рішень. На практичних заняттях та у модульній контрольній роботі розглядаються основні розділи диференціальних рівнянь і використовуються наступні рекомендації по розв'язанню завдань. Перелік завдань наведений у п. 2.4.

2.2 Методичні вказівки до практичних занять та підготовки до виконання модульної контрольної работи.

2.2.1. Основні поняття диференціальних рівнянь

Література: [1, р.7, п. 1-2], [2, гл.9, п.1]

Означення. *Звичайним диференціальним* рівнянням називається рівняння, що залежить від незалежної змінної x, шуканої функції і її похідних.

Символічно це записують так

$$F\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right) = 0\,.$$

Означення. Порядок найвищої похідної невідомої функції, що входить у диференціальне рівняння, називається *порядком* цього рівняння.

Наприклад:

а) - $x^2 y' + 5x\,y = y^2$ -диференціальне рівняння першого порядку.

б) - $y'' - 2y' + y - x^2 = 0$ -диференціальне рівняння другого порядку.

Означення. *Розв'язком* диференціального рівняння називається функція $y = \varphi(x)$, яка при підстановці в рівняння перетворює його в тотожність.

Приклад 1 . $y'=\frac{y}{x}$ y=kx, k=const

Найпростішим диференціальним рівнянням є рівняння виду $y' = f(x)$.

Щоб його розв`язати, досить взяти невизначений інтеграл

$$y = \int f(x)dx = F(x) + C,$$

де C- довільна стала.

Інтегральною кривою будем називати криву у якої дотична до будь-якої точки співпадає з напрямком проведеним до цієї точки.

Геометрична інтерпретація розв''язку - це той факт, що рішення є інтегральною кривою.

Означення. Загальним розв'язком диференціального рівняння називається y=φ(x, C_1,C_2,…) розв'язок, який містить стільки констант C_1,C_2,… який порядок цього рівняння.

*Розв`язати задачу Коші* - означає виділити із загального розв`язку частинний розв`язок, що задовольняє заданим початковим умовам:

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y'_0,\ y''(x_0) = y''_0,\ \ldots..$$

Частинним розв'язком диференціального рівняння називається розв'язок y=φ(x, C_1,C_2,…), в якому C_1,C_2,… приймають певні значення, які відповідають задачі Коші.

Для розв'язку задачі Коші треба знайти загальний розв'язок,а потім використовуючи початкові умови, знайти ті значення констант при яких розв'язок буде задовольняти початковим умовам.

Приклад.2

Точка рухається уздовж осі зі швидкістю υ(t). При t=0, точка перебуває в x_0. Знайти положення точки в довільний момент часу.

Нехай $x(t)$ - координата точки у довільний момент часу, тоді маємо

$$\begin{cases} x(0) = x_0 \\ x'(t) = v(t) \end{cases}.$$

Отже

$$x(t) = \int_0^t v(t)dt + c\ .$$

Використовуючи початкову умову $x(0) = c = x_0$ отримаємо

$$x(t) = \int_0^t v(t)dt + x_0\,.$$

.2.2.2 *Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними(з розділеними)*

Література: [1, р.7, п. 1-2], [2, гл.9, п.1]

Означення. Рівняння виду y′=f(x)φ(y) називається *рівнянням з розділеними змінними*, де f(x) залежить тільки від змінної x, а φ(y) – від змінної y.

Приклад 3. Знайти загальний розв’язок $y' = \frac{y}{x}$.

Розв’язок:

Вихідне рівняння еквівалентно $\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$, $y \neq 0$.

Інтегруючи маємо

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}$$

або ln|y|= ln|x|+ln c, c>0.

Отже ln|y|= ln c|x|, c>0 і |y|= c|x|, c>0, або y=cx, $c \neq 0$.

Враховуючи, що y=0 теж розв’язок , то

y=cx, $c \in R^1$ - загальний розв’язок.

Приклад 4. Знайти загальний розв`язок диференціального рівняння

$y' = 2^{x+y}$.

Розв’язок:

Дивлячись на те, що $y' = \frac{dy}{dx}$, напишемо його у вигляді $2^{-y}dy = 2^x dx$

Беремо інтеграли $\int 2^{-y} dy = \int 2^x dx$, або $-\frac{2^{-y}}{\ln 2} = \frac{2}{\ln 2}^x + C$.

2.2.3.Однорідні диференціальні рівняння першого порядку

Література: [1, р.7, п. 1-2], [2, гл.9, п.2]

Означення. Функція називається *однорідною функцією к-го порядку*, якщо $f(tx, ty) = t^k \cdot f(x, y)$.

Наприклад: $f(x, y) = 4x^3 + 7x^2 y - 5xy^2 + 9y^3$ є однорідною функцією третього порядку, тут сумарний степінь змінних x і y в кожному доданку дорівнює трьом; функція $f(x, y) = \frac{x-y}{x+y} + \frac{y}{x} \ln \frac{x}{y} - 5$ - однорідна нульового порядку.

Означення. Диференціальне рівняння

$$f_1(x, y)dx = f_2(x, y)dy \qquad (4)$$

називається *однорідним* диференціальним рівнянням, якщо $f_1(x, y)$ і $f_2(x, y)$ - однорідні функції того самого порядку або, якщо диференціальне рівняння (4) можна розв'язати відносно y', тобто

$$y' = f(x, y), \qquad (5)$$

то $f(x, y)$ - однорідна функція нульового порядку.

Приклад 5. Знайти загальний розв`язок диференціального рівняння $(x - y)dy = (x + y)dx$.

Запишемо це рівняння у вигляді $\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x-y}$.

Розділимо чисельник і знаменник правої частини на *x*: $\frac{dy}{dx} = \frac{1 + \frac{y}{x}}{1 - \frac{y}{x}}$.

Покладемо $t = \frac{y}{x} \Rightarrow y = xt \Rightarrow \frac{dy}{dx} = t + x\frac{dt}{dx}$.

Підставляючи все це в рівняння, отримаємо $t + x\frac{dt}{dx} = \frac{1+t^2}{1-t}$.

Відокремлюємо змінні:

$$\frac{1-t}{1+t^2}dt=\frac{dx}{x}.$$

Звідки

$$arctgt-\frac{1}{2}\ln\left(1+t^2\right)=\ln x+C$$

або

$$arctg\frac{y}{x}-\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{y}{x^2}^2\right)=\ln x+C.$$

Приклад 6.

Розв’язати xy′=y+xtg($\frac{y}{x}$).

Розв’язок.

Оскільки y′=($\frac{y}{x}$) +tg($\frac{y}{x}$), то роблячи заміну $\frac{y}{x}$=u; y=ux; y′=u′x+u, отримаємо

u′x+u=u+tgu або $\frac{du}{tgu}=\frac{dx}{x}, tgu\neq 0.$

Інтегруючи рівність маємо

$$\int\frac{du}{tgu}=\int\frac{dx}{x},$$

ln|sin u|= ln|x|+ln c, c>0,

sin u=cx, c$\neq$0, або

sin $\frac{y}{x}$=cx, c$\neq$0.

Оскільки, якщо tgu=0, то u=kπ, або

y=kπx

– є розвязок рівняння, то він попадає у загальне рішення

– sin $\frac{y}{x}$=cx, якщо c=0.

– Отже загальне рішення рівняння sin $\frac{y}{x}$=cx, $c\in R^1$.

- **2.2.4 Лінійні диференціальні рівняння першого порядку**

Література: [1, р.7, п. 1-2], [2, гл.9, п.3]

Означення.

Лінійним диференціальним рівнянням першого порядку називається рівняння вигляду

$$y' + p(x)\cdot y = q(x). \qquad (6)$$

Зробимо підстановку: $y = u(x)\cdot v(x)$, де $u(x)$ і $v(x)$ поки що довільні функції. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{du}{dx}\cdot v + u\cdot\dfrac{dv}{dx}$.

Підставляємо в рівняння:

$$\frac{du}{dx}\cdot v + u\cdot\frac{dv}{dx} + p(x)uv = q(x).$$

Покладаючи $u\cdot\dfrac{dv}{dx} + p(x)uv = 0, u \neq 0.$

Зауваження. Якщо поставити $u = 0$, отримаємо $y = 0$ й $y' = 0$. Лінійне рівняння втратить зміст.

Маємо

$$\begin{cases} \dfrac{dv}{dx} + p(x)v = 0 \\ \dfrac{du}{dx}v = q(x). \end{cases}$$

Розв`яжемо перше рівняння системи:

$$\frac{dv}{v} = -p(x)dx \Rightarrow \ln v = -\int p(x)dx. \quad v(x) = e^{-\int p(x)dx}.$$

Отримане значення $v(x)$ підставляємо в друге рівняння системи, і знаходимо:

$$u(x) = \int q(x)e^{\int p(x)dx} + C.$$

Шуканий розв`язок :

$$y = \left(\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C \right)e^{-\int p(x)dx}.$$

Приклад 7 . Знайти загальний розв`язок диференціального рівняння $y' - 2xy = 2x^3$ - лінійне диференціальне рівняння першого порядку.

Розв’язок.

Робимо заміну: $y = u \cdot v,$ $y' = \frac{du}{dx} \cdot v + u \cdot \frac{dv}{dx}.$ Підставляємо в рівняння:

$$\frac{du}{dx} \cdot v + u \cdot \frac{dv}{dx} - 2xuv = 2x^3.$$

Покладемо

$$\begin{cases} \frac{dv}{dx} - 2xv = 0 \\ \frac{du}{dx} = 2x^3. \end{cases}$$

Розв`яжемо перше рівняння системи:

$$\frac{dv}{v} = 2xdx \Rightarrow \ln v = x^2 \Rightarrow v = e^{x^2}.$$

Підставляємо в друге рівняння системи:

$$\frac{du}{dx} \cdot e^{x^2} = 2x^3 \Rightarrow du = 2x^3 dx \Rightarrow$$

$$u = \int 2x^3 e^{-x^2} dx = \begin{bmatrix} t = -x^2 \\ dt = -2xdx \end{bmatrix} = -\int te^t dt = \begin{bmatrix} u = t; dv = e^t dt \\ du = dt; v = e^t \end{bmatrix} =$$

$$= -te^t + \int e^t dt = -te^t + e^t + C = x^2 e^{-x^2} + e^{-x^2} + C.$$

Шуканий розв’язок

$$y = u \cdot v = \left(x^2 e^{-x^2} + e^{-x^2} + C\right) e^{x^2} = x^2 + 1 + C e^{x^2}.$$

Приклад.8 Розв’язати $y' = xy + x^2$.

Розв’язок.

Оскільки $a(x) = x$, а $b(x) = x^2$ маємо

$$y=\left(\int x^2\cdot e^{-\int xdx}\,dx\right)\cdot e^{\int xdx}=\left(\int x^2\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx\right)\cdot e^{\frac{x^2}{2}}.$$

2.2.5. Рівняння Бернуллі.

Означення. Рівняння виду $y'=a(x)\,y+b(x)\,y^n$, $n\neq 1$ називається рівнянням Бернуллі.

Рівняння Бернуллі зводиться, за допомогою заміни невідомої функції, до лінійного рівняння.

Представимо рівняння у вигляді

$\frac{y'}{y^n}=a(x)\,y^{1-n}+b(x)$. Нехай $u=y^{1-n}$, тоді $u'=(1-n)\,y'\,y^{-n}$ і $\frac{y'}{y^n}=\frac{1}{1-n}u'$.

Отже, підставляючи у вихідне рівняння отримаємо

$\frac{1}{1-n}u'=a(x)u+b(x)$ - лінійне рівняння відносно u.

2.2.6. Диференційні рівняння вищого порядку, що допускають пониження порядку

Література: [1, р.7, п.3-4], [2, гл.9, п.4]

У деяких випадках розв`язок диференціального рівняння другого порядку спрощується за рахунок пониження його порядку.

Диференціальне рівняння виду $y''=f(x)$.

Інтегруємо по x обидві частини цієї рівності $y'=\int f(x)dx+C_1$,

де C_1- стала інтегрування. Шуканий розв`язок

$$y=\left(\int f(x)dx+C_1\right)dx+C=\int\left(\int f(x)dx\right)dx+C_1x+C_2.$$

Приклад 9.

Знайти загальний розв`язок диференціального рівняння $y''=\cos 2x.$

Розв`язок:

$$y'=\int\cos 2xdx=\frac{1}{2}\sin 2x+C_1,$$

$$y=\int\frac{1}{2}\sin 2xdx+C_1x+C_2=-\frac{1}{4}\cos 2x+C_1x+C_2.$$

Приклад 10.

Знайти загальний розв`язок диференціального рівняння

$$y'''=\frac{x^2}{2}$$

Розв`язок: $y''=\int\frac{x^2}{2}dx=\frac{x^3}{6}+C_1$,

$$y'=\int\left(\frac{x^3}{6}+C_1\right)dx=\frac{x^4}{24}+C_1x+C_2,$$

$$y=\int\left(\frac{x^4}{24}+C_1x+C_2\right)dx=\frac{x^5}{120}+C_1\frac{x^2}{2}+C_2x+C_3.$$

***2.2.7.Диференціальне рівняння, що не містить явно шукану функцію** y*:

$$y''=f(x,y').$$

Введемо нову невідому $p(x)=y'(x)$, тоді $y''=\frac{dp}{dx}$. А рівняння звелося до рівняння першого порядку щодо шуканої функції $p=p(x,C_1)$. Загальний розв`язок даного рівняння $y=\int p(x,C_1)dx+C_2$.

Приклад 11.

Знайти загальний розв`язок диференціального рівняння

$$\left(1+x^2\right)y''+(y')^2+1=0.$$

Розв’язок.

Покладемо $y'=p$. Тоді $y''=\frac{dp}{dx}$. Підставляємо в рівняння і розділяємо змінні

$$\frac{dp}{1+p^2}=-\frac{dx}{1+x^2}\Rightarrow arctg\, p = arctgC_1 - arctgx$$

Звідси (у відповідністю із формулою $tg(\alpha-\beta)=\dfrac{tg\alpha - tg\beta}{1+tg\alpha\cdot tg\beta}$),

$p=\dfrac{C_1-x}{1+C_1x}$ або $y'=\dfrac{C_1-x}{1+C_1x}\cdot$ Остаточно маємо:

$$y=\int\frac{C_1-x}{1+C_1x}dx=-\frac{1}{C_1}\int dx+\left(C_1+\frac{1}{C_1}\right)\int\frac{dx}{1+C_1x}=-\frac{x}{C_1}+\frac{C_1+\frac{1}{C_1}}{C_1}\ln\left|1+C_1x\right|+C_2.$$

2.2.8.*Диференціальне рівняння не містить явно незалежну змінну* x:

$$y''=f(y,y').$$

Покладаємо $y'=p(x)$, тоді $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{d(y')}{dx}=\dfrac{dp}{dx}=\dfrac{dp}{dy}\cdot\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dp}{dy}p$.

Підставляємо у вихідне рівняння $p\dfrac{dp}{dy}=f(y,p)\Rightarrow p=p(y,C_1)$ або

$\dfrac{dy}{dx}=p(y,C_1)$. Розділяємо змінні $\dfrac{dy}{p(y,C_1)}=dx.$

Загальний розв`язок диференціального рівняння знайдемо із співвідношення

$$x=\int\frac{dy}{p(y,C_1)}+C_2.$$

Приклад 12.

Знайти загальний розв`язок диференціального рівняння $y''=2y\,y'$.

$y'=p\Rightarrow y''=p\dfrac{dp}{dx}$.

Розв”язок:

Підставляємо в рівняння $p\frac{dp}{dx}=2yp$ або $p\left(\frac{dp}{dx}-2y\right)=0$.

1. $p=y'=0 \Rightarrow y=C\,(const)$.

2. $\frac{dp}{dy}=2y \Rightarrow dp=2ydy \Rightarrow \frac{dy}{dx}=p=y^2+C_1$

а) $C_1=0$, тоді $\frac{dy}{y^2}=dx \Rightarrow -\frac{1}{y}=x+C \Rightarrow y=-\frac{1}{x+C_2}$;

б) $C_1>0$. Так як стала довільна, покладемо $C_1^2=0$, маємо

$$\frac{dy}{C_1^2+y^2}=dx \Rightarrow x=\frac{1}{C_1}arctg\frac{y}{C_1}+C_2.$$

в) $C_1<0$. Якщо $\left(-C_1^2\right)$, маємо: $\frac{dy}{y^2-C_1^2}=dx$, а розв'язок

$$x=\frac{1}{2C_1}\ln\frac{y-C_1}{y+C_1}+C_2.$$

2.2.9. Лінійне однорідне диференційне рівняння ІІ-го порядку зі сталими коефіцієнтами

Література: [1, р.7, п.3-4], [2, гл.9, п.5]

Означення. Диференціальне рівняння називається *лінійним*, якщо воно лінійне щодо шуканої функції і її похідних:

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+a_2y^{(n-2)}+\dots+a_{n-1}y'+a_ny=f(x). \qquad (1)$$

де a_i (i=1,2,3…,n) - або постійні, або неперервні функції.

Означення. Диференціальне рівняння (1) називається *неоднорідним*, якщо $f(x)\neq 0$, і *однорідним*, якщо $f(x)=0$.

Розглянемо лінійне однорідне диференціальне рівняння другого порядку

$$y''+a_1(x)y'+a_2(x)y=0 \qquad (2)$$

у2

Теорема 1. Якщо і - розв`язки рівняння (8), то і їхня сума

у2

\+ також є розв`язком цього рівняння.

у0

Теорема 2. Якщо є розв`язком рівняння (8), тоді і також є розв`язком цього рівняння, де C = const.

у2

Означення. Два розв`язки і рівняння (8) називаються *лінійно незалежними* на відрізку $[a, b]$, якщо $\frac{y_1(x)}{y_2(x)} \neq \alpha = const$, і *лінійно залежними*, якщо $\frac{y_1(x)}{y_2(x)} = \alpha.$

***Теорема** про загальний розв`язок лінійного однорідного*

у2

диференціального рівняння: Якщо і - лінійно незалежні розв`язки рівняння (8), то загальний розв`язок цього рівняння запишеться у вигляді:

$$y = C_1 y_1 + ,$$

де C_1 і C_2 - довільні сталі.

Означення. Лінійне однорідне диференціальне (ЛОДР) рівняння другого порядку має вигляд

$$y'' + py' + qy = 0\,, \tag{3}$$

де коефіцієнти p і q - постійні дійсні числа.

Розв`язки рівняння шукаємо у вигляді $y = e^{kx}$, тоді $y' = ke^{kx}$, $y'' = k^2 e^{kx}$. Підставляючи в рівняння, отримаємо $e^{kx}\left(k^2 + pk + q\right) = 0.$

Тому що $e^{kx} \neq 0,$ маємо

$$k^2 + pk + q = 0. \tag{4}$$

Назвемо цей вираз характеристичним рівнянням. Воно являє собою квадратне рівняння відносно *k*. Корені квадратного рівняння

$$k_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Розглянемо три випадки:

1. *Корені характеристичного рівняння дійсні і різні:* $k_1 \neq k_2$.

У цьому випадку розв`язки $y_1 = e^{k_1 x}$, $y_2 = e^{k_2 x}$ лінійно незалежні, тому що відношення $\frac{y_1}{y_2} = \frac{e^{k_1 x}}{e^{k_2 x}} = e^{(k_1 - k_2)x} \neq const$. І загальний розв`язок рівняння запишеться у вигляді $y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$.

Приклад 13.

Знайти загальний розв`язок диференціального рівняння

$y'' - 9y' + 14y = 0.$

: Розв’язок.

Характеристичне рівняння: $k^2 - 9k + 14 = 0, k_1 = 2, k_2 = 7.$

Відповідь: $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{7x}$.

Корені характеристичного рівняння дійсні і рівні: $k_1 = k_2$.

За теоремою Вієта $k_1 + k_2 = -p.$ Але $k_1 = k_2$. Тому $2k_1 + p = 0$ і $k_1 = -\frac{p}{2}$. Один частинний розв`язок $y_1 = e^{-\frac{p}{2}x}$. Другий, лінійно незалежний із цим, отримаємо із співвідношення $y_2(x) = y_1(x) \int \frac{e^{-\int p dx}}{y_1^2} dx.$

Маємо

$$y_2 = e^{-\frac{p}{2}x} \int \frac{e^{-\int p dx}}{\left(e^{-\frac{p}{2}x}\right)^2} dx = e^{-\frac{p}{2}x} \int \frac{e^{-px}}{e^{-px}} dx = x e^{-\frac{p}{2}x},$$

а загальний розв`язок рівняння $y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x} \cdot x$

Приклад 14. Знайти загальний розв`язок диференціального рівняння

$y'' - 8y' + 16y = 0.$

Розв’язок.

Характеристичне рівняння: $k^2 - 8k + 16 = 0, k_1 = k_2 = 4.$

Відповідь: $y = C_1 e^{4x} + C_2 e^{4x} x.$

3. *Корені характеристичного рівняння комплексно спряжені*: $k_{1,2} = \alpha \pm i\beta$.

У цьому випадку можна покласти $y_1 = e^{(\alpha+\beta i)x}$, $y_2 = e^{(\alpha-\beta i)x}$.

Теорема. Якщо розв`язком диференціального рівняння (4) є комплексна функція дійсного аргументу $y = u(x) + iv(x)$, , то розв`язками рівняння (9) будуть його дійсна $u(x)$ та уявна $v(x)$ частини.

Підставляємо $y = u(x) + iv(x)$ в рівняння (9)

$$(u + iv)'' + p(u + iv)' + q(u + iv) = 0$$

або, у силу властивостей похідних,

$$(u'' + pu' + qu) + i(v'' + pv' + q) = 0 .$$

Відомо, що комплексне число дорівнює нулю, якщо дорівнюють нулю його дійсна та уявна частини. Тому маємо

$$u''(x) + pu'(x) + qu(x) = 0 \text{ і } v''(x) + pv'(x) + qv(x) = 0 .$$

У відповідності із формулами Ейлера, записані вище розв`язки рівняння (9) подаємо у вигляді $y_1 = e^{\alpha x}(\cos(\beta x) + i\sin(\beta x))$, $y_2 = e^{\alpha x}(\cos(\beta x) - i\sin(\beta x))$.

В силу доведеної теореми розв`язками рівняння (9) зручніше взяти їх дійсну й уявну частини $u(x) = e^{\alpha x}\cos\beta x$ і $v(x) = e^{\alpha x}\sin\beta x$. Вони лінійно незалежні $\dfrac{u(x)}{v(x)} = \dfrac{e^{\alpha x}\cos\beta x}{e^{\alpha x}\sin\beta x} = ctgx \neq const$.

Загальний розв`язок набуде вигляду

$$y = e^{\alpha x}(C_1\cos(\beta x) + C_2\sin(\beta x)).$$

Приклад 15.

Знайти загальний розв`язок диференціального рівняння $y'' - 4y' + 20y = 0.$

Розв”язок:

Характеристичне рівняння: $k^2 - 4k + 20 = 0,$

$k_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4-20} = 2 \pm 4i.$

Відповідь: $y = e^{2x}(C_1\cos(4x) + C_2\sin(4x)).$

2.2.10. Лінійне неоднорідне диференційне рівняння II-го порядку зі сталими коефіцієнтами

Література: [1, р.7, п.3-4], [2, гл.9, п.6]

Лінійне неоднорідне диференційне рівняння II-го порядку має вигляд

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x). \qquad (11)$$

Теорема. (Структура загального розв`язку рівняння (11)). Загальний розв`язок рівняння (11) являє собою суму загального розв`язку відповідного йому однорідного рівняння

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0 \qquad (12)$$

і деякого частинного розв`язку $y_ч$ неоднорідного рівняння (11)

$$y = y_{одн} + y_ч.$$

Лінійним неоднорідним диференціальним рівнянням другого порядку зі сталими коефіцієнтами називається рівняння вигляду:

$$y'' + py' + qy = f(x),$$

права частина якого має спеціальний вигляд, що дозволяє знайти його частинний розв'язок за допомогою невизначених коефіцієнтів

$$f(x) = P_n(x)e^{\lambda x}, \qquad (13)$$

де $P_n(x)$- багаточлен n- го порядку.

Візьмемо функцію $y = Q(x)e^{\lambda x}$, де

$$Q(x) = A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \ldots + A_{n-1}x + A_n$$

- багаточлен n- го порядку з невизначеними коефіцієнтами, і підставимо в рівняння (5.9). Після очевидних перетворень отримаємо

$$Q_n''(x) + (2\lambda + p)Q_n'(x) + (\lambda^2 + p\lambda + q)Q_n(x) = P_n(x). \qquad (14)$$

Відзначимо, що, якщо $Q_n(x)$ - багаточлен n- го порядку, то $Q_n'(x)$ - (n-1)- го, а $Q_n''(x)$- (n-2)- го порядку.

а. Нехай λ - дійсне число, що не є коренем характеристичного рівняння. Тоді ліва і права частини рівності (14) є багаточлени n -го порядку. Частинний розв`язок неоднорідного рівняння потрібно шукати у вигляді

$$y_ч = Q_n(x)e^{\lambda x}. \qquad (15)$$

б. Нехай λ - дійсний однократний корінь характеристичного рівняння. У цьому випадку в правій частині рівності (14) залишиться багаточлен n -го порядку, а в лівій – (n-1)- го, тому що $\lambda^2 + p\lambda + q = 0.$

Частинний розв`язок

$$y_ч = xQ_n(x)e^{\lambda x} . \tag{16}$$

в. λ - дійсний дворазовий корінь характеристичного рівняння. У рівності (14) не тільки $\lambda^2 + p\lambda + q = 0,$ але і у силу теореми Вієта $2\lambda + p = 0.$ Частинний розв`язок

$$y_ч = x^2 Q_n(x)e^{\lambda x} . \tag{17}$$

Запишемо праву частину рівняння (5.9) так

$$f(x) = P_n(x)e^{\lambda_1 x} + Q_n(x)e^{\lambda_2 x} , \tag{18}$$

де $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ - комплексні числа, що не є коренями характеристичного рівняння. Повторюючи міркування, наведені для однорідних рівнянь у випадку комплексно спряжених коренів характеристичного рівняння, отримаємо

$$y_ч = U_n(x)e^{\alpha x}\cos(\beta x) + V_n(x)e^{\alpha x}\sin(\beta x). \tag{19}$$

Можна також показати, що якщо $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ є однократними коренями характеристичного рівняння, то

$$y_ч = x[U_n(x)e^{\alpha x}\cos(\beta x) + V_n(x)e^{\alpha x}\sin(\beta x).] \tag{20}$$

Нехай тепер

$$f(x) = P_{n_1}(x)e^{\alpha x}\cos(\beta x) + Q_{n_2}(x)e^{\alpha x}\sin(\beta x). \tag{21}$$

Покажемо, що рівність (21) можна записати у вигляді (18). Дійсно, застосовуючи формули Ейлера, запишемо

$$f(x) = P_{n_1}(x)e^{\alpha x}\frac{e^{\beta i x} + e^{-\beta i x}}{2} + Q_{n_2}(x)e^{\alpha x}\frac{e^{\beta i x} - e^{-\beta i x}}{2i} =$$

$$= \left[\frac{1}{2}P_{n_1}(x) + \frac{1}{2i}Q_{n_2}(x)\right]e^{(\alpha+\beta i)x} + \left[\frac{1}{2}P_{n_1}(x) - \frac{1}{2i}Q_{n_2}(x)\right]e^{(\alpha-\beta i)x}.$$

Тут у кожній із квадратних дужок багаточлен степені $n = \max(n_1, n_2)$.

Зауваження. Якщо $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$

Приклад 16.

Знайти загальний розв`язок диференціального рівняння

$$y'' - y' = x + 2 + 9xe^{2x} + e^{x}\cos x.$$

Це неоднорідне диференціальне рівняння зі сталими коефіцієнтами. Відповідне йому однорідне рівняння

$$y'' - y' = 0.$$

Характеристичне рівняння $k^2 - k = 0, k_1 = 0, k_2 = 1.$

Загальний розв`язок рівняння (23)

$$y_{одн} = C_1 + C_2 e^{x}.$$

Подамо праву частину рівняння (22) у вигляді

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x),$$

де $f_1(x) = x + 2;\ f_2(x) = 9xe^{2x};\ f_3(x) = e^{x}\cos x.$

Шукаємо частинний розв`язок неоднорідного рівняння (22).

$f_1(x) = x + 2$ можна записати в такому вигляді $f_1(x) = (x+2)e^{0x}$. А так як серед коренів характеристичного рівняння є $k = 0$, то розв`язок $y_{ч_1}$ шукаємо у вигляді $y_{ч_1} = (Ax + B)x = Ax^2 + Bx$. Знаходимо $y'_{ч_1} = 2Ax + B,\ \ y''_{ч_1} = 2A$ і і підставляємо в рівняння $2A - 2Ax - B = x + 2$.

Прирівнюємо коефіцієнти при відповідних степенях x ліворуч і праворуч

$$\left.\begin{aligned} x\,&|\,2A = 1 \\ x^0\,&|\,2A - B = 2 \end{aligned}\right\} \quad A = \frac{1}{2},\ B = -1.\ \ y_{ч_1} = \frac{1}{2}x^2 - x.$$

Частинний розв`язок

$$y_{ч_2} = (Ax + B)e^{2x} \quad \Rightarrow y'_{ч_2} = [2Ax + (A + 2B)]e^{2x},$$

$$y''_{ч_2} = [4Ax + (4A + 4B)]e^{2x}.$$

Підставляємо в рівняння (22)

$$[4Ax + (4A + 4B)]e^{2x} - [2Ax + (A + 2B)]e^{2x} = 9xe^{2x} \quad \text{або}$$

$$2Ax + (3A + 2B) = 9x.$$

$$\left.\begin{aligned} x\,&|\,2A = 9 \\ x^0\,&|\,3A + 2B = 0 \end{aligned}\right\} \quad A = 4.5,\ B = -6.75.\ \ y_{ч_2} = (4.5x - 6.75)e^{2x}.$$

Частинний розв`язок

$$y_{ч_3} = e^x\left(A\cos x + B\sin x\right) \Rightarrow$$
$$y'_{ч_3} = e^x\left((A+B)\cos x + (B-A)\sin x\right),\ y''_{ч_3} = \left[2B\cos x - 2A\sin x\right]e^x.$$

Підставляємо в рівняння (22)

$$\left[2B\cos x - 2A\sin x - (A+B)\cos x - (B-A)\sin x\right]e^x = e^x\cos x \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (B-A)\cos x + (-A-B)\sin x = \cos x.$$

$$\left.\begin{array}{l} \cos x\,\left|B - A = 1\right. \\ \sin x\left|-A - B = 0\right. \end{array}\right\} \quad A = -\frac{1}{2},\ B = \frac{1}{2}.\ \ y_{ч_3} = \left(-\frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x\right)e^x.$$

Загальний розв`язок рівняння

$$y = y_{одн} + y_ч = C_1 + C_2e^x + \frac{1}{2}x^2 - x + (4.5 - 6.75)e^{2x} +$$
$$+\left(-\frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x\right)e^x.$$

2.2.11 Системи звичайних диференціальних рівнянь

Література: [1, р.7, п.3-4], [2, гл.9, п.7]

Розглянемо систему рівнянь першого порядку:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f_1(t,x,y) \\ \dfrac{dy}{dt} = f_2(t,x,y) \end{cases}, \qquad (24)$$

де t - незалежна змінна, x і y - шукані функції.

Система, у лівій частині якої знаходяться похідні шуканих функцій першого порядку, а праві не містять похідних, називається *нормальною*. Розв`язувати систему будемо зведенням її до рівняння другого порядку щодо однієї з невідомих функцій.

Диференціюємо по t перше рівняння системи

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{\partial f_1}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f_2}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial t}.$$

Замінюючи $\frac{dx}{dt}$ і $\frac{dy}{dt}$ на $f_1(t,x,y)$ і $f_2(t,x,y)$ отримаємо $\frac{d^2x}{dt^2}=F(t,x,y)$.

Припускаючи, що y можна виразити через t,x і $\frac{dx}{dt}$ із системи $(y=\varphi(t,x,\ dx/dt))$ отримаємо диференціальне рівняння другого порядку:

$$\frac{d^2x}{dt^2}=F\left(t,x,\frac{dx}{dt}\right).$$

Розв`язуючи це рівняння, знаходимо $x=\varepsilon(t,C_1,C_2)$. Невідому функцію y знайдемо із співвідношення $y=\varphi(t,x,\ dx/dt)=\varphi(t,C_11,C_12)$.

Зауваження. Система n диференціальних рівнянь із n невідомими функціями зводиться до диференціального рівняння n –го порядку.

Приклад 17. Знайти загальний розв`язок системи диференціальних рівнянь

$$\begin{cases}\frac{dx}{dt}=x+4y\\ \frac{dy}{dt}=2x+3y\end{cases}$$

Диференціюємо перше рівняння: $\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{\partial x}{\partial t}+4\frac{\partial y}{\partial t}$. Робимо заміну у відповідності із другим рівнянням системи: : $\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{\partial x}{\partial t}+4(2x+3y)$.

Виражаємо $y=\frac{1}{4}\left(\frac{\partial x}{\partial t}-x\right)$ з першого рівняння системи і підставляємо в останню рівність або $\frac{d^2x}{dt^2}-4\frac{\partial x}{\partial t}-5x.$

Це однорідне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами. Характеристичне рівняння

$$k^2-4k-5=0,$$

де $k_1 = -1$, $k_2 = 5$.

Розв`язок системи

$$\begin{cases} x = C_1 e^{-t} + C_2 e^{5t} \\ y = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial x}{\partial t} - x\right) = \frac{1}{4}\left(-C_1 e^{-t} + 5C_2 e^{5t} - C_1 e^{-t} - C_2 e^{5t}\right) = C_2 e^{5t} - \frac{1}{2} C_1 e^{-t}. \end{cases}$$

2.3 Питання до самоперевірки

1. Дайте означення диференціального рівняння І-го порядку.
2. Дайте означення загального та частинного розв'язку диференціального рівняння.
3. Дайте означення порядку диференціального рівняння.
4. Наведіть приклади задачі Коші для диференціального рівняння І-го порядку.
5. Сформулюйте теорему існування та єдності розв'язку задачі Коші для диференціального рівняння І-го порядку.
6. Опишіть вигляд диференціального рівняння з розділеними змінними та його розв'язок.
7. Опишіть вигляд диференціального рівняння з відокремлюваними змінними та метод його розв'язку.
8. Опишіть вигляд однорідного диференціального рівняння та метод його розв'язку.
9. Які функції називаються однорідними?
10. Опишіть вигляд лінійного диференціального рівняння та метод його розв'язку.
11. Яке диференціальне рівняння називається таким, що припускає зниження порядку? Які класи таких рівнянь ви знаєте?
12. Яка заміна змінної використовується в диференціальних рівняннях, що припускає зниження порядку?
13. Запишіть загальний вигляд лінійного диференціального рівняння n-го порядку.
14. Які розв'язки диференціальних рівнянь називаються лінійно незалежними?
15. Які розв'язки диференціальних рівнянь називаються лінійно залежними?
16. Які розв'язки диференціальних рівнянь називаються лінійно незалежними?
17. Теорема про загальний розв`язок лінійного однорідного диференціального рівняння.
18. Вигляд загального розв`язку лінійного однорідного диференціального рівняння (3 випадки).
19. Яка структура загального розв'язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння n-го порядку?
20. У чому полягає метод виключення для розв'язання лінійних систем диференціальних рівнянь І порядку?

2.4 Типові приклади контрольних завдань

Варіант №1

1. Знайти загальне рішення рівняння
$4x\,dx - 3y\,dy = 3x^2 y\,dy - 2xy^2\,dx$.

2. Знайти загальне рішення рівняння $y' = \dfrac{y^2}{x^2} + 4\dfrac{y}{x} + 2$.

3. Знайти рішення задачі Коші

$$y' - y/x = x^2,\quad y(1) = 0.$$

4. Розв'язати рівняння

a) $2x^2 y y' + y^2 = 2$; c) $y''' + 3y'' + 2y' = 1 - x^2$;

b) $y'' + y'\operatorname{tg} x = \sin 2x$; d) $y'' + 2y' = 4e^x(\sin x + \cos x)$.

5. Знайти загальне рішення системи рівнянь: $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 5x + 4y \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x + 5y \end{cases}$.

Варіант №2

1. Знайти загальне рішення рівняння $x\sqrt{1+y^2} + yy'\sqrt{1+x^2} = 0$.

2. Знайти загальне рішення рівняння $xy' = \dfrac{3y^3 + 2yx^2}{2y^2 + x^2}$.

3. Знайти рішення задачі Коші $y' - y\operatorname{ctg} x = 2x\sin x,\quad y(\pi/2) = 0$.

4. Розв'язати рівняння

a) $(1+x^2)y' + 1 + y^2 = 0$; c) $y''' - y'' = 6x^2 + 3x$;

b) $x^3 y'' + x^2 y' = 1$; d) $y'' - 4y' + 4y = -e^{2x}\sin 6x$.

5. Знайти загальне рішення системи рівнянь: $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y \\ \dfrac{dy}{dt} = -4x + y \end{cases}$.

Варіант №3

1. Знайти загальне рішення рівняння $\sqrt{4+y^2}\,dx - y\,dy = x^2 y\,dy$.

2. Знайти загальне рішення рівняння $y' = \dfrac{x+y}{x-y}$.

3. Знайти рішення задачі Коші $y' + y\cos x = \dfrac{1}{2}\sin\ 2x$, $y(0) = 0$.

4. Розв'язати рівняння

a) $x\dfrac{dx}{dt} + t = 1$; c) $y''' - y' = x^2 + x$;

b) $y'' x \ln x = y'$; d) $y'' + 2y' = -2e^x(\sin x + \cos x)$.

5. Знайти загальне рішення системи рівнянь: $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + 4y \end{cases}$.

Варіант №4

1. Знайти загальне рішення рівняння $\sqrt{3+y^2}\,dx - y\,dy = x^2 y\,dy$.

2. Знайти загальне рішення рівняння $x\,y' = \sqrt{x^2 + y^2} + y$.

3. Знайти рішення задачі Коші $y' + y\,\mathrm{tg}\,x = \cos^2 x$, $y(\pi/4) = 1/2$.

4. Розв'язати рівняння

a) $(xy^2 + y^2)dx + (x^2 - x^2 y)dy = 0$; c) $y^{\mathrm{IV}} - 3y''' + 3y'' - y' = 2x$;

b) $y\,y'' + y'^2 = 0$; d) $y'' + y = 2\cos 7x + 3\sin 7x$.

5. Знайти загальне рішення системи рівнянь: $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x + 2y \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 2y \end{cases}$.

Варіант №5

1. Знайти загальне рішення рівняння

$6x\,dx - 6y\,dy = 2x^2 y\,dy - 3xy^2\,dx$.

2. Знайти загальне рішення рівняння $2y' = \frac{y^2}{x^2} + 6\frac{y}{x} + 3.$

3. Знайти рішення задачі Коші $y' - \frac{y}{x+2} = x^2 + 2x,\ \ y(-1) = 3/2$

.4.Розв'язати рівняння

a) $y' - y = 2x - 3;$ c) $y^{IV} - y''' = 5(x+2)^2;$

b) $y'' \operatorname{tg} y = 2(y')^2;$ d) $y'' + 2y' + 5y = -\sin 2x.$

5.Знайти загальне рішення системи рівнянь: $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x - y \\ \frac{dy}{dt} = 4x - y \end{cases}.$

Варіант №6

1. Знайти загальне рішення рівняння $x\sqrt{3+y^2}\,dx + y\sqrt{2+x^2}\,dy = 0.$

2. Знайти загальне рішення рівняння $x y' = \frac{3y^3 + 4yx^2}{2y^2 + 2x^2}.$

3.Знайти рішення задачі Коші $y' - \frac{1}{x+1}y = e^x(x+1),\ \ y(0) = 1.$

4.Розв'язати рівняння

a) $x^2 y^2 y' + 1 = y;$ c) $y^{IV} - 2y''' + y'' = 2x(1-x);$

b) $xy'' - y' = e^x \cdot x^2;$ d) $y'' - 4y' + 8y = e^x(5\sin x - 3\cos x).$

5. Знайти загальне рішення системи рівнянь: $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -3x + 2y \\ \frac{dy}{dt} = -2x + y \end{cases}.$

Варіант №7

1. Знайти загальне рішення рівняння $(e^{2x} + 5)dy + ye^{2x}\,dx = 0.$

2. Знайти загальне рішення рівняння $y' = \frac{x+2y}{2x-y}.$

3. Знайти рішення задачі Коші $y' - y/x = x\sin x,\ \ y(\pi/2) = 1.$

4. Розв'язати рівняння

a) $x^2 y' = x^2 + xy + y^2$; c) $y^{IV} + 2y''' + y'' = x^2 + x - 1$;

b) $y'' + 2xy'^2 = 0$; d) $y'' + 2y' = e^x(\sin x + \cos x)$.

5.Знайти загальне рішення системи рівнянь: $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 5y \\ \dfrac{dy}{dt} = x - y \end{cases}$.

Варіант №8

1. Знайти загальне рішення рівняння $y'y\sqrt{\dfrac{1-x^2}{1-y^2}} + 1 = 0$.

2. Знайти загальне рішення рівняння $xy' = 2\sqrt{x^2 + y^2} + y$.

3. Знайти рішення задачі Коші $y' + y/x = \sin x, \quad y(\pi) = 1/\pi$.

4.Розв'язати рівняння

a) $x\sqrt{1+y^2} + y\sqrt{1+x^2} \cdot y' = 0$; c) $y^{V} - y^{IV} = 2x + 3$;

b) $(1+x^2)y^2 + 2xy' = x^3$; d) $y'' - 4y' + 4y = e^{2x} \cdot \sin x$.

5.Знайти загальне рішення системи рівнянь: $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 3y \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + y \end{cases}$.

Варіант №9

1. Знайти загальне рішення рівняння

$6x\,dx - 6y\,dy = 3x^2 y\,dy - 2xy^2\,dx$.

2. Знайти загальне рішення рівняння $3y' = \dfrac{y^2}{x^2} + 8\dfrac{y}{x} + 4$.

3.Знайти рішення задачі Коші $y' + \dfrac{y}{2x} = x^2, \quad y(1) = 1$.

4. Розв'язати рівняння

a) $(\sin x + \cos x)dy = (\sin y + \cos y)dx$; c) $3y^{IV} + y''' = 6x - 1$;

b) $y'' y^3 = 1$; d) $y'' + 6y' + 13y = e^{-2x}\cos 4x$.

5.Знайти загальне рішення системи рівнянь: $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + y \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x + 3y \end{cases}$.

Варіант №10

1. Знайти загальне рішення рівняння $x\sqrt{5+y^2}\,dx + y\sqrt{4+x^2}\,dy = 0$.

2. Знайти загальне рішення рівняння $xy' = \dfrac{3y^3 + 6yx^2}{2y^2 + 3x^2}$.

3.Знайти рішення задачі Коші $y' + \dfrac{2x}{1+x^2}y = \dfrac{2x^2}{1+x^2}$, $y(0) = \dfrac{2}{3}$.

4.Розв'язати рівняння

a) $x + xy + y'(y + xy) = 0$; c) $y^{IV} + 2y''' + y'' = 4x^2$;

b) $2yy'' = (y')^2$; d) $y'' + y = 2\cos 3x - 3\sin 3x$.

5. Знайти загальне рішення системи рівнянь: $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 2y \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x + 3y \end{cases}$.

Варіант №11

1. Знайти загальне рішення рівняння $y(4 + e^x)dy - e^x\,dx = 0$.

2. Знайти загальне рішення рівняння $y' = \dfrac{x^2 + xy - y^2}{x^2 - 2xy}$.

3.Знайти рішення задачі Коші $y' - \dfrac{2x - 5}{x^2}y = 5$, $y(2) = 4$.

4. Розв'язати рівняння

a) $xy' = y\left(1 + \ln\dfrac{y}{x}\right)$; c) $y''' + y'' = 5x^2 - 1$;

b) $ts'' + s' + t = 0$; d) $y'' + 2y' + 5y = -2\sin x$.

5.Знайти загальне рішення системи рівнянь: $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -7x + 5y \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x - 8y \end{cases}$.

Варіант №12

1. Знайти загальне рішення рівняння $\sqrt{4-x^2}\, y' + x y^2 + x = 0$.

2. Знайти загальне рішення рівняння $x y' = \sqrt{2x^2 + y^2} + y$.

3. Знайти рішення задачі Коші $y' + \dfrac{y}{x} = \dfrac{x+1}{x} e^x$, $y(1) = e$.

4.Розв'язати рівняння

a) $x y' - 3y = x^2$; c) $y^{\mathrm{IV}} + 4y''' + 4y'' = x - x^2$;

b) $2 y y'' = 1 + (y')^2$; d) $y'' - 4y' + 8y = e^x(-3\sin x + 4\cos x)$.

5.Знайти загальне рішення системи рівнянь: $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y \\ \dfrac{dy}{dt} = 6y \end{cases}$.

Варіант №13

1. Знайти загальне рішення рівняння $2x\,dx - 2y\,dy = x^2 y\,dy - 2xy^2\,dx$.

2. Знайти загальне рішення рівняння $y' = \dfrac{y^2}{x^2} + 6\dfrac{y}{x} + 6$.

3. Знайти рішення задачі Коші $y' - \dfrac{y}{x} = -2\dfrac{\ln x}{x}$, $y(1) = 1$.

4. Розв'язати рівняння

a) $x y' + 2\sqrt{xy} = y$; c) $7y''' - y'' = 12x$;

b) $y''\, tg\, x = y' + 1$; d) $y'' + 2y' = 10e^x(\sin x + \cos x)$.

5.Знайти загальне рішення системи рівнянь: $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x - 5y \\ \dfrac{dy}{dt} = -7x - 3y \end{cases}$.

Варіант №14

1. Знайти загальне рішення рівняння $x\sqrt{4+y^2}\,dx + y\sqrt{1+x^2}\,dy = 0$.

2. Знайти загальне рішення рівняння $x\,y' = \dfrac{3y^3+8yx^2}{2y^2+4x^2}$.

3.Знайти рішення задачі Коші $y' - \dfrac{y}{x} = -\dfrac{12}{x^3}$, $y(1) = 4$.

4.Розв'язати рівняння

a) $(y^2 - 2xy)dx + x^2\,dy = 0$;

c) $y''' + 3y'' + 2y' = 3x^2 + 2x$;

b) $x'' = e^{2t}$;

d) $y'' - 4y' + 4y = e^{2x} \cdot \sin 5x$.

5.Знайти загальне рішення системи рівнянь: $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -10y - x \\ \dfrac{dy}{dt} = y + x \end{cases}$.

Варіант №15

1. Знайти загальне рішення рівняння $(e^x + 8)dy - ye^x dx = 0$.

2. Знайти загальне рішення рівняння $x\,y' = \dfrac{x^2+2xy-y^2}{2x^2-2xy}$.

3.Знайти рішення задачі Коші $y' + \dfrac{2}{x}y = x^3$, $y(1) = -5/6$.

4.Розв'язати рівняння

a) $(2x+1)y' + y = x$;

c) $y''' - y' = 3x^2 - 2x + 1$;

b) $s'' = (as)^{-1/2}$;

d) $y'' + y = 2\cos 5x + 3\sin 5x$.

5. Знайти загальне рішення системи рівнянь: $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + y \end{cases}$.

2.5Перелік навчальної літератури

1. Домбровський В.А., Крижанівський І.М., Мацьків Р.С., Мигович Ф.М., Неміш В.М., Окрепкий Б.С., Хома Г.П., Шелестовська М.Я. «Вища математика» –Тернопіль: Видавництво Карп'юка, 2003 - 480с.
2. Овчинников П.Ф., Яремчук Ф.П., Михайленко В.М. «Вища математика» - К.: Вища шк., 1987.
3. Глушков О.В., Вітавецька Л.А., Хецеліус О.Ю., Чернякова Ю.Г., Дубровська Ю.В., Свинаренко А.А., Флорко Т.О., Башкарьов П.Г. Вища математика: Конспект лекцій.Ч.2. –Одеса, 2013.

Додаткова література

4. М.І. Шкіль, Т.В.Колесник, „Вища математика у трьох книгах". Київ, „Либідь", 1994, 720 с
5. Кулініч Г.Л., Максименко Л.О. Вища математика. Т.2. К.:Либідь, 1994.