

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
ОДЕСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ЕКОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ**

Хоменко І.А.

**ДИНАМІКА АТМОСФЕРИ**

**Навчальний посібник**

Одеса  
Одеський державний екологічний університет  
2022

УДК 551.5  
X 76

**Хоменко І. А.**

X 76 Динаміка атмосфери: навчальний посібник. Одеса: Одеський державний екологічний університет, 2022. 179 с.

ISBN 978-966-186-238-7

В навчальному посібнику центральними є питання з теорії гідродинамічної нестійкості, основні висновки якої дозволяють зрозуміти механізми утворення багатьох атмосферних об'єктів, які суттєво впливають на погодні умови.

Велика увага приділяється аналізу таких інваріантних величин, як абсолютний і потенціальний вихор і використанню останнього в ізентропічному аналізі.

З точки зору теорії нестійкості атмосферних течій розглядаються хвильові процеси в атмосфері і турбулентні рухи в граничному шарі атмосфери.

Навчальний посібник розрахований на магістрів, аспірантів та студентів старших курсів метеорологічних спеціальностей.

**УДК 551.5**

**Рецензенти:**

д.геогр.н., проф. Берлінський Микола Анатолійович

д.геогр.н., старший науковий співробітник УкрГМІ Тимофєєв Владислав Євгенійович

*Затверджено вченою радою Одеського державного екологічного університету  
Міністерства освіти і науки України як навчальний посібник для здобувачів вищої  
освіти за спеціальністю 103 «Науки про Землю» (протокол № 6 від 30.06.2022 р.)*

ISBN 978-966-186-238-7

© І. А. Хоменко, 2022

© Одеський державний екологічний університет, 2023

## ЗМІСТ

Перелік умовних позначень.....	5
ПЕРЕДМОВА.....	8
ВСТУП.....	9
Розділ I ОСНОВИ ДИНАМІКИ ТЕЧІЙ В АТМОСФЕРІ.....	17
1 Система рівнянь гідротермодинаміки.....	17
1.1 Інерційні і неінерційні системи відліку.....	17
1.2 Рівняння нерозривності.....	22
1.3 Ідеальні і в'язкі рідини.....	24
1.4 Масові і поверхневі сили.....	25
1.5 Рівняння руху ідеальної рідини.....	30
1.6 Рівняння руху в'язкої рідини.....	32
1.6.1 Тензор напружень.....	34
1.6.2 Різні форми запису рівняння руху в'язкої рідини.....	38
1.7 Рівняння припливу тепла.....	41
1.8 Контрольні запитання.....	46
2 Відносний, абсолютний і потенціальний вихор.....	48
2.1 Основні диференціальні характеристики поля швидкості.....	48
2.2 Відносний і абсолютний вихори.....	51
2.3 Рівняння відносного і абсолютного вихору.....	52
2.4 Потенціальний вихор.....	61
2.5 Принцип ізентропічного аналізу.....	64
2.5.1 Поняття динамічної тропопаузи.....	65
2.6 Контрольні запитання.....	71
3 Спрощені рівняння гідротермодинаміки.....	73
3.1 Методи спрощення системи рівнянь гідротермодинаміки атмосфери.....	73
3.2 Рівняння руху для вільної атмосфери.....	75
3.3 Геострофічне наближення.....	79
3.4 Термічний вітер.....	80
3.5 Рухи синоптичного масштабу при кругових ізобарах.....	84
3.6 Контрольні запитання.....	86
Розділ II ГІДРОДИНАМІЧНА І СТАТИЧНА НЕСТІЙКІСТЬ, ХВИЛЬОВІ РУХИ І АТМОСФЕРНА ТУРБУЛЕНТНІСТЬ.....	88
4 Баротропна-бароклінна нестійкість. Хвильові процеси.....	88
4.1 Баротропна нестійкість зонального потоку на $\beta$ -площині.....	88
4.2 Теорема Сквайра та Говарда.....	98
4.3 Бароклінна нестійкість на $\beta$ – площині. Хвилі Чарні та Гріна.....	108
4.4 Комбінована баротропно-бароклінна нестійкість.....	117

4.5	Конвективна нестійкість у шарі, що перебуває в спокої. Гравітаційні хвилі.....	128
4.6	Контрольні запитання.....	140
5	Нестійкість і атмосферна турбулентність.....	141
5.1	Теорія Ландау.....	141
5.2	Основні закономірності розвиненого турбулентного потоку.....	147
5.3	Осереднення гідродинамічних характеристик турбулентного потоку.....	152
5.4	Рівняння гідротермодинаміки для турбулентного потоку.....	156
5.5	"К-теорія" турбулентності і проблеми замикання.....	166
5.6	Контрольні запитання.....	172
	Перелік посилань.....	174
	Предметний покажчик.....	175

## Перелік умовних позначень

$A$  - амплітуда коливань

$C$  - фазова швидкість хвилі

$c_p = 1,007 \cdot 10^3 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}$  - питома теплоємність при сталому тиску

$c_v = 0,720 \cdot 10^3 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}$  - питома теплоємність при сталому об'ємі

$\vec{D}$  - вектор сил в'язкості (дисипативних сил)

$\vec{D}_m$  - вектор сили молекулярної в'язкості

$\vec{D}_t$  - вектор сили турбулентної в'язкості

$f$  - будь-яка метеорологічна величина

$\vec{G}$  - вектор сили тяжіння

$g = 9,8 \text{ м/с}^2$  – прискорення вільного падіння або сила тяжіння, яка віднесена до одиничної маси

$H$  - висота ізобаричної поверхні

$\vec{i}$  - одиничний вектор, спрямований уздовж осі  $x$

$i = \sqrt{-1}$  - уявна одиниця; безрозмірна координата точки на вісі  $x$

$J(A, B)$  - якобіан функцій  $A, B$

$\vec{j}$  - одиничний вектор, спрямований уздовж осі  $y$

$j$  - безрозмірна координата точки на осі  $y$

$\vec{k}$  - одиничний вектор, спрямований по вертикалі (уздовж осі  $z$ )

$k$  - безрозмірна координата точки на осі  $z$ , або хвильове число

$L$  - довжина хвилі; характерний горизонтальний масштаб

$\ell = 2\omega \sin \varphi$  - параметр Коріоліса

$\lambda$  - довгота місця

$M$  - масштаб карти

$m$  - масштабний множник

$O$  - позначення порядку величини або її похідної

$P_0 = 1000 \text{ гПа}$  – стандартний тиск на рівні моря

$P$  - тиск повітря; незалежна змінна по вертикалі в ізобаричній системі координат

$P_s$  - тиск повітря біля поверхні землі

$q$  - масова частка водяної пари;

$R = 287 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}$  - питома газова стала сухого повітря

$R_n = 462 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}$  - питома газова стала водяної пари

$R_3 = 6371$  км – середній радіус Землі

$\vec{r}$  - радіус-вектор

$r$  - відстань; коефіцієнт кореляції; узагальнена координата

$r_A$  - коефіцієнт кореляції аномальності

$S$  - безрозмірна часова координата

$T$  - температура в абсолютній шкалі (в градусах Кельвіна)

$t$  - час; температура по шкалі Цельсія

$u$  - складова швидкості вітру уздовж осі  $x$

$u_g$  - складова вектора геострофічного вітру по осі  $x$

$\vec{V}$  - тривимірний вектор швидкості

$V$  - абсолютне значення тривимірної швидкості

$\vec{V}_s$  - вектор швидкості вітру (швидкість горизонтального потоку)

$V_s$  - абсолютне значення швидкості вітру

$v$  - складова швидкості вітру уздовж осі  $y$

$v_g$  - складова вектора геострофічного вітру по осі  $y$

$w$  - складова вектору швидкості  $\vec{V}$  уздовж осі  $z$  (лінійна вертикальна швидкість)

$x$  - декартова горизонтальна координата по осі  $x$

$y$  - декартова горизонтальна координата по осі  $y$

$z$  - декартова вертикальна координата по осі  $z$

$\beta = \frac{\partial \ell}{\partial y}$  - параметр Россбі

$\gamma$  - вертикальний градієнт температури

$\gamma_a = 0.98 \cdot 10^{-2} \frac{^\circ\text{C}}{\text{м}}$  - сухоадіабатичний градієнт температури

$\gamma_{\text{ва}}$  - вологадіабатичний градієнт температури

$\nu$  - коефіцієнт молекулярної в'язкості

$\vec{\Omega}$  - вихор вектора швидкості  $\vec{V}$

$\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z$  - складові вихору швидкості по осях координат

$\vec{\omega}$  - вектор кутової швидкості обертання Землі

$\Delta_s = \nabla_s^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$  - двовимірний оператор Лапласа

$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  - тривимірний оператор Лапласа

$\nabla = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y}$  - умовний векторний диференціальний оператор (набла) –

двовимірний або плоский

$\theta = T \left( \frac{P_0}{P} \right)^{\frac{(\chi-1)}{\chi}}$  - потенціальна температура, де  $P_0 = 1000$  гПа (рівняння

Пуассона)

$\theta = \frac{\pi}{2} - \varphi$  - полярний кут – доповнення до широти  $\varphi$

$\chi = \frac{c_p}{c_v}$  - стала Кармана ( $\chi = 1.4$ )

$\rho$  - густина повітря

$\rho_n$  - густина водяної пари

$\sigma$  - циклічна (кругова) частота; середнє квадратичне відхилення

$\varphi$  - широта місця, потенціал швидкості

$\psi$  - функція течії

## ПЕРЕДМОВА

В даному навчальному посібнику викладаються окремі питання, які не передбачені навчальною програмою цієї дисципліни. Перш за все, це стосується питань з гідродинамічної нестійкості атмосферних рухів, які посідають одне з центральних місць в динамічній метеорології. В рамках теорії гідродинамічної нестійкості описується широке коло явищ, що пов'язані з перебудовою атмосферних полів і утворенням хвиль і вихорів різних масштабів.

Оскільки в багатьох закордонних дослідженнях для тривимірного аналізу атмосферних процесів широко використовується ізентропічний аналіз, в посібнику надається опис цього гідродинамічного методу.

Навчальний посібник складається з двох розділів.

В першому розділі викладається система рівнянь гідротермодинаміки, як математичний запис фізичних законів збереження: кількості руху, маси і енергії. Надається аналіз фундаментальних понять динамічної метеорології: відносного, абсолютного і потенціального вихорів, а також розглядається методика використання потенціального вихору в ізентропічному аналізі. У цьому ж розділі на основі спрощених рівнянь гідротермодинаміки надаються прості моделі атмосферних рухів вільної атмосфери градієнтного (геострофічного вітру і вітру при кругових ізобарах) і термічного вітру.

У другому розділі викладаються питання гідродинамічної нестійкості (барокліної і баротропної), наводяться деякі моделі, в яких отримані критерії реалізації різних видів нестійкості.

Розглядаються також великомасштабні хвилі, виникнення яких пов'язане з порушенням гідродинамічної стійкості атмосферних течій і які в свою чергу породжують такі атмосферні об'єкти як циклони, хмарні вали, лінії шквалів, турбулентні плями в безхмарній атмосфері.

В підрозділі, який присвячено турбулентності, питання щодо виникнення та існування турбулентних рухів в граничному шарі атмосфери викладаються також з точки зору теорії стійкості (від статичної до гідродинамічної).

Матеріал, який викладено в навчальному посібнику, може бути корисним для магістрів, аспірантів і студентів старших курсів бакалавріату як при вивченні спеціальних дисциплін, так і при виконанні магістерських та дисертаційних робіт.



## ВСТУП

Сучасна динамічна (теоретична) метеорологія базується на успіхах в різних областях науки і техніки, які були досягнені в минулому і ХХ сторіччі.

Можна вказати на такі основні фактори, що обумовили швидкий прогрес досліджень. Це, перш за все, розвиток аерологічної мережі, яка відкрила найбагатше джерело отримання нової інформації про природу атмосферних явищ, а також організація крупних комплексних експериментів, поширення синоптичних досліджень і використання ефективних методів аналізу даних (ізобаричного, ізентропічного, статистичного тощо), які дозволили виявити важливі закономірності у розвитку атмосферних процесів різних масштабів. Другий фактор – це розвиток теорії гідродинамічної нестійкості і хвильових рухів, який збагатив динамічну метеорологію багатьма досягненнями принципового характеру. Третій фактор пов'язаний з успіхами в області обчислювальної математики, зокрема з розробкою нових методів розв'язання нелінійних задач. І нарешті, четвертий фактор – це розвиток електронно-обчислювальної техніки, яка надала дослідникам необхідні засоби для гідродинамічного моделювання атмосферних процесів як у спрощеному вигляді, так і з урахуванням складних ефектів взаємодії процесів різних масштабів.

Як вже було вказано внесок в розвиток динамічної метеорології було зроблено багатьма вченими з різних областей науки і основні принципи теоретичної метеорології були закладені вченими-гідродинаміками, які перші зробили спробу описати процеси, які відбуваються у рідинах, описати аналітично.

У перетворенні «Механіки» на «Аналітичну механіку» найважливішу роль відіграли швейцарський вчений Леонард Ейлер та французький математик Жозеф Луї Лагранж. У рамках занять фізіологією Ейлер займався гідродинамічними проблемами кровообігу. Ейлер висунув припущення, що дії сил однакові, якщо сили пропорційні масам.

У 1755 році Ейлер вивів рівняння руху нев'язкої стисливої рідини в координатах Ейлера. Він надав основним поняттям ньютонівської механіки ясний вигляд і висунув на перше місце другий закон Ньютона, зробивши його стрижнем всієї механіки і надавши йому аналітичної форми. Рівняння нерозривності, що використовується в теоретичній метеорології, – це рівняння, запропоноване Ейлером. Отримані ним рівняння досі використовуються в сучасних курсах та підручниках механіки та гідродинаміки.

1769 року Ж.Л. Лагранж записав ті самі рівняння, тільки у координатах Лагранжа. Він побудував закінчену систему аналітичної механіки як теоретичної науки. «Аналітична механіка» Лагранжа з двох

розділів: статика і динаміка. Статику він визначає як науку про рівновагу сил, а динаміку – як науку про прискорювальні та уповільнювальні сили та змінних рухах, які вона має викликати. Він знайшов формулу, що виражає закон збереження енергії, та отримав диференціальні рівняння руху. Лагранж створив потужний метод теоретичної фізики, що дозволяє вирішувати велике коло завдань, зокрема і теоретичної метеорології. Лагранж стверджував, що якщо відокремити ту частину сил, яка не спрямована на рух, то ці сили задовольняють умову рівноваги. Виходячи з цього він отримав з основного рівняння статика основне рівняння для динаміки. Лагранж не тільки розробив аналітичні методи класичної механіки, а й став першим істориком механіки.

Французький математик та фізик П'єр Симон Лаплас також брав участь у реорганізації системи вищої освіти після Великої французької революції – у створенні Нормальної та Політехнічної шкіл. П'єр Симон Лаплас в 1779 – 1784 роках спільно з Лавуазьє займався теорією плавлення тіл, а в 1788 р. він опублікував працю з динамічної теорії припливів, хоча остаточно задачу було розв'язано в 1799 р. У 1809 – 1816 роках Лаплас отримав барометричну формулу визначення густини повітря залежно від висоти над рівнем моря. Його діяльність призвела до значного розвитку експериментальної науки. Підсумки діяльності Лапласа було підбито в його праці «Аналітична теорія ймовірностей». На думку сучасних учених, Лаплас був першим, хто звернув увагу на можливість існування «чорних дірок».

У 1822 році французький механік та інженер М. Нав'є отримав рівняння руху для в'язкої стисливої рідини. Його система рівнянь містила 3 рівняння з 10 невідомими і була незамкненою.

У 1829 році французький фізик та інженер Гюстав Гаспар Коріоліс довів, що при складному русі точки (обертальному) виникає додаткове прискорення, яке викликає сила інерції, обумовлена впливом обертання системи, що рухається, на відносний рух точки. Його роботи відіграли велику роль у створенні теорії динаміки машин, він незалежно від Ж. Понселе в 1826 ввів поняття «робота».

Істотний внесок у розвиток термодинаміки атмосфери зробив французький математик, механік і фізик С. Пуассон. У 1823 році він запропонував рівняння адіабати, а в 1836 році він встановив відхиляючий вплив сили Коріоліса на рух в атмосфері. Однак її незначна величина дала привід довгий час вважати прискорення Коріоліса другорядним фактором. Спочатку метеорологи не звернули уваги на висновки Коріоліса і Пуассона, але в 1856 У. Феррель вдруге відкрив наявність відхиляючої сили обертання Землі.

На початку 19 століття серед метеорологів посилено поширюється переконання в тому, що всі атмосферні явища можуть бути описані за допомогою системи математичних рівнянь. Ця думка висловлювалася

французьким математиком Жан Батистом Фур'є (1768 – 1830 рр.) та докладно вивчалася німецьким фізиком, фізіологом, філософом, а за освітою – лікарем, Германом Людвігом Фердинандом Гельмгольцем. У знаменитій роботі «Про збереження сили» у 1847 р. Гельмгольц вперше дав математичне трактування закону збереження енергії та вказав на спільність його характеру. Він створив теорію вихрового руху ідеальних рідин, а останніми роками серйозно займався питаннями термодинаміки. Він побудував першу теоретичну модель стаціонарної зональної циркуляції, довівши при цьому існування поверхонь розриву між повітряними масами різного походження. Поняття вихору саме в нього запозичив Л. Маркі та ввів його в динамічну метеорологію. Фур'є в своїй роботі "Аналітична теорія тепла" виклав математичну теорію теплопровідності, яка дозволила йому вивести диференціальне рівняння теплопровідності. Він розробив методи його інтегрування за заданих крайових умов деяких окремих випадків.

Англійський фізик і математик, член Лондонського Королівського товариства, професор Кембриджського університету Джордж Г. Стокс у 1845 р. розробив теорію в'язких рідин. Він висловив гіпотезу про зв'язок між силами в'язких напружень і похідними від швидкостей деформації об'єму та розробив математичну теорію руху в'язкої рідини. Стокс визначив систему рівнянь, де представив в'язке напруження за допомогою закону «двох третин», яким й досі користуються метеорологи. Вона зветься системи рівнянь гідротермодинаміки Нав'є – Стокса.

У 1858 – 1860 рр. американський вчений У. Феррель здійснив спробу побудови математичної теорії загальної циркуляції та виклав конвективну теорію циклонів. Саме ці роботи Ферреля ознаменували виникнення нової галузі метеорологічної науки – динамічної метеорології. У 1887 р. він опублікував працю: «Нові успіхи метеорології». А твір французького вченого і військового інженера Саді Карно, старшого сина знаменитого «організатора перемоги» французької революції Лазаря Карно, «Роздуми про рушійну силу вогню» (1824) стало початком термодинаміки. Карно ввів у цю науку метод циклів. У сучасних підручниках цикл Карно супроводжується діаграмою процесу та розрахунками для ідеального газу, які були дані у 1834 р. Клайпероном.

Австрійський геофізик Маргулес (1856 – 1920 рр.) сформулював умови динамічної стійкості поверхонь розриву, дав висновок формули зміни градієнтного вітру залежно від горизонтального градієнта температури, досліджував утворення інверсій осідання та рівновагу повітряних шарів із різним вмістом водяної пари.

Перший етап у розвитку динамічної метеорології можна вважати завершеним в період Першої світової 1914 – 1918 гг. Підсумком його можна вважати підручник австрійського вченого Франца Екснера

«Динамічна метеорологія», виданий 1917 р., в якому вперше було відображено проблеми турбулентності та поверхонь розділу.

Новий етап розпочався у першій половині 20-го століття роботами норвезького вченого В. Б'єркнеса та його учнів, а також видатного радянського математика А.А. Фрідмана та оригінального англійського метеоролога, економіста та статистика Л.Ф. Річардсон. Динамічна метеорологія остаточно оформилася в самостійну науку, яка згодом дала поштовх для створення нової науки, яка докладно вивчає принципи вирішення системи гідродинамічних рівнянь чисельними методами з метою прогнозування погоди.

У першій половині двадцятого століття теоретична метеорологія набуває прикладного характеру, що, зрештою, призвело до формування такого найважливішого напрямку метеорологічної науки, як чисельні прогнози та чисельне моделювання погоди за допомогою системи рівнянь гідротермодинаміки атмосфери. Повна система рівнянь була відома ще в ХІХ столітті і в 1858 р. вивчалася Гельмгольцем як можливий варіант рішення. Але неможливо отримати розв'язок цих рівнянь, оскільки необхідно розв'язати загальну просторову задачу з граничними та початковими умовами для системи з 6 – 8 нелінійних рівнянь у частинних похідних.

Ідея побудови прогнозів погоди за допомогою цих рівнянь була сформульована главою норвезької (бергенської) школи метеорологів – Вільгельмом Б'єркнесом – на початку ХХ століття, а першу спробу розрахувати практично чисельний прогноз було зроблено під час Першої світової війни Л. Річардсоном. Ґрунтуючись на теоретичних положеннях відомого німецького математика, фізика та лікаря Г. Гельмгольца, В. Б'єркнеса, Г. Сульберга, К. Годске, Я. Б'єркнес-син та їх співробітники провели дослідження теоретичних математичних моделей з метою класифікації атмосферних рухів. Вони зіставили ці рухи з розв'язками наведених до лінійного виду рівнянь. А в якості початкових даних було взято значення метеорологічних величин, отримані при спостереженнях. Незважаючи навіть на те, що вони не знайшли задовільного формулювання проблеми передбачення погоди, внесок цих вчених у розуміння рухів, які відбуваються в атмосфері, був дуже важливий: поворотним пунктом у розвитку динамічної метеорології було усвідомлення того, що рівняння гідротермодинаміки можна розв'язати.

Вільгельма Фрідмана Корена Б'єркнеса найчастіше називають фундатором наукової школи в метеорології. У 1897 році В. Б'єркнес започаткував такий найважливіший напрям, як фізична гідродинаміка атмосфери як стисливого середовища, в якому розподіл густини є функцією як тиску, так і температури. Він є автором теореми про прискорення циркуляції в рідинах та газах. Ця теорема говорить: «Якщо рідина ідеальна і масові сили консервативні, то похідна за часом від

циркуляції швидкості за яким-небудь рідким контуром дорівнює різниці позитивних і негативних одиничних ізобаро-ізостеричних трубок, що перетинають контур». Тобто перетин ізобаро-ізостеричних поверхонь є причиною утворення вихорів. Ця теорема допомогла розібратися в циркуляційних рухах в атмосфері та океані, пояснити механізм морських та океанічних течій залежно від солоності.

В. Б'єркнес був основоположником хвильової теорії циклогенезу, теорії полярного фронту та запропонував спосіб прогнозування погоди. Під його керівництвом у 1917 році було створено службу погоди у Норвегії. А його син, Я. Б'єркнес, був одним із основоположників вчення про атмосферні фронти та автором праць про еволюцію циклонів та їх роль у загальній циркуляції атмосфери. Першим запропонував теоретичну модель загальної циркуляції поверхонь розриву, тобто атмосферних фронтів, Г. Гельмгольц.

Німецький лікар Майєр у 1841 р. стверджував, що «рух, теплота і, як ми маємо намір показати надалі, електрика є явища, які можуть бути зведені до однієї сили, які вимірюються один одним і переходять один в одного за певними законами». «Тепло, що утворилося, пропорційно зниклому руху». Це цілком певна і ясна формулювання закону збереження та перетворення сили, тобто енергії. Англійський фізик Джоуль закон про збереження та перетворення енергії відкрив самостійно незалежно від Майєра.

Зупинимося на яскравому представнику радянської теоретичної фізики – Олександрі Олександровичі Фрідмані.

Діапазон наукових інтересів Фрідмана був дуже широким. З початку наукової діяльності його цікавили основні питання теоретичної метеорології, теоретичної геофізики: пояснення існування верхньої інверсії атмосфери, теорія атмосферних вихорів та рвучкості вітру, теорія розриву метеорологічних величин, теорія атмосферної турбулентності. А на початку своєї наукової діяльності він склав інструкцію для обробки підйомів змійкових метеорографів.

Фрідман залучав своїх співробітників для спільної роботи із закордонними вченими та працював сам. Він брав активну участь у прийомах німецького фізика П. Ерєнфєста, голландського гідромеханіка І. Бюрґєрса, італійського дослідника Т. Леві-Чівіта. Він виступав на I Міжнародному конгресі прикладної механіки, де доповідав про спільну роботу з Келлером, роботу Кочина та інших співробітників. Зустрічі Фрідмана з іншими вченими часто виливались у спільну роботу. Наприклад, робота з німецьким колегою Т. Гєссєльберґом дала позитивний результат і вилилася в теорію про порядок метеорологічних величин та їх похідних та теорію подібності.

У 1922 р. на роботу до Головної фізичної обсерваторії, яка у 1924 р. була перейменована на Головну геофізичну обсерваторію (ГГО), до А.А. Фрідману надійшов Микола Євграфович Кочин. В обсерваторії тоді займалися вивченням фізики земної кулі, або геофізики, і особлива увага приділялася вивченню атмосфери. Для з'ясування фізичних законів, які у атмосфері, потрібно мати великий матеріал спостережень за метеорологічними величинами і вміти застосовувати до них суворіші методи обчислювальної математики.

1945 року Джоном фон Нейманом в США було сконструйовано перший комп'ютер «ЕНІАК». На ньому було реалізовано першу квазігеострофічну модель для баротропної атмосфери. І незабаром було опубліковано першу статтю (1950 р.) про вирішення прогностичного завдання з використанням комп'ютера. Було запропоновано модель короткострокового прогнозу в середній тропосфері, надано метод розв'язання задачі та наведено перші дуже обнадійливі результати розрахунків на комп'ютері.

Створення гідродинамічної теорії короткострокового прогнозу метеорологічних полів з'явилося найвидатнішим досягненням фізики атмосфери у післявоєнні роки. Очевидно, що розвиток динамічної метеорології, а особливо гідродинамічних методів прогнозу погоди, був би неможливим без швидкодійної обчислювальної техніки.

Удосконалення обчислювальної техніки і розробка чисельних методів розв'язання системи рівнянь гідротермодинаміки сприяли подальшому розвитку динамічної метеорології і нової області метеорології – гідродинамічним методам прогнозу погоди. Сучасні моделі, які використовуються в оперативній практиці служби погоди, ґрунтуються на повній системі рівнянь гідротермодинаміки. В розробку цих моделей великий внесок зробили Є.Н.Блінова, О.М. Обухов, С.Л.Белоусов, Г.І. Марчук, Л.В. Беркович та багато інших вчених (в СРСР), а також Н.Філліпс, Дж. Чарні, К.Хінкельман та інші (за кордоном).

### *Гіпотези, які приймаються при вивченні атмосфери. Предмет динамічної метеорології*

При описі та аналізі атмосферних процесів та явищ, а також при побудові моделей руху рідин та газів беруться до уваги деякі гіпотези. Вивчаючи атмосферу, можна в деяких випадках, по-перше, враховувати її молекулярну структуру і, по-друге, нехтувати нею.

1. Атмосфера є сумішшю газів, що підпорядковуються закону Дальтона. В ньому стверджується, що в суміші ідеальних газів при постійній температурі  $T$  тиск суміші  $P$  дорівнює сумі парціальних тисків газів, що складають цю суміш. І тут атмосферу представляють як систему, що складається з великої кількості молекул, які знаходяться у

безперервному хаотичному русі. *Парціальний тиск* - це та частина загального тиску, яка обумовлена конкретним газом або водяною парою.

2. Атмосфера – це суцільна середовище, тобто при застосуванні фізичних законів до атмосфері приймається гіпотеза суцільності. У механіці рідин та газів вивчається поведінка речовини в макроскопічному масштабі, досить великому порівняно з відстаннями між молекулами. Беруться до уваги наступні положення гіпотези суцільності, в яких атмосфера розглядається як сукупність елементарних об'ємів:

- 1) макроскопічна поведінка рідин і газів вважається однаковою у всіх напрямках – атмосфера вважається ідеально безперервною, тобто суцільною;
- 2) фізичні величини всередині розглядуваного елементарного об'єму вважаються рівномірно розподіленими за цим об'ємом та рівними центральному значенню. Гіпотеза суцільності дозволяє вважати ці центральні значення метеорологічних величин безперервними функціями координат та часу.

Цей факт надає можливість сформулювати рівняння, що описують зміни цих величин у просторі та часі за допомогою похідних, оскільки безперервні функції можна диференціювати. З іншого боку, гіпотеза суцільності дає можливість застосовувати осереднення метеорологічних величин за елементарними об'ємами, які містять досить велику кількість молекул, але все ж таки малі порівняно з масштабом всього потоку в цілому. Метеорологічна величина визначається як середня за елементарним об'ємом. Елементарний об'єм має задовольняти наступним вимогам:

1. Лінійні розміри елементарного об'єму мають бути більшими порівняно з довжиною вільного пробігу молекул;
2. Лінійні розміри мають бути малими порівняно з характерним масштабом явища, що розглядається.

Перша умова необхідна для того, щоб усунути флуктуацію молекулярних рухів, а друга дозволяє знехтувати змінами середніх величин у межах виділеного об'єму.

Гіпотеза суцільності порушується на великих висотах, коли довжина вільного пробігу молекул завелика. Оскільки атмосферні рухи характеризуються широким діапазоном масштабів рухів, то виконання гіпотези суцільності залежить як від висоти, так і від специфіки розглядуваного явища.

3. З ідеальної безперервності та рівномірної розподіленості її характеристик випливає, що атмосферу можна вважати однорідним середовищем. У такому середовищі водяна пара також розподілена однорідно, і виконуються рівняння стану для сухого та вологого повітря.

4. Атмосфера є легкокорухливим середовищем. Основна властивість, яка відрізняє рідини та гази від твердих тіл, полягає в тому, що ці речовини

не здатні стримувати напруження зсуву. Їх легко можна деформувати, оскільки будь-які дотичні зусилля викликають відносне ковзання частинок відносно одне одного. Мірою легкості є в'язкість.

5. Атмосфера є в'язким середовищем. Тобто середовищем, у якому виникають сили внутрішнього тертя, що характеризуються коефіцієнтами в'язкості.

6. Атмосфера являє собою стисливе середовище. Диференційоване нагрівання підстильної поверхні викликає зміну теплового стану повітря, що призводить до зміни щільності та тиску на висотах. Швидкість нагрівання та охолодження повітря залежить від широти місця, властивостей підстильної поверхні, пори року. Завдяки стисливості змінюється горизонтальний розподіл тиску на висотах і виникає вітер. Таким чином, стисливість атмосфери призводить до виникнення сили баричного градієнта.

Динамічна метеорологія, використовуючи методи теоретичного аналізу рівнянь гідротермодинаміки атмосфери, вивчає атмосферні рухи разом з термодинамічними процесами в атмосфері, розкриває основні закономірності погоди та клімату та використовує їх для вирішення практичних завдань, найважливішими з яких є погоду та клімат.

Задачами динамічної метеорології є:

- Математичний опис законів динаміки атмосфери;
- Виявлення основних факторів, які обумовлюють зміну в часі та просторі метеорологічних величин на основі використання різних методів розв'язання системи рівнянь;
- Побудова на основі рівнянь гідротермодинаміки та теорії випромінювання теоретичних моделей процесів тепло-, волого-, енерго- та масообміну, що відбуваються в атмосфері;
- Експериментальна перевірка цих моделей.



# РОЗДІЛ І ОСНОВИ ДИНАМІКИ ТЕЧІЙ В АТМОСФЕРІ

## 1 Система рівнянь гідротермодинаміки

### 1.1 Інерційні і неінерційні системи відліку

Інерційними системами відліку називаються ті системи, по відношенню до яких виконується закон інерції. З вельми великою мірою точності можна вважати, що такого роду системою є геліоцентрична система відліку, початок координат якої співпадає з центром інерції сонячної системи, а осі проведені в напрямі віддалених зірок.

Будь-яка система відліку, що покоїться або рухається рівномірно і прямолінійно відносно якої-небудь інерційної системи, сама є інерційною. Навпаки, всяка система рухома прискорено по відношенню до інерційної системи, є неінерційною.

Система відліку, жорстко пов'язана з Землею (геоцентрична система відліку), неінерційна, головним чином внаслідок добового обертання Землі.

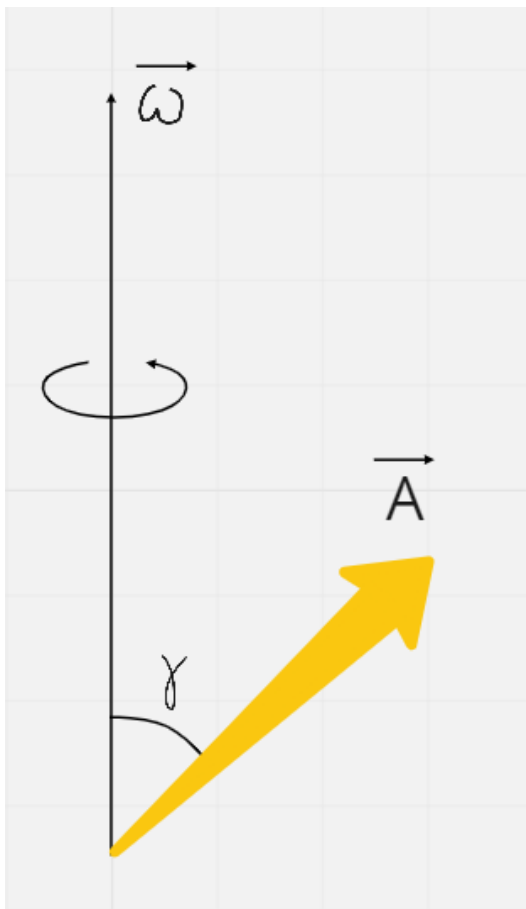


Рисунок 1.1 – Вектор постійної довжини  $\vec{A}$ , напрямлений під кутом  $\gamma$  до осі обертання

Природно, що прискорення частинки в інерційній і неінерційній системах відліку будуть відрізнятися. Наприклад, для спостерігача у системі відліку, що обертається, предмети, нерухомі в інерційній системі, будуть здаватися такими, що обертаються і через кривизну їх видимих траєкторій такими, що прискорюються.

Розглянемо вектор  $\vec{A}$ , який має постійну величину і обертається з кутовою швидкістю  $\vec{\omega}$  (рис.1.1). Вектор  $\vec{\omega}$  направлений по осі обертання так, що для спостерігача, який дивиться з кінця  $\vec{\omega}$ , поворот відбувається проти годинникової стрілки.

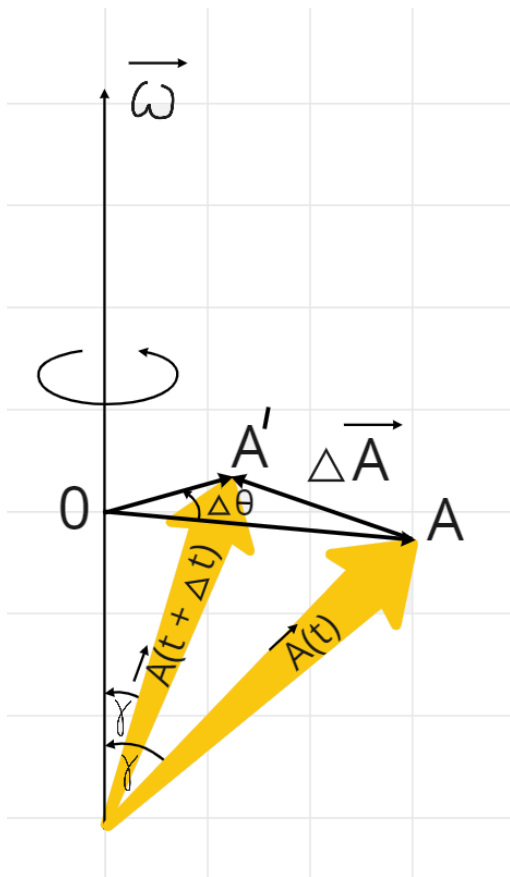


Рисунок 1.2 – Вектор  $\vec{A}$  в момент часу  $t$  і  $t + \Delta t$  та його нескінченно малий приріст  $\Delta\vec{A}$

Нехай кут між  $\vec{A}$  і  $\vec{\omega}$  дорівнює  $\gamma$ .

За малий час  $\Delta t$  вектор  $\vec{A}$  повернеться на кут  $\Delta\theta = \omega \Delta t$ , де  $\omega$  - величина кутової швидкості (рис.1.2). Из трикутника  $0AA'$ , який лежить в площині, перпендикулярній до осі обертання, внаслідок малості кута  $\Delta\theta$  виходить, що  $\Delta A = A \cdot \sin\gamma \cdot \Delta\theta$ .

Тоді очевидно, що мале змінювання вектора  $\vec{A}$  буде дорівнювати

$$\vec{A}(t + \Delta t) - \vec{A}(t) \equiv \Delta\vec{A} = \vec{n} \cdot A \cdot \sin\gamma \cdot \Delta\theta, \quad (1.1)$$

де  $\vec{n}$  - одиничний вектор в напрямку зміни  $\vec{A}$ , який повинен бути перпендикулярним до вектора  $\vec{A}$  (так як довжина  $\vec{A}$  фіксована), а також до вектора  $\vec{\omega}$  (по визначенню обертання).

Таким чином,

$$\vec{n} = \frac{\vec{\omega} \times \vec{A}}{|\vec{\omega} \times \vec{A}|}. \quad (1.2)$$

В межі при  $\Delta t \rightarrow 0$  одержимо

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{A}}{\Delta t} = \frac{d\vec{A}}{dt} = A \sin\gamma \frac{d\theta}{dt} \cdot \frac{\vec{\omega} \times \vec{A}}{|\vec{\omega} \times \vec{A}|}. \quad (1.3)$$

Оскільки

$$|\vec{\omega} \times \vec{A}| = \omega \cdot A \cdot \sin\gamma \quad \text{і} \quad \frac{d\theta}{dt} = \omega,$$

то остаточно для вектора  $\vec{A}$  фіксованої величини отримуємо формулу

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{A}. \quad (1.4)$$

Таким чином, для спостерігача, який знаходиться в обертовій системі відліку, вектор  $\vec{A}$  не змінюється з часом, тоді як для спостерігача в системі, що не обертається, зміна  $\vec{A}$  визначається по формулі (1.4).

Отже, їх сприйняття швидкості зміни  $\vec{A}$  істотно розрізняється, хоч сприйняття самого вектора залишається одним і тим же.

Помітимо, однак, що оскільки

$$\frac{dA^2}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{A} \cdot \vec{A}) = 2\vec{A} \cdot \frac{d\vec{A}}{dt} = 2\vec{A} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{A}) = 0, \quad (1.5)$$

то для обох спостерігачів модуль вектора  $\vec{A}$  не змінюється з часом.

Перетворення в (1.5) виконані з використанням очевидного співвідношення  $A^2 = \vec{A} \cdot \vec{A}$ , формули (1.4) і того факту, що вектори  $\vec{A}$  і  $\vec{\omega} \times \vec{A}$  взаємно перпендикулярні (по визначенню векторного добутку векторів).

Розглянемо тепер довільний вектор  $\vec{B}$  і систему координат, яка обертається з кутовою швидкістю  $\vec{\omega}$ .

Для простоти нехай система координат буде декартовою з одиничними векторами  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ . Вектор  $\vec{B}$  в цій системі може бути представленим у вигляді

$$\vec{B} = B_x \vec{i} + B_y \vec{j} + B_z \vec{k}, \quad (1.6)$$

де  $B_x, B_y, B_z$  - компоненти вектора  $\vec{B}$  (проекції  $\vec{B}$  на координатні осі  $x, y, z$ ).

Швидкість зміни вектора  $\vec{B}$  з часом для спостерігача у системі відліку що обертається, є

$$\left( \frac{d\vec{B}}{dt} \right)_R = \frac{dB_x}{dt} \vec{i} + \frac{dB_y}{dt} \vec{j} + \frac{dB_z}{dt} \vec{k}, \quad (1.7)$$

Оскільки одиничні вектори в цій системі постійні по величині і напрямку (індекс  $R$  в формулі (1.7) буде нагадувати, що вона справедлива для спостерігача, що обертається). З іншого боку, для спостерігача, який не обертається, компоненти вектору  $\vec{B}$  та одиничні вектори міняються з часом.

Швидкості зміни скалярних компонент  $B_x, B_y, B_z$  однакові для обох спостерігачів, так що

$$\left(\frac{d\vec{B}}{dt}\right)_I = \frac{dB_x}{dt}\vec{i} + \frac{dB_y}{dt}\vec{j} + \frac{dB_z}{dt}\vec{k} + B_x\frac{d\vec{i}}{dt} + B_y\frac{d\vec{j}}{dt} + B_z\frac{d\vec{k}}{dt}, \quad (1.8)$$

де індекс  $I$  означає швидкість зміни для спостерігача в необертовій інерційній системі відліку. Зазначимо, що швидкість зміни з часом будь-якої скалярної величини в рухомому об'ємі, наприклад температури, одна і та ж в системах відліку, необерттових і обертових. Застосування (1.4) до кожного з трьох одиничних векторів дає

$$\begin{aligned} B_x\frac{d\vec{i}}{dt} + B_y\frac{d\vec{j}}{dt} + B_z\frac{d\vec{k}}{dt} &= B_x \cdot \vec{\omega} \times \vec{i} + B_y \cdot \vec{\omega} \times \vec{j} + B_z \cdot \vec{\omega} \times \vec{k} = \\ &= \vec{\omega} \times (B_x\vec{i} + B_y\vec{j} + B_z\vec{k}) = \vec{\omega} \times \vec{B}, \end{aligned} \quad (1.9)$$

так що формула (1.9) прийме вигляд

$$\left(\frac{d\vec{B}}{dt}\right)_I = \left(\frac{d\vec{B}}{dt}\right)_R + \vec{\omega} \times \vec{B}. \quad (1.10)$$

Таким чином, швидкість зміни з часом одного і того ж вектора  $\vec{B}$  сприймається по різному в системах відліку обертових і необерттових.

Для того, щоб описати швидкість зміни  $\vec{B}$  в необерттовій інерційній системі відліку, треба до швидкості зміни, яка спостерігається в обертовій системі відліку додати член  $\vec{\omega} \times \vec{B}$ .

Треба вказати, що для спостерігачів в обох системах відліку швидкість зміни з часом вектора  $\vec{\omega}$  буде одна і та ж, тому що векторний добуток  $\vec{\omega} \times \vec{\omega}$  тотожно дорівнює нулю. Тому формула (1.10) застосовна і в тих випадках, коли вектор  $\vec{\omega}$  міняє свою величину і напрямок.

Нехай  $\vec{r}$  - радіус-вектор довільної рідкої частинки.

Згідно з формулою (1.10) маємо

$$\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_I = \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_R + \vec{\omega} \times \vec{r}, \quad (1.11)$$

так що швидкість, яка спостерігається в необерттовій системі відліку  $\vec{V}_I = \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_I$ , дорівнює швидкості  $\vec{V}_R = \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_R$  відносно обертової системи що плюс додаткова лінійна швидкість  $\vec{\omega} \times \vec{r}$ , яка надається рідкій частинці при її обертанні разом з системою відліку.

Це можна записати таким чином:

$$\vec{V}_I = \vec{V}_R + \vec{\omega} \times \vec{r}, \quad (1.12)$$

де  $\vec{V}_R$  - відносна швидкість руху.

Застосовуючи (1.10) до  $\vec{V}_I$ , одержимо

$$\left( \frac{d\vec{V}_I}{dt} \right)_I = \left( \frac{d\vec{V}_I}{dt} \right)_R + \vec{\omega} \times \vec{V}_I. \quad (1.13)$$

Наша мета, однак, полягає в тому, щоб описати рух, використовуючи лише величини, що спостерігаються у обертовій системі відліку. Пам'ятаючи про це, перепишемо (1.13), виключивши з нього  $\vec{V}_I$  за допомогою (1.12).

Тоді отримаємо

$$\begin{aligned} \left( \frac{d\vec{V}_I}{dt} \right)_I &= \left( \frac{d\vec{V}_R}{dt} \right)_R + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \left( \frac{d\vec{r}}{dt} \right)_R + \vec{\omega} \times (\vec{V}_R + \vec{\omega} \times \vec{r}) = \\ &= \left( \frac{d\vec{V}_R}{dt} \right)_R + 2\vec{\omega} \times \vec{V}_R + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Різниця між прискореннями, що спостерігаються в необертовій і обертовій системах відліку, дорівнює сумі трьох членів в правій частині виразу (1.14):

$$\left( \frac{d\vec{V}_I}{dt} \right)_I - \left( \frac{d\vec{V}_R}{dt} \right)_R = 2\vec{\omega} \times \vec{V}_R + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}. \quad (1.15)$$

Величини  $2\vec{\omega} \times \vec{V}_R$  прискорення Коріоліса,  $\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$  доцентрове прискорення і  $\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}$  прискорення, яке зумовлене змінами самої швидкості обертання  $\vec{\omega}$ .

Останнє з цих доданків для більшості атмосферних, океанічних і гідрологічних задач звичайно не враховується, оскільки воно мале в порівнянні з іншими членами формули (1.15).

Для наших цілей вектор  $\vec{\omega}$  можна вважати постійним і прийняти:

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} = 0.$$

Доцентрове прискорення може бути виражено через вектор  $\vec{r}_1$ , перпендикулярний до осі обертання і направлений від неї до рідкої частинки. Оскільки

$$\vec{\omega} \times \vec{r} = \vec{\omega} \times \vec{r}_1,$$

знаходимо

$$\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = (\vec{\omega} \cdot \vec{r}_1)\vec{\omega} - (\vec{\omega} \cdot \vec{\omega})\vec{r}_1 = -\omega^2 \vec{r}_1, \quad (1.16)$$

де використовувалася формула для подвійного векторного добутку.

Прискорення Кориоліса  $2\vec{\omega} \times \vec{V}_R$  явно залежить від швидкості рідини  $\vec{V}_R$  і, як буде показано нижче, приводить до істотних змін структури рівняння руху в рівномірно обертовій системі відліку.

## 1.2 Рівняння нерозривності

Величини, що характеризують стан рухомої повітря, є функціями координат  $x, y, z$  і часу  $t$ . При цьому вектор швидкості елементарного об'єму рідини  $\vec{V}(x, y, z, t)$  відноситься до даної точки простору і моменту часу  $t$ . Те ж відноситься і до величин густини  $\rho$  і тиску  $p$ .

Виведення основних гідродинамічних рівнянь почнемо з рівняння нерозривності, яке виражає закон збереження маси. Розглянемо деякий об'єм простору  $\tau_0$ .

Маса рідини в цьому об'ємі є  $\int_{\tau_0} \rho d\tau$ .

Через елемент  $ds$  поверхні, яка обмежує розглянутий об'єм, в одиницю часу протікає кількість рідини, що дорівнює  $\rho \vec{V} \cdot \vec{n} ds$ , де  $\vec{n}$  – одиничний вектор, направлений по зовнішній нормалі до елемента поверхні. Тоді  $\rho \vec{V} \cdot \vec{n} ds$  додатне, якщо рідина витікає із об'єму, і від'ємне, якщо рідина втікає в нього.

Повна кількість рідини, що протікає за одиницю часу через поверхню  $S_0$ , яка обмежує об'єм  $\tau_0$ , дорівнює

$$\int_{S_0} \rho \vec{V} \cdot \vec{n} ds. \quad (1.17)$$

З іншого боку, зміна маси рідини в об'ємі  $\tau_0$  в одиницю часу є

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\tau_0} \rho d\tau. \quad (1.18)$$

Оскільки ця зміна маси рідини однозначно визначається припливом або стоком її через поверхню, то величини (1.17) і (1.18) рівні між собою і протилежні за знаком:

$$\int_{S_0} \rho \vec{V} \cdot \vec{n} ds = - \frac{\partial}{\partial t} \int_{\tau_0} \rho d\tau \quad (1.19)$$

Замінюючи в (1.19) інтеграл по поверхні інтегралом по об'єму згідно з формулою Остроградського – Гауса

$$\int_{\tau_0} \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \vec{V} \right) d\tau = 0. \quad (1.20)$$

Оскільки рівність (1.20) виконується для будь-якого об'єму, то підінтегральний вираз дорівнює нулю. Таким чином отримуємо рівняння нерозривності

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \vec{V} = 0. \quad (1.21)$$

Вектор  $\vec{\Pi}_\rho = \rho \vec{V}$  називають щільністю потоку рідини.

Його напрям співпадає з напрямом руху рідини, а абсолютна величина визначає кількість рідини, що протікає в одиницю часу через одиничну площинку, перпендикулярну до вектору швидкості. Зміна густини з часом в фіксованій точці простору однозначно визначається дивергенцією щільності потоку рідини.

Рівняння нерозривності (1.21) можна переписати в іншому вигляді, якщо розкрити  $\operatorname{div} \rho \vec{V}$ .

Дійсно,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{V} \cdot \operatorname{grad} \rho + \rho \operatorname{div} \vec{V} = 0$$

Сума перших двох доданків дає повну похідну  $\frac{d\rho}{dt}$ .

Тому

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \vec{V} = 0. \quad (1.22)$$

Звідси виходить ще одне визначення тривимірної дивергенції

$$\operatorname{div} \vec{V} = -\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt}, \quad (1.23)$$

як відносна зміна густини за одиницю часу в рухомому об'ємі.

Для нестисливої рідини ( $\rho = \text{const}$ ) отримаємо

$$\operatorname{div} \vec{V} = 0, \quad (1.24)$$

а для стаціонарного поля густини

$$\operatorname{div} \rho \vec{V} = 0. \quad (1.25)$$

Помітимо, що згідно з (1.19) для нестисливої рідини потік швидкості

$$\int_{S_0} \vec{V} \cdot \vec{n} ds = 0, \quad (1.26)$$

а для стаціонарної щільності потік кількості руху

$$\int_{S_0} \rho \vec{V} \cdot \vec{n} ds = 0 \quad (1.27)$$

через будь-яку нерухому замкнену поверхню дорівнює нулю.

### 1.3 Ідеальні і в'язкі рідини

При ковзанні одного елементарного об'єму по іншому спостерігається опір з боку рідини. Властивість рідини чинити опір ковзанню частинок називається внутрішнім тертям або в'язкістю. Хоч всі реальні рідини володіють в'язкістю, в гідромеханіці вводиться поняття ідеальної рідини, в якій ковзання елементарних об'ємів один відносно одного не зустрічає опору з боку рідини. Використання поняття ідеальної рідини дозволяє отримати досить просто цілий ряд фундаментальних закономірностей, застосовних до розв'язання багатьох прикладних задач. Природно, що відмінність між ідеальною і в'язкою рідинами виявляється тільки під час руху.

Сконструюємо рівняння руху для ідеальної і в'язкої рідини.

Рівняння руху є математичним виразом другого закону Ньютона для матеріального об'ємного елемента або матеріальної точки : похідна по часу від імпульсу (кількості руху)  $m\vec{V}$  дорівнює сумі всіх діючих сил  $\vec{F}$



$$\left[ \frac{d}{dt} (m\vec{V}_I) \right]_I = \vec{F}. \quad (1.28)$$

Для одиничної маси

$$\left( \frac{d\vec{V}_I}{dt} \right)_I = \vec{F}, \quad (1.29)$$

т.т. прискорення матеріальної точки прямо пропорційне діючій на неї результуючій силі  $\vec{F}$  і співпадає з нею по напрямку. Тут індекс  $I$  означає, що швидкість і прискорення, відносяться до інерційної системи відліку.

Для отримання рівняння відносного руху матеріальної точки в системі відліку, жорстко пов'язаній з обертовою Землею, підставимо (1.14) в (1.29).

Тоді ліва частина (1.29) – сума прискорень  $\left( \frac{dV_R}{dt} \right)_R$ , Кориоліса і доцентрового. Опускаючи індекс  $R$ , оскільки в подальшому буде розглядатися рух тільки відносно Землі, отримаємо рівняння руху в неінерційній системі.

Якщо тепер прискорення Кориоліса і доцентрове прискорення перенести в праву частину цього рівняння, то їх можна тлумачити як сили, які будуть здаватися спостерігачеві у обертовій системі відліку деякими додатковими силами (сила інерції) – силою Кориоліса  $\vec{F}_K = -2\vec{\omega} \times \vec{V}$  і відцентровою силою  $\vec{C} = -\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$ , що віднесені до одиниці маси і відрізняються від відповідних прискорень тільки знаком

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{F} + \vec{F}_K + \vec{C} \quad (1.30)$$

#### 1.4 Масові та поверхневі сили

У динамічній метеорології використовуються рівняння руху суцільного середовища для вивчення атмосферних і океанічних рухів. При цьому розрізняють два типи зовнішніх сил, діючих на об'єм  $\tau_0$ , обмежений поверхнею  $S_0$ , – масові та поверхневі сили.

До масових відносяться сили, що діють на кожен елемент об'єму  $d\tau$ , і не залежать від наявності або відсутності частинок рідини поза даним елементом об'єму.

Якщо позначити через  $\vec{F}_m$  вектор масової сили, віднесеної до одиниці маси, то до елементу об'єму  $d\tau$  рідини, густина якої  $\rho$ , буде прикладена масова сила  $\vec{F}_m \rho d\tau$ .

Головний вектор масових сил, прикладених по всьому об'єму  $\tau$  суцільного середовища, і його компоненти виражаються інтегралами:

$$\int_{\tau_0} \vec{F}_m \rho d\tau, \int_{\tau_0} (F_m)_x \rho d\tau, \int_{\tau_0} (F_m)_y \rho d\tau, \int_{\tau_0} (F_m)_z \rho d\tau, \quad (1.31)$$

поширеними на об'єм  $\tau_0$ , де  $(F_m)_x$ ,  $(F_m)_y$ ,  $(F_m)_z$  – проекції вектора  $\vec{F}_m$  на координатні осі  $x$ ,  $y$ ,  $z$ .

До масових сил відносяться сили тяжіння і інерції. Основною масовою силою, що визначає динаміку об'єктів в атмосфері, є сила тяжіння, яка дорівнює векторній сумі двох сил - сили земного притягання і відцентрової сили. Сила земного притягання є виявом закону всесвітнього тяжіння, згідно з яким між двома матеріальними точками діють сили, прямо пропорційні добутку мас цих точок і обернено пропорційні квадрату відстані між ними. Тяжіння між тілами здійснюється через гравітаційне поле, яке, нарівні з іншими фізичними полями і речовиною, є однією з форм матерії. На матеріальну точку з одиничною масою в гравітаційному полі Землі маси  $M$  діє сила, направлена до центру планети і має величину  $\gamma \frac{M}{r^2}$ , де  $\vec{r}$  - радіус-вектор точки (початок координат співпадає з центром планети),  $\gamma$  – гравітаційна стала.

Позначимо цю силу через  $\vec{G}_0 = -\gamma \frac{M}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$  (мінус введений у зв'язку з тим, що напрямком векторів  $\vec{G}_0$  і  $\vec{r}$  прямо протилежний).

Відцентрова сила  $\vec{C}$ , яка на основі (1.15) дорівнює  $\omega^2 \vec{r}_1$ , направлена по радіусу круга широти, який проходить через розглядувану точку.

Обидві сили  $\vec{G}_0$  і  $\vec{C}$  і, отже, їх векторна сума – сила тяжіння  $\vec{G} = \vec{G}_0 + \vec{C}$  (рис.1.3) – є потенціальними, оскільки робота цих сил при переміщенні елементарного об'єму залежить тільки від початкового і кінцевого положень його в просторі. Потенціальний характер сили тяжіння дозволяє ввести скалярний параметр - потенціал  $\Phi$ , пов'язаний з  $\vec{G}$  співвідношенням

$$\vec{G} = -\nabla \Phi. \quad (1.32)$$

В динамічній метеорології потенціал  $\Phi$  називають геопотенціалом.

Сила тяжіння максимальна на полюсах і мінімальна на екваторі. Однак ця відмінність не перевищує 0,55%. Сила тяжіння також слабо залежить від відстані між точкою, що розглядається в атмосфері або океані, і рівнем моря, оскільки ця відстань набагато менша за радіус Землі. Сила тяжіння деякого об'єму рідини рівна сумі сил тяжіння всіх матеріальних точок, що входять в його склад. Точку прикладення цієї сили

називають центром тяжіння. Центр тяжіння довільного об'єму співпадає з його центром інерції (центром мас).

Вільним падінням називається рух тіла, що проходить під дією сили тяжіння. Прискорення вільного падіння  $\vec{g} \equiv \vec{G}$  однакове для всіх тіл і також слабо залежить від географічної широти і висоти або глибини, яка відлічується від рівня моря.

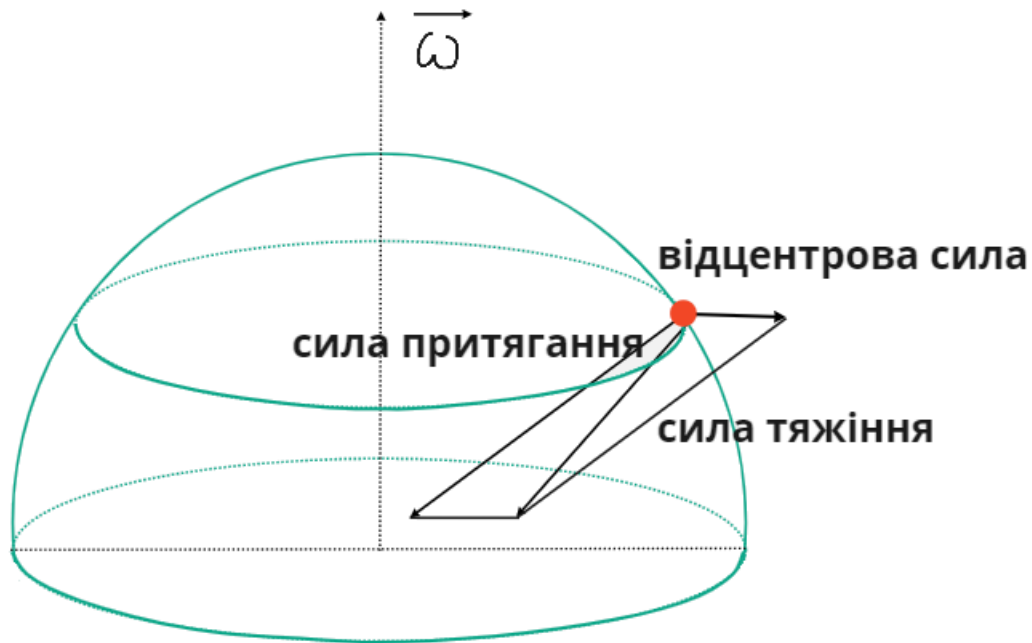


Рисунок 1.3 – Сила тяжіння  $\vec{G}$

У динамічній метеорології в переважній більшості випадків можна нехтувати залежністю  $g$  від широти і висоти (глибини). Зазвичай приймається, що  $g$  є сталою величиною, яка дорівнює  $9.81 \text{ м/с}^2$ .

До другого класу сил, які діють на розглядуваний об'єм рідини  $\tau_0$ , відносяться поверхневі сили, які характеризують взаємодію рідини в указаному об'ємі з навколишнім середовищем.

Ці сили зумовлені взаємодією частинок, що лежать зовні і на самій поверхні  $S_0$ , яка обмежує об'єм  $\tau_0$ , і прикладені до поверхневих частинок об'єму  $\tau_0$ .

До поверхневих сил відноситься, наприклад, сила тиску.

Якщо через  $\vec{P}_n$  позначити вектор поверхневої сили, віднесеної до одиниці площі, то до елементарної площинки  $ds$  поверхні  $S_0$  буде прикладена зумовлена зовнішніми частинками сила  $\vec{P}_n ds$  (рис.1.3). Величина і напрямок вектора  $\vec{P}_n$  залежать від орієнтації площинки  $ds$ , т.т. від напрямку зовнішньої нормалі  $\vec{n}$  до даної площинки.

Зрозуміло, що, крім того, вектор  $\vec{P}_n$  може залежати від координат точки, яка знаходиться в центрі  $ds$ , до якої можна віднести  $\vec{P}_n$ .

Якщо через  $-\vec{n}$  позначити протилежний напрямок нормалі всередину поверхні  $S_0$ , то цей напрямок виявиться зовнішньою нормаллю для тієї ж площинки  $ds$  по відношенню до зовнішніх частинок рідини. Згідно з нашим позначенням, поверхнева сила, діюча на елемент площинки  $ds$  зовнішнього шару частинок і зумовлена частинками, які лежать всередині об'єму  $\tau_0$ , буде  $\vec{P}_{-n}$ .

Внаслідок принципу рівності дії і протидії отримаємо співвідношення

$$\vec{P}_{-n} = -\vec{P}_n. \quad (1.33)$$

Напрямок вектора поверхневої сили  $\vec{P}_n$  взагалі може складати деякий кут з зовнішньою нормаллю  $\vec{n}$ . Проекція  $\vec{P}_n$  на зовнішню нормаль називається нормальним розтягненням або нормальним тиском, дивлячись по тому, буде  $\vec{P}_n$  складати гострий чи тупий кут з зовнішньою нормаллю. Проекція ж  $\vec{P}_n$  на площинку  $ds$  носить назву косоного напруження або, інакше, сили тертя.

Головний вектор поверхневих сил, прикладених до об'єму  $\tau_0$ , виразиться інтегралом по всій замкнутій поверхні  $S_0$

$$\int_{S_0} \vec{P}_n ds. \quad (1.34)$$

Якщо тепер в (1.30) під  $\vec{F}$  розуміти суму  $\vec{F}_p + \vec{G}_0$ , де  $\vec{F}_p$  - поверхнева сила, то з урахуванням  $\vec{G} = \vec{G}_0 + \vec{C}$  можна записати

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{F}_p + \vec{F}_k + \vec{G}. \quad (1.35)$$

В ідеальній рідині немає сил тертя, і найменший нормальний розтяг спричиняє розрив суцільності рідини. Отже, поверхневі сили, прикладені до елементів поверхні  $ds$  об'єму  $\tau_0$  ідеальної рідини, представляють собою нормальні тиски, напрямлені всередину об'єму.

Інакше кажучи, вектор  $\vec{P}_n$  направлений по внутрішній нормалі до елемента  $ds$ .

Покажемо, що для ідеальної рідини величина  $\vec{P}_n$  не залежить від орієнтації площинки  $ds$ .

Для цього розглянемо в рідині елементарний об'єм тетраедра  $KABC$  (рис. 1.4), три грані якого  $KBC$ ,  $KAC$  і  $KAB$  паралельні координатним площинам, так що зовнішні нормалі до цих граней направлені відповідно

протилежно осям  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$ . Позначимо далі через  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  косинуси кутів, утворених з осями координат зовнішньою нормаллю  $Dn$  до четвертої похилої грані  $ABC$ .

Нехай, нарешті, площа грані  $ABC$  є  $ds$ , тоді площі граней  $KBC$ ,  $KAC$ ,  $KAB$ , будучи проекціями  $ds$ , будуть відповідно  $\alpha ds$ ,  $\beta ds$ ,  $\gamma ds$ .

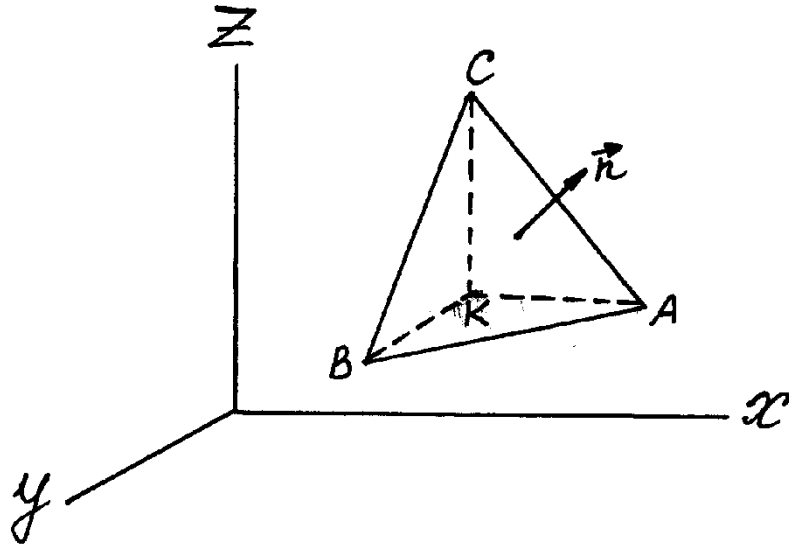


Рисунок 1.4 – Тетраедр з гранями, паралельними координатним площинам

Нагадаємо принцип Даламбера, згідно з яким в кожному мить руху будь-якого елементарного об'єму всі сили, прикладені до нього, включаючи і даламберову силу інерції  $\vec{I}_D = -m \frac{d\vec{V}}{dt}$ , взаємно врівноважуються. Вказану силу  $\vec{I}_D$  не слід плутати з раніше введеними силами інерції  $\vec{F}_k$  і  $\vec{C}$ .

Враховуючи (1.35) і застосовуючи принцип Даламбера до елементарного об'єму  $d\tau$  тетраедра, отримаємо

$$\left( \vec{F}_m - \frac{d\vec{V}}{dt} \right) \rho d\tau + \vec{F}_p ds = 0, \quad (1.36)$$

де  $F_m = \vec{F}_k + \vec{G}$ ,

$$\vec{F}_p ds = \vec{P}_n ds + \vec{P}_x \alpha ds + \vec{P}_y \beta ds + \vec{P}_z \gamma ds, \quad (1.37)$$

Помітимо, що в силі (1.33)

$$\vec{P}_{-x} = -\vec{P}_x, \quad \vec{P}_{-y} = -\vec{P}_y, \quad \vec{P}_{-z} = -\vec{P}_z, \quad (1.38)$$

$$d\tau = \frac{1}{3} h ds, \quad (1.39)$$

де  $h$  - висота тетраедра.

Підставляючи друге співвідношення (1.37) і (1.38) – (1.39) в (1.36), після скорочення на  $ds$  отримаємо

$$\frac{1}{3} \left( \vec{F}_m - \frac{d\vec{V}}{dt} \right) \rho h - \alpha \vec{P}_x - \beta \vec{P}_y - \gamma \vec{P}_z + \vec{P}_n = 0, \quad (1.40)$$

звідки, переходячи до границі при  $h \rightarrow 0$ , ми приходимо до основної властивості поверхневих сил:

$$\vec{P}_n = \alpha \vec{P}_x + \beta \vec{P}_y + \gamma \vec{P}_z. \quad (1.41)$$

Таким чином (1.41) показує, що вектор  $\vec{P}_n$  при довільній орієнтації зовнішньої нормалі  $\vec{n}$  може бути визначений, якщо задані три основних вектори

$\vec{P}_x, \vec{P}_y, \vec{P}_z$ , що виражають поверхневі сили для площинок, зовнішні нормалі яких паралельні і однаково направлені з осями  $Ox, Oy, Oz$ .

У випадку ідеальної рідини вектори  $\vec{P}_n, \vec{P}_x, \vec{P}_y, \vec{P}_z$  будуть направлені протилежно зовнішнім нормаліям  $Dn, Ox, Oy, Oz$ .

Проектуючи (1.41) послідовно на  $Ox, Oy, Oz$ , отримуємо:

$$-P_n \alpha = -\alpha P_x, \quad -P_n \beta = -\beta P_y, \quad -P_n \gamma = -\gamma P_z, \quad (1.42)$$

звідки

$$P_n = P_x = P_y = P_z. \quad (1.43)$$

Таким чином, величина нормального тиску для ідеальної рідини не залежить від орієнтування площинки, до якої він прикладений. Внаслідок цього можна відкинути індекси в (1.43), і не вказувати орієнтування площинки, пам'ятаючи, що гідродинамічний тиск направлений по внутрішній нормалі до площинки.

## 1.5 Рівняння руху ідеальної рідини

Рівняння руху ідеальної рідини може бути легко виведене на основі принципу Даламбера. Роздивимось довільний об'єм  $\tau_0$  рухомої ідеальної рідини, обмеженої поверхнею  $S_0$ .

Головний вектор всіх масових сил, прикладений до об'єму, закладеному всередині поверхні  $S_0$ , виражається першим інтегралом (1.31)

$$\int_{\tau_0} \vec{F}_m \rho d\tau. \quad (1.44)$$

Головний вектор всіх поверхневих сил, прикладених до частинок рідини, розташованих на поверхні  $S_0$  об'єму  $\tau_0$ , виражається інтегралом (1.34)

$$\int_{S_0} \vec{P}_n ds. \quad (1.45)$$

Нарешті, головний вектор даламберової сили інерції виражається інтегралом

$$-\int_{\tau_0} \frac{d\vec{V}}{dt} \rho d\tau. \quad (1.46)$$

Оскільки в (1.45) вектор гідродинамічного тиску  $\vec{P}_n$  направлений по внутрішній нормалі до поверхні  $S_0$ , то, вводячи в розгляд орт  $\vec{n}$  зовнішньої нормалі, маємо

$$\vec{P}_n = -P\vec{n}. \quad (1.47)$$

Згідно з принципом Даламбера сума головних векторів всіх перелічених сил дорівнює нулю. З урахуванням (1.47) отримуємо

$$\int_{\tau_0} \left( \vec{F}_m - \frac{d\vec{V}}{dt} \right) \rho d\tau - \int_{S_0} P\vec{n} ds = 0. \quad (1.48)$$

Застосовуючи до останнього інтеграла перетворення Остроградського - Гаусса, отримуємо

$$\int_{\tau_0} \left[ \left( \vec{F}_m - \frac{d\vec{V}}{dt} \right) \rho - \text{grad} P \right] d\tau = 0. \quad (1.49)$$

В силу довільності розглядуваного об'єму  $\tau_0$  підінтегральний вираз повинен дорівнювати нулю в кожній точці рідини в будь-який момент часу.

Таким чином приходимо до основного рівняння руху ідеальної рідини у векторній формі:

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{F}_m - \frac{1}{\rho} \text{grad}P \quad (1.50)$$

або в проекціях:

$$\frac{du}{dt} = (F_m)_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x}, \quad \frac{dv}{dt} = (F_m)_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y}, \quad \frac{dw}{dt} = (F_m)_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z}. \quad (1.51)$$

Проекції прискорень, що стоять в лівих частинах рівнянь (1.51), можуть бути виражені по кінематичних формулах (1.39) в змінних Ейлера

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z}, \\ \frac{dv}{dt} &= \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z}, \\ \frac{dw}{dt} &= \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z}. \end{aligned} \quad (1.52)$$

Підставляючи (1.52) в (1.51), отримуємо гідродинамічні рівняння в формі Ейлера

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} = \vec{F}_m - \frac{1}{\rho} \text{grad}P - \text{векторна форма,}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \vec{V} \cdot \text{grad} u &= (F_m)_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \vec{V} \cdot \text{grad} v &= (F_m)_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y}, \\ \frac{\partial w}{\partial t} + \vec{V} \cdot \text{grad} w &= (F_m)_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z}, \end{aligned} \right\} \text{скалярна форма.} \quad (1.53)$$

## 1.6 Рівняння руху в'язкої рідини

Для ідеальної рідини єдиною внутрішньою силою є тиск – однозначна скалярна функція  $p(x, y, z, t)$ . Це твердження є справедливим і для в'язкої рідини, що покоїться.

Проте в'язка рідина, що рухається, відрізняється від ідеальної рідини тим, що в ній розвиваються дотичні напруження, які обумовлені в'язкістю (внутрішнім тертям).

При русі двох сусідніх шарів рідини з різними швидкостями, між цими шарами розвиваються дотичні сили внутрішнього тертя або сили в'язкості. Слід підкреслити, що в'язкість є основна властивість рідких тіл –



рідин та газів. Ця властивість викривається тільки при русі і полягає у тому, що рух у в'язкій рідині (газі) передається від шару до шару, причому чиниться опір переміщенню частинок відносно одна одної.

Якщо рідина рухається, то між шарами, що рухаються з різними швидкостями, внаслідок неупорядкованого руху молекул виникає обмін кількістю руху. Молекули безперервно переходять з одного шару в інший, здійснюючи змішування та зчеплення шарів.

Молекули, що переходять із шару, який рухається з великою швидкістю, в шар, який рухається з меншою швидкістю, прискорюють рух цього шару, та навпаки, молекули, що проникають з шару, який рухається повільно, у шар, який рухається швидко, уповільнюватимуть рух останнього (рис. 1.5).

В'язкість грає подвійну роль при русі будь-якої реальної рідини. Спостереження показують, що поле швидкості в реальній рідині є неперервним. Формування такого неперервного поля швидкостей забезпечується впливом в'язкості, яка здійснює безперервну передачу кількості руху від одного шару до іншого. Окрім вирівнювання швидкостей, передача кількості руху від шару до шару супроводжується поглинанням механічної енергії та перетворенням її в теплову. В цьому випадку ми маємо справу з розсіюванням або дисипацією механічної енергії, обумовленою в'язкістю.

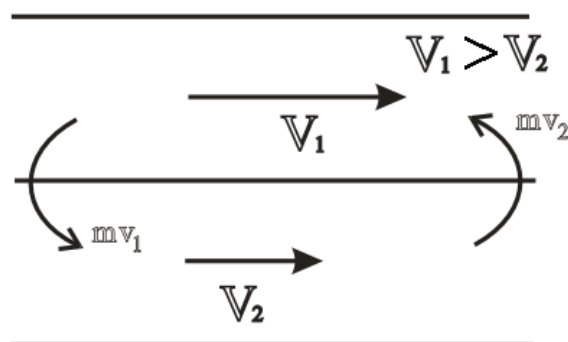


Рисунок 1.5 – До впровадження сили в'язкості (внутрішнього тертя)

Згідно із законом Ньютона дотичне напруження тертя між двома шарами прямолінійно рухомої в'язкої рідини пропорційно віднесеній до одиниці довжини зміні швидкості по нормалі до напрямку руху.

У випадку, що розглядається, для одномірного руху в площині  $xOz$  дотичне напруження дорівнює

$$\tau_{xz} = \mu \frac{du}{dz}, \quad (1.54)$$

Коефіцієнт пропорційності  $\mu$  в (1.54), який називається динамічним коефіцієнтом в'язкості, не залежить від характеру руху, а

визначається лише фізичними властивостями рідини і її температурою (вплив тиску практично незначний). Відношення динамічного коефіцієнта в'язкості до густини рідини

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}, \quad (1.55)$$

називається кінематичним коефіцієнтом в'язкості.

Таким чином, рідина називається в'язкою, якщо поверхневі сили, прикладені до елементів поверхні будь-якого об'єму рідини, мають в загальному випадку нормальні і дотичні складові.

### 1.6.1 Тензор напружень

Розглянемо поверхневі сили, що з'являються при русі в'язкої рідини. Як і у випадку ідеальної рідини, візьмемо всередині рідини об'єм  $\tau_0$  за допомогою замкнутої поверхні  $S_0$  і розглянемо елемент  $ds$  цієї поверхні.

Позначимо через  $\vec{n}$  напрямок зовнішньої нормалі до цього елемента.

Тоді дія частинок рідини, розташованих з зовнішньої сторони елемента  $ds$ , на частинки рідини, які прилягають до цього елемента з внутрішньої сторони, є дія поверхневої сили  $\vec{P}_n ds$ .

Діючи також як у випадку ідеальної рідини, тобто застосовуючи принцип Даламбера до виділеного тетраедра  $\tau_0$ , ми отримаємо співвідношення, співпадаюче з (1.41),

$$\vec{P}_n = \alpha \vec{P}_x + \beta \vec{P}_y + \gamma \vec{P}_z. \quad (1.56)$$

Вектори  $\vec{P}_x$ ,  $\vec{P}_y$ ,  $\vec{P}_z$  - поверхневі сили, діючі на площинки, орієнтовані перпендикулярно координатним осям  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$ .

Проектуючи співвідношення (2.5.4) на осі координат, знайдемо складові векторів  $\vec{P}_x (P_{xx}, P_{xy}, P_{xz})$ ,  $\vec{P}_y (P_{yx}, P_{yy}, P_{yz})$ ,  $\vec{P}_z (P_{zx}, P_{zy}, P_{zz})$ .

Складена з компонентів цих векторів таблиця з дев'яти величин

$$P = \begin{pmatrix} P_{xx} & P_{xy} & P_{xz} \\ P_{yx} & P_{yy} & P_{yz} \\ P_{zx} & P_{zy} & P_{zz} \end{pmatrix} \quad (1.57)$$

визначає тензор, який називається тензором напружень.

Діагональні члени цього тензора є нормальними (тисками), а недіагональні - дотичними напруженнями.

Сформулюємо дві основні властивості тензора напружень. По-перше, тензор напружень є симетричним ( $P_{xy} = P_{yx}$ ,  $P_{xz} = P_{zx}$ ,  $P_{yz} = P_{zy}$ ), по - друге, сума нормальних напружень на три взаємно перпендикулярні площинки ( $P_{xx} + P_{yy} + P_{zz}$ ) не залежить від орієнтації цих площинок. Перша властивість тензора напружень витікає з теореми про взаємність дотичних напружень: якщо в деякій точці суцільного середовища вибрати дві взаємно перпендикулярні елементарні площинки, то проекції напружень, прикладених до кожної з площинок, на вісь, перпендикулярну до іншої площинки, будуть рівні між собою. Друга властивість тензора напружень по суті виражає інваріантність сум нормальних напружень. Вказані властивості тензора напружень витікають з умов рівноваги суцільного середовища і теореми моментів, прикладеної до руху рідкого тетраедра, згідно з яким головний вектор ( $\int_{\tau_0} \rho \vec{F} d\tau$ ) і головний момент ( $\int_{\tau_0} \vec{r} \times \rho \vec{F} d\tau$ ) всіх сил відносно якої-небудь точки, прикладених до об'єму, включаючи і даламберову силу інерції, повинні дорівнювати нулю.

Для встановлення зв'язку між тензором напружень (1.57) і складовими градієнта швидкості скористаємося двома природними допущеннями.

1. Складові тензора напружень при відсутності в'язкості повинні перейти у відповідні складові тензора напружень ідеальної рідини. Отже їх можна представити у вигляді

$$\begin{aligned} P_{xx} &= -P + \tau_{xx}, & P_{yy} &= -P + \tau_{yy}, & P_{zz} &= -P + \tau_{zz}, \\ P_{xy} &= \tau_{xy}, & P_{xz} &= \tau_{xz} & \text{тощо.} \end{aligned} \quad (1.58)$$

Величини  $\tau$  з індексами відрізняються від нуля тільки у випадку в'язкої рідини згідно з раніше приведеним визначенням.

2. Величини  $\tau$  з індексами є лінійними функціями від складових тензора швидкостей деформації, до того ж коефіцієнти цих функцій не залежать від вибору нерухомої прямолінійної прямокутної системи координат.

Друге допущення є узагальненням закону Ньютона на тривимірний простір для ізотропних в'язких рідин, властивості яких однакові в будь-якому напрямі.

Найбільш загальний вигляд лінійного зв'язку між тензором напружень  $P$  (1.57) і складовими градієнта швидкості виражається формулою

$$P = aS + b\varepsilon, \quad (1.59)$$

де  $a$  і  $b$  скаляри, де  $S$  – тензор деформації,  $S_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$  – його компоненти,  $\varepsilon$  – одиничний тензор (тензорна одиниця), визначений в будь-якій системі координат своїми компонентами, які являються символом Кронекера,

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{якщо } i \neq j, \\ 1, & \text{якщо } i = j \quad (i, j = 1, 2, 3). \end{cases} \quad (1.60)$$

Індекс 1 відповідає осі  $x$ , 2 – осі  $y$ , 3 – осі  $z$ .

За умовою лінійності зв'язку (1.59) величина  $a$  являє собою фізичну константу середовища, однакову при будь-яких її рухах і рівну подвоєному динамічному коефіцієнту в'язкості, як впливає із закону Ньютона. Дійсно,

$$\tau_{xz} = aS_{xz} + b\varepsilon_{xz} = a \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right), \quad (1.61)$$

оскільки  $\varepsilon_{13} = 0$ .

У випадку одновимірного руху  $\tau_{xz} = \mu \frac{du}{dz}$ .

Порівнюючи (1.61) з (1.54), отримаємо  $a = 2\mu$ .

Для визначення величини  $b$  застосуємо співвідношення (1.59) для лінійних інваріантів тензорів  $P$  і  $S$ . Лінійними інваріантами вказаних тензорів є суми їх діагональних членів, тобто

$$P_{11} + P_{22} + P_{33} \text{ и } S_{11} + S_{22} + S_{33} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = \operatorname{div} \vec{V} \quad (1.62)$$

Відповідна величина для одиничного тензора  $\varepsilon$  дорівнює  $\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = 3$ .

Прирівнюючи лінійні інваріанти тензорів  $P$  і  $S$  дістанемо згідно з (1.59) вираз для визначення величини  $b$

$$P_{11} + P_{22} + P_{33} = 2\mu \operatorname{div} \vec{V} + 3b, \quad (1.63)$$

звідки

$$b = \frac{1}{3} (P_{11} + P_{22} + P_{33}) - \frac{2}{3} \mu \operatorname{div} \vec{V} \quad (1.64)$$

Узагальнимо поняття тиску, введене в теорії ідеальної рідини, де  $P_{11} = P_{22} = P_{33} = -P$ .

Прийmemo як найпростіше допущення, що  $i$  у разі в'язкої рідини взятє із оберненим знаком середнє арифметичне трьох нормальних напружень, прикладених до взаємно перпендикулярних площинок в даній точці середовища, є тиск в цій точці

$$-\frac{1}{3}(P_{11} + P_{22} + P_{33}) = P. \quad (1.65)$$

Це припущення є додатковою гіпотезою до узагальненого закону Ньютона, оскільки, виходячи із загальних гідродинамічних міркувань, не можна довести, що визначена таким чином скалярна величина  $P$  буде дійсно тією термодинамічною характеристикою рідини або газу, яка, наприклад у разі досконалого газу, буде пов'язана з густиною і температурою формулою Клапейрона-Менделєєва. Правильність прийнятої гіпотези (1.65) виправдовується практикою майже у всіх областях застосування теорії руху в'язкої рідини. Однак існують такі складні процеси руху, для опису яких необхідне уточнення цієї закономірності.

Як більш загальне допущення можна прийняти, що взятє з оберненим знаком середнє арифметичне трьох нормальних напружень відрізняється від тільки що визначеного тиску в даній точці на величину, пропорційну відносній швидкості об'ємного розширення  $div \vec{V}$ .

При цьому замість рівності (1.65) будемо мати

$$-\frac{1}{3}(P_{11} + P_{22} + P_{33}) = P - \mu' div \vec{V}, \quad (1.66)$$

де  $\mu'$  – так званий другий коефіцієнт в'язкості.

Виходячи з отриманих співвідношень (1.64) – (1.66), узагальнений закон Ньютона (1.59) представиться в остаточному вигляді

$$P = 2\mu S - (P + \frac{2}{3}\mu div \vec{V} - \mu' div \vec{V}) \epsilon. \quad (1.67)$$

Враховуючи важливість здобутих співвідношень для застосування теорії в'язкої рідини, перелічимо ще раз основні фізичні міркування, на основі яких встановлений загальний вигляд тензора в'язких напружень.

Перш за все покажемо, що величини  $\tau_{ij}$  характеризують тільки в'язкі напруження, які виникають у випадках, коли різні ділянки в'язкої рідини рухаються з різною швидкістю, так що має місце рух частинок рідини відносно одна одної. Тому в'язкі напруження  $\tau_{ij}$  повинні залежати від просторових похідних швидкості. При цьому, якщо градієнти швидкості не

дуже великі, то можна вважати, що в'язкі напруження залежать тільки від перших похідних швидкості і цю залежність  $\tau_{ij}$  від  $\frac{\partial v_i}{\partial x_j}$  можна вважати

наближено лінійною. Коли вся рідина як ціле здійснює рівномірне обертання, то в ній внутрішнього тертя не спостерігається і, отже, величини  $\tau_{ij}$  дорівнюють нулю і повинні залежати від таких лінійних комбінацій похідних, які обертаються в нуль при  $\vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ , де  $\vec{\omega}$  - кутова швидкість обертання рідини.

Тому  $\tau_{ij}$  повинні виражатися через симетричні комбінації виду  $\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}$ , які входять в тензор швидкостей деформації  $S$ .

Викладені фізичні міркування є обґрунтуванням отриманої залежності тензора напружень  $P$  від кінематичних характеристик (1.67). Якщо складові тензора напружень  $P$  на основі (1.58) записати у вигляді

$$P_{ij} = -P\delta_{ij} + \tau_{ij}, \quad (1.68)$$

то

$$\tau_{ij} = \mu \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\alpha} \right) + \mu' \delta_{ij} \frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\alpha}, \quad (1.69)$$

де

$$\frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\alpha} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3}.$$

Підкреслимо, що рідини, в яких напруження пов'язані зі швидкістю деформації згідно з узагальненим законом Ньютона, називаються ньютонівськими.

### 1.6.2 Різні форми запису рівняння руху в'язкої рідини

Для отримання рівнянь руху в'язкої рідини необхідно в рівняння руху ідеальної рідини ввести додаткові члени, що описують ефект внутрішнього тертя. З цією метою виконаємо перетворення раніше отриманого рівняння руху в формі Ейлера (1.53). Запишемо це рівняння в тензорних позначеннях:

$$\rho \left( \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_\alpha \frac{\partial v_i}{\partial x_\alpha} \right) = \rho (F_m)_i - \frac{\partial P}{\partial x_i}, \quad (1.70)$$

де повторюваний індекс  $\alpha$  означає підсумовування від 1 до 3, а індекс  $m$  в подальшому буде опущений.

Скористаємося рівнянням нерозривності (1.21) у вигляді

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_\alpha)}{\partial x_\alpha} = 0. \quad (1.71)$$

Помножимо ліву і праву частини (1.71) на  $v_i$  і складемо з (1.70). Тоді отримаємо

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) = \rho F_i - \frac{\partial}{\partial x_\alpha}(\rho v_i v_\alpha) - \frac{\partial P}{\partial x_i}. \quad (1.72)$$

Оскільки

$$\frac{\partial P}{\partial x_i} = \delta_{i\alpha} \frac{\partial P}{\partial x_\alpha}, \quad (1.73)$$

то рівняння для зміни потоку імпульсу в компактній формі можна записати у вигляді

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) = -\frac{\partial \Pi_{i\alpha}}{\partial x_\alpha} + \rho F_i, \quad (1.74)$$

де елементи тензора

$$\Pi_{ij} = P\delta_{ij} + \rho v_i v_j, \quad (1.75)$$

(індекси  $\alpha, \beta$  будемо використовувати тільки в операції підсумовування.) Тензор  $\Pi$  очевидно симетричний.

Для з'ясування фізичного змісту  $\Pi_{ij}$  обмежимося випадком відсутності масових сил і проінтегруємо рівняння (1.74) по довільному об'єму  $\tau$ .

Тоді

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\tau_0} \rho v_i d\tau = - \int_{\tau_0} \frac{\partial \Pi_{i\alpha}}{\partial x_\alpha} d\tau. \quad (1.76)$$

Якщо в (1.76) справа перейти до інтеграла по поверхні з використанням формули Остроградського - Гаусса, узагальненій на випадок тензорних функцій, то отримаємо

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \int_{\tau_0} \rho v_i d\tau = - \int_{S_0} \Pi_{i\alpha} ds_\alpha . \quad (1.77)$$

Тут зліва стоїть зміна в одиницю часу  $i$ -ї компоненти імпульсу в об'ємі, що розглядається. Тому інтеграл по поверхні, який стоїть справа є кількістю цього імпульсу, що витікає в одиницю часу через обмежуючу об'єм поверхню. Отже,  $\Pi_{i\alpha} ds_\alpha$  є  $i$ -а компонента імпульсу, який протікає через елемент  $ds$  поверхні.

Якщо написати  $ds_\alpha$  у вигляді  $n_\alpha ds$  ( $ds$  - абсолютна величина елемента поверхні,  $\vec{n}$  - одиничний вектор зовнішньої нормалі до цього елемента), то ми знайдемо, що  $\Pi_{i\alpha} n_\alpha$  є потік  $i$ -ї компоненти імпульсу, віднесений до одиниці площі поверхні.

Згідно з (2.5.23)  $\Pi_{i\alpha} n_\alpha = \rho n_i + \rho v_i v_\alpha n_\alpha$ ; цей вираз може бути записано у векторному вигляді  $P\vec{n} + \rho \vec{V}(\vec{V} \cdot \vec{n})$ .

Тоді  $\Pi_{ij}$  є  $i$ -та складова імпульсу, який протікає в одиницю часу через одиницю поверхні, перпендикулярну осі  $x_j$ .

Тензор  $\Pi_{ij}$  називається тензором густини потоку імпульсу.

Потік імпульсу, що визначається тензором  $\Pi_{ij}$ , представляє собою чисто оборотний перенос імпульсу, пов'язаний з механічним переміщенням різних ділянок рідини і з діючими в рідині силами тиску.

В'язкість виявляється в наявності додаткового безповоротного перенесення імпульсу з місць з більшою в місця з меншою швидкістю. Тому рівняння в'язкої рідини можна отримати, додавши до "ідеального" потоку імпульсу (1.75) додатковий член  $\tau_{ij}$ , що визначає "незворотний" в'язкий перенос імпульсу.

Тоді тензор густини потоку імпульсу для в'язкої рідини запишеться у вигляді

$$\Pi_{ij} = P\delta_{ij} + \rho v_i v_j - \tau_{ij} . \quad (1.78)$$

Рівняння руху в'язкої рідини тепер можна одержати шляхом додавання виразу  $\frac{\partial \tau_{i\alpha}}{\partial x_\alpha}$  до правої частини рівняння (1.70) або шляхом підстановки (1.78) в (1.74):

$$\rho \left( \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_\alpha \frac{\partial v_i}{\partial x_\alpha} \right) = \rho F_i - \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{i\alpha}}{\partial x_\alpha} ,$$

$$\rho \left( \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_\alpha \frac{\partial v_i}{\partial x_\alpha} \right) = \rho F_i - \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left[ \mu \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial v_\alpha}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{i\alpha} \frac{\partial v_\beta}{\partial x_\beta} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \mu' \frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\alpha} \right) . \quad (1.79)$$

В більшості випадків зміна коефіцієнтів в'язкості при зміні просторових координат незначна, і тому  $\mu$  і  $\mu'$  можна вважати сталими.



Тоді рівняння руху для в'язкої рідини можна представити у векторній формі

$$\rho \left[ \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} \right] = \rho \vec{F} - \text{grad} P + \mu \nabla^2 \vec{V} + \left( \mu' + \frac{\mu}{3} \right) \text{grad} \text{div} \vec{V} \quad (1.80)$$

Це рівняння Нав'є – Стокса.

Перепишемо рівняння (1.80) з урахуванням виразів для  $\vec{F}$  і малості останнього члена:

$$\rho \left( \frac{d\vec{V}}{dt} + 2\vec{\omega} \times \vec{V} \right) = -\nabla P - \rho \nabla \Phi + \mu \nabla^2 \vec{V}, \quad (1.80a)$$

$$\frac{d\vec{V}}{dt} + 2\vec{\omega} \times \vec{V} = -\frac{1}{\rho} \nabla P - \nabla \Phi + \nu \nabla^2 \vec{V}, \quad (1.80b)$$

де  $\Phi$  – потенціал сили тяжіння,  $\nabla^2 \vec{V} = \frac{\partial^2 \vec{V}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{V}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{V}}{\partial z^2}$ .

Або у скалярній формі можна переписати рівняння (1.80b) наступним чином:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} + 2(\omega_y w - \omega_z v) &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \nabla^2 u \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} + 2(\omega_z u - \omega_x w) &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \nabla^2 v, \quad (1.80c) \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} + 2(\omega_x v - \omega_y u) &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g + \nu \nabla^2 w \end{aligned}$$

## 1.7 Рівняння припливу тепла

В термодинаміці атмосфери використовуються висновки, які випливають із закону збереження енергії. Цей закон в загальному вигляді можна сформулювати так: енергія не виникає і не зникає, а лише переходить з одного виду в інший. Кількісно це положення виражається у вигляді рівняння припливу тепла, або рівняння першого початку термодинаміки. Встановимо вид цього рівняння для ідеального газу, до якого близьке сухий і вологе ненасичене повітря. Надамо повітряній частинці деяку кількість тепла  $dQ$  (це може бути будь-яка енергія: механічна, електрична, теплова, ядерна тощо). При цьому внутрішня

енергія частинки зростає на  $du$  і одночасно частинка здійснює роботу проти зовнішніх сил  $dw$ :

$$dQ = du + dw \quad (1.81)$$

Отримаємо вирази для  $du$  і  $dw$ . Оскільки сухе і вологе ненасичене повітря близьке до ідеального, то

$$du = C_V dT \quad (1.82)$$

де  $C_V$  – питома теплоємність при сталому об'ємі,  $dT$  – збільшення абсолютної температури за рахунок припливу тепла  $dQ$ .

В атмосфері робота проти зовнішніх сил може складатися тільки із роботи розширення, тоді

$$dw = PdV \quad (1.83)$$

де  $P$  – сила тиску, яка здійснює роботу розширення,  $dV$  – зміна об'єму повітря за рахунок нагріву ( $V = \frac{1}{\rho}$  – питомий об'єм).

З урахуванням (1.83), (1.82) рівняння (1.81) набуває вигляду

$$dQ = C_V dT + PdV \quad (1.84)$$

Перетворимо (1.84) таким чином, щоб в нього входили тільки вимірювані величини. Для цього скористаємось рівнянням стану повітря

$$PV = RT \quad (1.85)$$

де  $R$  – питома газова стала.

Із (1.85) шляхом диференціювання отримаємо

$$PdV + VdP = RdT \quad (1.86)$$

або

$$PdV = RdT - VdP$$

з урахуванням того, що із (1.32)  $V = \frac{RT}{P}$ , перепишемо рівняння (1.86)

$$PdV = RdT - \frac{RT}{P} dP \quad (1.87)$$

Підставивши (1.87) в рівняння (1.86), отримаємо

$$dQ = C_V dT + R dT - \frac{RT}{P} dP$$

$$dQ = (C_V + R) dT - \frac{RT}{P} dP \quad (1.88)$$

Розглянемо окремий випадок – ізобаричний процес, тобто такий процес, який проходить при сталому тиску ( $P = const$ ), в цьому випадку  $dP = 0$  і рівняння (1.88) набуває вигляду

$$dQ = (C_V + R) dT \quad (1.89)$$

З іншого боку, при ізобаричному процесі

$$dQ = C_p dT \quad (1.90)$$

де  $C_p$  – питома теплоємність при постійному тиску.

Таким чином, із співвідношень (1.89) і (1.90) отримаємо, що

$$C_p = C_V + R$$

З урахуванням цього виразу отримаємо рівняння припливу тепла у вигляді, який найбільш часто використовується в метеорології:

$$dQ = C_p dT - \frac{RT}{P} dP.$$

Це рівняння можна записати і в такій, більш зручній для моделювання формі

$$\frac{dQ}{dt} = C_p \frac{dT}{dt} - \frac{RT}{P} \frac{dP}{dt}, \quad (1.91)$$

де  $\frac{dQ}{dt}$  – приплив тепла до одиничної маси повітря за одиницю часу.

Якщо ввести величину  $\varepsilon = \rho \frac{dQ}{dt}$ , тобто приплив тепла до одиничного об'єму, рівняння (1.91) відносно похідної  $\frac{dT}{dt}$ , запишеться так

$$\frac{dT}{dt} = \frac{RT}{C_p P} \frac{dP}{dt} + \frac{\varepsilon}{C_p \rho}. \quad (1.92)$$

Ця форма найчастіше використовується при моделюванні атмосферних процесів.

Рівняння (1.92) показує, що зміни температури в повітряних масах, які рухаються, відбуваються, з одного боку, за рахунок змін тиску (перший член правої частини) – це адіабатичні зміни; а з другого боку, за рахунок зовнішнього припливу тепла  $\varepsilon$ . Цей приплив тепла складається із різних видів теплової енергії

$$\varepsilon = \varepsilon_{\text{л}} + \varepsilon_{\text{т}} + \varepsilon_{\text{ф}} \quad (1.93)$$

де  $\varepsilon_{\text{л}}$  – приплив тепла за рахунок перетворення сонячної енергії в атмосфері;

$\varepsilon_{\text{т}}$  – приплив тепла, обумовлений турбулентним обміном, тобто турбулентний приплив тепла;

$\varepsilon_{\text{ф}}$  – приплив тепла, пов'язаний з фазовими переходами води в атмосфері.

При математичному опису хвильових процесів досить часто рівняння (1.93) записується в термінах потенціальної температури  $\theta$ . Відомо, що потенціальна – це температура, яку отримує повітряна частинка, якщо її сухоадіабатично опустити або підняти до рівня, де атмосферний тиск становить 1000 гПа.

$$\theta = T \left( \frac{1000}{p} \right)^{R/c_p} \quad (1.94)$$

Після логарифмування і диференціювання (1.41) за часовою координатою, отримаємо

$$\ln \theta = \ln T + \frac{R}{C_p} (\ln 1000 - \ln p)$$

Диференціювання цього виразу по часовій координаті  $t$  приведе до рівняння

$$\frac{1}{\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{T} \frac{dT}{dt} - \frac{R}{C_p p} \frac{dp}{dt} \quad \text{або}$$

якщо помножити обидві частини цього рівняння на  $T$  і  $C_p$ , останнє рівняння матиме вигляд

$$C_p \frac{T}{\theta} \frac{d\theta}{dt} = C_p \frac{dT}{dt} - \frac{RT}{p} \frac{dP}{dt}. \quad (1.95)$$

Якщо порівняти рівняння (1.95) і (1.91) показує, що їх праві частини однакові, а це означає, що й ліві частини також однакові, тобто можна записати

$$C_p \frac{T}{\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{dQ}{dt}. \quad (1.96)$$

Із (1.96) випливає, що зміни потенціальної температури в повітряній масі здійснюються тільки за рахунок зовнішнього припливу тепла  $\frac{dQ}{dt}$ .

За відсутності зовнішніх припливів тепла ( $\frac{dQ}{dt} = 0$ ) рівняння (1.96), запишемо так

$$C_p \frac{T}{\theta} \frac{d\theta}{dt} = 0. \quad (1.97)$$

Оскільки в (1.97)  $\theta$  і  $T$  – температури в абсолютній шкалі, їх відношення можна вважати близьким до одиниці, тепер поділимо обидві частини рівняння на  $C_p$  і тоді отримаємо

$$\frac{d\theta}{dt} = 0, \quad \text{тобто} \quad \frac{\partial\theta}{\partial t} + u \frac{\partial\theta}{\partial x} + v \frac{\partial\theta}{\partial y} + w \frac{\partial\theta}{\partial z} = 0. \quad (1.98)$$

Такий вигляд має рівняння припливу тепла в термінах потенціальної температури для адіабатичного процесу.

Запишемо тепер всю систему рівнянь гідротермодинаміки; при цьому рівняння руху візьмемо у вигляді (1.80с), рівняння нерозривності у вигляді (1.21), а рівняння припливу тепла – у вигляді (1.92), де ліву частину представимо у частинних похідних.

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} + 2(\omega_y w - \omega_z v) &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \nabla^2 u \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} + 2(\omega_z u - \omega_x w) &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \nabla^2 v, \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} + 2(\omega_x v - \omega_y u) &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g + \nu \nabla^2 w \end{aligned}$$

$$\frac{d\rho}{dt} = \text{div}(\rho \vec{V})$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{RT}{C_p P} \frac{dP}{dt} + \frac{\varepsilon}{C_p \rho} \quad (1.99)$$

$$p = \rho RT$$

Останнє рівняння системи (рівняння стану) не містить нових невідомих і тому використовується для замкнення цієї системи. Як видно із (1.49), невідомими величинами є  $u$ ,  $v$ ,  $w$ ,  $p$ ,  $T$  і  $\varepsilon$ . Якщо  $\varepsilon = 0$ , тобто розглядаються адіабатичні процеси, або  $\varepsilon$  відома величиною, то система (1.49) містить 6 рівнянь і 6 невідомих і, таким чином, являє собою замкнену систему, яка може бути розв'язана. Але ця система складається із нелінійних членів, тому для неї неможливо отримати аналітичний розв'язок, тобто розв'язок у вигляді функції (формули), через що система розв'язується приблизними чисельними методами.

Проте отримати аналітичний (точний) розв'язок дуже корисно, тому що завдяки його аналізу можна виявити основні фізичні властивості досліджуваного процесу. Для отримання аналітичного розв'язку система рівнянь або окремі рівняння приводяться до лінійного вигляду. З математики відомо, що лінійні рівняння завжди мають аналітичні розв'язання. Для приведення нелінійних рівнянь до лінійного вигляду використовується так званий метод малих збурень, який буде розглянуто нижче.

## 1.8 Контрольні запитання

1. Яке рівняння є математичним записом закону збереження маси?
2. Яке рівняння є математичним записом закону збереження енергії?
3. Яке рівняння є математичним записом закону збереження кількості руху (імпульсу)?
4. Які системи відносяться до інерціальних (неінерціальних)?
5. Якщо в різних інерціальних системах координат виконувати одні й ті самі експерименти з механіки, то всі ці експерименти дадуть однакові чи різні результати у всіх випадках?
6. Якою системою координат є Земля – інерціальною чи неінерціальною?
7. Які додаткові сили виникають на Землі внаслідок її неінерціальності?
8. Які сили називають фіктивним (приклади фіктивних сил)?
9. Які сили називають фізичними (приклади фізичних сил)?
10. Відцентрова сила впливає тільки на тіла, що рухаються, чи тільки на нерухомі тіла, чи на ті та інші?
11. Сила Коріоліса впливає тільки на тіла, що рухаються, чи тільки на нерухомі тіла, чи на ті та інші?
12. Як спрямована сила Коріоліса у північній (південній) півкулі?

13. Як спрямована відцентрова сила?
14. Чому дорівнює робота сили Коріоліса?
15. Дайте визначення масовим силам?
16. Дайте визначення поверхневим силам?
17. Які сили відносять до масових (поверхневих)?
18. До якої групи сил (масових чи поверхневих) відносяться фіктивні сили?
19. Яку рідину називають стисливою (нестисливою)?
20. Вигляд рівняння нерозривності для стислої (нестислої) рідини.
21. Чим відрізняються рівняння Ейлера від рівнянь Нав'є–Стокса?
22. Які сили діють в атмосфері?
23. Яка сила є основною рушійною силою в атмосфері?
24. Як спрямована сила баричного градієнта відносно градієнта тиску?
25. Чим відрізняється сила тяжіння від сили притягання?
26. Який фізичний процес називають в'язкістю рідини або газ?
27. Якій характеристиці поля швидкості є прямо пропорційним тензор дотичних напружень?
28. Динамічний коефіцієнт в'язкості. Від чого він залежить?
29. Кінематичний коефіцієнт в'язкості.
30. Які фізичні чинники приводять до зміни імпульсу елементарного об'єму в'язкої рідини, що рухається?
31. Які фізичні чинники приводять до зміни імпульсу елементарного об'єму відповідно до рівняння Ейлера у необертовій системі відліку?
32. Які фізичні чинники приводять до зміни імпульсу елементарного об'єму відповідно до рівняння Ейлера у обертовій системі відліку?
33. Які фізичні чинники приводять до зміни імпульсу елементарного об'єму відповідно до рівняння Нав'є–Стокса?
34. Яка сила призводить до згладжування неоднорідностей у полі швидкості?
35. Яка сила призводить до переходу кінетичної енергії в теплову?
36. В якій рідині існують лише нормальні напруження?
37. В якій рідині, окрім нормальних напружень, виникають ще і дотичні?
38. В якому стані виявляється відмінність між в'язкою та ідеальною рідиною?
39. Як називають внутрішні сили, що виникають при деформації рідини та перешкоджають їй деформації?
40. Як називають проекцію напруження, що діє на одиницю площадки поверхні, на нормаль до цієї поверхні?
41. Як називають проекцію напруження, що діє на одиницю площадки поверхні, на дотичну до цієї поверхні площину, яка побудована в цій самій точці?

## 2 Відносний, абсолютний і потенціальний вихор

### 2.1 Основні диференціальні характеристики поля швидкості

Рух суцільного середовища – рідини або газу, зокрема, повітря – звичайно буває дуже складним. Навіть рух малої (теоретично – нескінченно малої) частинки протягом надто малого часу є звичайно складним, і для успішного вивчення такого руху зручно розглядати його як результат накладених один на одного декількох більш простих рухів.

Можна вивчити кожний з цих простих рухів, а потім, накладаючи їх один на одного, розглядати реальні рухи рідини або газу.

Почнемо з руху абсолютно твердого тіла, тобто такого тіла, яке не піддається змінюванню форми. З курсу механіки відомо, що будь-який рух такого тіла можна розкласти на два простих рухи: паралельне переміщення і обертання навколо осі, яка проходить через будь-яку точку тіла, наприклад, його центр ваги. Паралельне переміщення характеризується лінійною швидкістю  $\vec{V}$  тіла, обертання – вектором кутової швидкості  $\vec{\sigma}$ , який спрямовано уздовж осі обертання і чисельно дорівнює подвійній кутовій швидкості обертання  $\omega$ .

Обертальна компонента руху частинки рідини або газу описується вектором  $\vec{\Omega}$ , який називають вихором швидкості або ротором швидкості і позначають так

$$\vec{\Omega} = \text{rot}\vec{V} = \nabla \times \vec{V}, \quad (2.1)$$

Подаючи векторний доданок у вигляді визначника

$$\nabla \times \vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w \end{vmatrix} \quad (2.2)$$

і розкриваючи його за правилом Крамера, одержимо

$$\vec{\Omega} = \vec{i} \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \vec{j} \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \vec{k} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right). \quad (2.3)$$

Множники при одиничних ортах є проекціями (складовими) вихору  $\vec{\Omega}(\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z)$  на осі декартових координат:



$$\Omega_x = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}; \quad \Omega_y = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}; \quad \Omega_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (2.4)$$

Кожна складова вихору швидкості характеризує обертання частинки у площині, перпендикулярній до осі обертання. Зокрема, вертикальна складова  $\Omega_z$  означає обертання частинки у горизонтальній площині навколо вертикальної осі, причому для додатних значень це обертання відбувається проти годинникової стрілки при спостереженні зверху.

Оскільки для великомасштабних атмосферних рухів горизонтальні складові швидкості вітру  $u$  і  $v$  принаймні на два порядки більші, ніж вертикальна швидкість  $w$ , то при аналізі ротації рухів в об'єктах такого масштабу найцікавішим є насамперед вертикальна складова  $\Omega_z$ , яка ще має назву завихреності. Внаслідок цього горизонтальними складовими вихору швидкості  $\Omega_x, \Omega_y$  можна знехтувати у порівнянні з вертикальною складовою. Для мезомасштабних вихорів з горизонтальними осями обертання (наприклад, шквали у грозовій хмарі) таке наближення, не є правомочним, тому що порядок усіх трьох складових тривимірного потоку  $(u, v, w)$  є приблизно однаковим, і тому  $O(\Omega_x, \Omega_y) \approx O(\Omega_z)$ .

Чисельно вихор швидкості дорівнює подвійній кутовій швидкості обертання частинки навколо миттєвої осі обертання

$$\vec{\Omega} = 2\vec{\omega} \quad \text{а модуль} \quad |\vec{\Omega}| = 2|\vec{\omega}|. \quad (2.5)$$

Згідно з (1.54) проекції  $\vec{\Omega}$  на осі координат мають вигляд

$$\Omega_x = 2\omega_x; \quad \Omega_y = 2\omega_y; \quad \Omega_z = 2\omega_z. \quad (2.6)$$

Важливою характеристикою поля швидкості вітру є також дивергенція

$$\text{div } \vec{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z},$$

яка дорівнює швидкості відносного розширення елементарної частинки. Інакше кажучи, якщо нескінченно малий об'єм  $\delta\tau$  частинки за час  $\delta t$  збільшився на  $d\delta\tau$ , то

$$\text{div } \vec{V} = \frac{1}{\delta\tau} \frac{d\delta\tau}{dt} \quad (2.7)$$

Формула (2.7) показує, що  $\text{div } \vec{V} > 0$  у тому випадку, коли об'єм частинки, яка рухається, збільшується; якщо  $\text{div } \vec{V} < 0$ , об'єм рухомої частинки зменшується.

Необхідно пам'ятати, що дивергенція і вихор швидкості описують не рух у цілому, а лише одну якусь його компоненту, тобто один з його простих рухів, на які можна розкласти реальний складний рух. Тому, якщо дивергенція швидкості не дорівнює нулю, це не означає, що рух частинки є просто її розширення або стиснення; також, якщо вихор швидкості відрізняється від нуля, то це не означає, що рух частинки є тільки її обертання. Це означає лише наявність оберտальної складової спільного руху.

Отже, для атмосферних вихорів синоптичного масштабу  $O(\Omega_x, \Omega_y) \ll O(\Omega_z)$ , і тому  $O(\Omega) \approx O(\Omega_z)$ , тобто циклони і антициклони можна розглядати як великомасштабні вихори з квазівертикальними осями обертання. У північній півкулі повітря у циклонах обертається проти годинникової стрілки і тому  $\Omega_z > 0$ , а в антициклонах – за годинниковою стрілкою ( $\Omega_z < 0$ ); у південній півкулі обертання повітря у циклонах та антициклонах є зворотним.

Складові вихору швидкості  $\vec{\Omega}$  (2.3), (2.5) характеризують оберտальний рух повітря відносно земної поверхні і тому сам вихор  $\vec{\Omega}$  має назву відносного. Інакше кажучи, оберտальний момент створюється самою структурою тривимірного потоку повітряної маси незалежно від того, обертається Земля як планета чи ні. З цього, зокрема, випливає, що відносний вихор швидкості не обов'язково пов'язаний з коловим рухом. Так, наприклад, при прямолінійному русі вздовж осі  $x$  ( $v = w = 0; u \neq 0$ ), коли складова швидкості  $u$  зменшується в напрямку осі  $y$ , тобто  $\frac{\partial u}{\partial y} < 0$ , то згідно з формулою (2.3) виникає додатний вихор  $\Omega_z$ . На рис. 2.1 представлено саме такий потік.

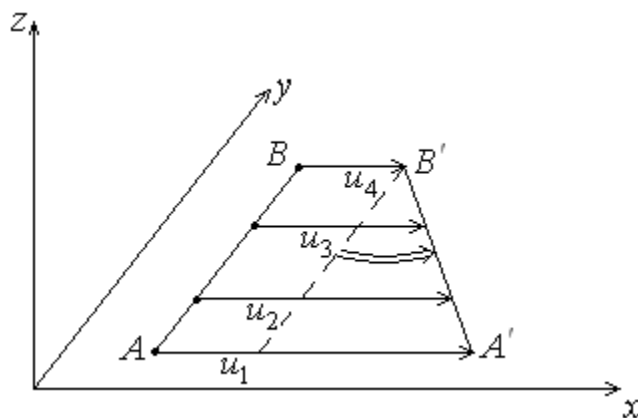


Рисунок 2.1 – Схема прямолінійного потоку, в якому  $\frac{\partial u}{\partial y} < 0$

Видно, що за рахунок зміни швидкості руху в напрямку, перпендикулярному до потоку, частинки середовища, які розташовані на лінії  $AB$ , через одиницю часу займуть положення  $A'B'$ . Видно, що частинки здійснюють поворот в горизонтальній площині проти годинникової стрілки на кут, який на рисунку показано подвійною стрілкою. Оскільки проти годинникової стрілки частинки повітря рухаються в циклонах, додатний вихор називається циклонічним. Від'ємний вихор, який описує обертальний рух за годинниковою стрілкою, називається антициклонічним.

## 2.2 Відносний і абсолютний вихори

У попередніх розділах були отримані основні характеристики руху в неінерційній системі відліку, пов'язаній з обертовою Землею. Представляють інтерес вказані характеристики в інерційній системі відліку. Насамперед це відноситься до вектору вихору швидкості і циркуляції швидкості.

Вихор, спостережуваний в інерційній системі відліку, називається абсолютним вихором  $\vec{\Omega}_a$ .

Абсолютний вихор визначається по абсолютній швидкості таким чином

$$\vec{\Omega}_a = \nabla \times \vec{V}_a = \nabla \times (\vec{V} + \vec{\omega} \times \vec{r}) = \vec{\Omega} + 2\vec{\omega}, \quad (2.8)$$

де  $\nabla \times \vec{V} = \vec{\Omega}$  - відносний вихор швидкості, а величина  $\nabla \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$  знаходиться за правилами подвійного векторного добутку і дорівнює планетарному вихору  $2\vec{\omega}$ , який представляє подвоєну кутову швидкість обертання Землі  $\vec{\omega}$ .

Таким чином, абсолютний вихор будь-якої рідкої частинки представляє собою суму планетарного вихору  $2\vec{\omega}$  і відносного вихору швидкості  $\vec{\Omega}$ .

Підкреслимо, що абсолютний вихор відображає той факт, що частинка бере участь у обертальному русі разом з Землею, він завжди відмінний від нуля. Навіть в тому випадку, коли відносно Землі рух є безвихорим ( $\vec{\Omega} = 0$ ),  $\vec{\Omega}_a \neq 0$ .

Оцінімо внесок планетарного вихору і відносного вихору швидкості у величину абсолютного вихору. Покажемо це на прикладі вертикальних складових вказаних векторів, які відображають інтенсивність обертального руху в горизонтальній площині (дотичній до земної поверхні). Складова планетарного вихору, перпендикулярна поверхні Землі, дорівнює

$$\ell = 2\omega \sin\varphi, \quad (2.9)$$

де  $\varphi$  - географічна широта, на якій знаходиться елементарний об'єм рідини, який розглядається.

Величина  $\ell$  називається параметром Коріоліса.

### 2.3 Рівняння відносного і абсолютного вихору

Практично всі процеси, які спостерігаються в атмосфері, мають вихровий характер. У випадку великомасштабних рухів, в яких горизонтальна складова на 2-3 порядки більша від вертикальної, основну роль відіграє вертикальна складова ( $\Omega_z$ ) вихору швидкості руху:

$$\Omega_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (2.10)$$

Рівняння руху є висновком з рівнянь руху, які запишемо в такому вигляді:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \ell v + F_x, \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - \ell u + F_y, \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g + \ell_1 v + F_z. \quad (2.13)$$

де  $F_x, F_y, F_z$  – проекції сили тертя, яка діє на одиницю маси повітря.

Структура виразу (2.10) підказує, як слід поступити з рівняннями руху для отримання рівняння для вертикальної проекції вихору швидкості руху. Так, для того отримати рівняння для  $\Omega_z$ , потрібно рівняння (2.11) продиференціювати по  $y$ , а рівняння (2.12) – по  $x$  і з отриманого таким чином другого рівняння відняти перше.

Нове рівняння матиме вигляд

$$\begin{aligned} \frac{d(\Omega_z + 2\omega_z)}{dt} = & -(\Omega_z + 2\omega_z) \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \left( \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \\ & + \left( 2\omega_x \frac{\partial w}{\partial x} + 2\omega_y \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{1}{\rho^2} (\nabla p \times \nabla \rho)_z + (\nabla \times \vec{F})_z, \end{aligned} \quad (2.14)$$

При цьому враховувалось, що локальна похідна за часом від вертикальної проекції переносного вихору і дивергенція цієї складової дорівнюють нулю.

Два останніх доданки в рівнянні (2.14) являють собою проекції на вісь  $z$  векторного добутку градієнта густини і тиску повітря

$$\nabla p \times \nabla \rho = \vec{i} \left( \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\partial \rho}{\partial z} \frac{\partial p}{\partial y} \right) + \vec{j} \left( \frac{\partial \rho}{\partial z} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial z} \right) + \vec{k} \left( \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{\partial p}{\partial x} \right)$$

і вихору сили тертя

$$\nabla \times \vec{F} = \vec{i} \left( \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) + \vec{j} \left( \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) + \vec{k} \left( \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right).$$

Аналогічно можна отримати рівняння і для проєкцій вихору  $\Omega_x$  і  $\Omega_y$  застосовуючи вирази (1.53, 1.59):

$$\begin{aligned} \frac{d(\Omega_x + 2\omega_x)}{dt} = & -(\Omega_x + 2\omega_x) \left( \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) - \left( \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \\ & + \left( 2\omega_y \frac{\partial u}{\partial y} + 2\omega_z \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \frac{1}{\rho^2} (\nabla p \times \nabla \rho)_x + (\nabla \times \vec{F})_x, \end{aligned} \quad (2.15)$$

$$\begin{aligned} \frac{d(\Omega_y + 2\omega_y)}{dt} = & -(\Omega_y + 2\omega_y) \left( \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \left( \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \\ & + \left( 2\omega_z \frac{\partial v}{\partial z} + 2\omega_x \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{1}{\rho^2} (\nabla p \times \nabla \rho)_y + (\nabla \times \vec{F})_y, \end{aligned} \quad (2.16)$$

Якщо тепер ліву і праву частини рівнянь (1.14) – (2.16) помножити відповідно на  $\vec{k}$ ,  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$ , а потім їх скласти, то отримаємо рівняння для абсолютного вихору  $\vec{\Omega}_a = \vec{\Omega} + \vec{\Omega}_E$ :

$$\frac{d\vec{\Omega}_a}{dt} = (\vec{\Omega}_a \cdot \nabla) \vec{c} - \vec{\Omega}_a (\nabla \cdot \vec{c}) + \frac{(\nabla p \times \nabla \rho)}{\rho^2} + (\nabla \times \vec{F}), \quad (2.17)$$

де оператори

$$(\vec{\Omega}_a \cdot \nabla) \vec{c} = \left( \Omega_{ax} \frac{\partial}{\partial x} + \Omega_{ay} \frac{\partial}{\partial y} + \Omega_{az} \frac{\partial}{\partial z} \right) (\vec{i}u + \vec{j}v + \vec{k}w), \quad (2.18)$$

$$\vec{\Omega}_a (\nabla \cdot \vec{c}) = (\vec{i}\Omega_{ax} + \vec{j}\Omega_{ay} + \vec{k}\Omega_{az}) \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right). \quad (2.19)$$

Безпосередньою перевіркою переконуємося в тому, що проєкції на осі  $x$ ,  $y$ ,  $z$  правої частини рівняння (1.70) співпадають з правими частинами рівнянь (2.14) – (2.16).

Рівняння для відносного вихору  $\vec{\Omega}$  швидкості вітру у векторній формі матиме вигляд:

$$\rho \frac{d}{dt} \left( \frac{\vec{\Omega} + \vec{\omega}}{\rho} \right) = [(\vec{\Omega} + \vec{\omega}) \cdot \nabla] \vec{c} + \frac{(\nabla p \times \nabla \rho)}{\rho^2} + \nabla \times \vec{F}. \quad (2.20)$$

Перепишемо рівняння для вертикальної проекції вихору швидкості руху (2.14) відносно локальної похідної, врахувавши, що локальна похідна за часом від вертикальної проекції переносного вихору і дивергенція цієї складової дорівнюють нулю:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Omega_z}{\partial t} = & - \left( u \frac{\partial \Omega_z}{\partial x} + v \frac{\partial \Omega_z}{\partial y} \right) - w \frac{\partial \Omega_z}{\partial z} - \beta v - \\ & - (\Omega_z + 2\omega_z) \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \left( \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \\ & + \frac{1}{\rho^2} \left( \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \left( \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right), \end{aligned} \quad (2.21)$$

де  $\beta = \frac{\partial(2\omega_z)}{\partial y} = \frac{\partial(2\omega \cos \varphi)}{a}$  – параметр Россбі,  $a$  – радіус Землі (вісь  $y$  спрямована уздовж дотичної до меридіану).

Згідно з рівнянням (2.21), зміна вихору з часом у фіксованій точці простору визначається наступними чинниками:

1. Адвекція вихору, яка забезпечує зростання  $\Omega_z$  в передній частині циклону і зменшення  $\Omega_z$  в тилівій. Під впливом саме цього фактору тиск повітря в передній частині циклону часто зменшується, а в тилівій – збільшується. Аналогічний висновок є справедливим відносно антициклону: в його передній частині  $\Omega_z$ , яке є меншим за нуль, з часом зменшується, а в тилівій частині зростає. В цілому адвективний фактор забезпечує перенесення вихору зі швидкістю вітру на рівні поверхонь 700 або 500 гПа.

2. Конвекція вихору, яка забезпечує поширення вихору з одних рівнів на інші.

3. Меридіональне перенесення повітряної маси і вихору: рух на північ супроводжується послабленням циклонічного і посиленням антициклонічного вихору, рух на південь – посиленням циклонічного вихору і послабленням антициклонічного.

Якщо три перших доданки в правій частині рівняння (1.78) перенести в ліву частину і об'єднати їх з локальною похідною  $\frac{\partial \Omega_z}{\partial t}$ , то рівняння матиме вигляд:

$$\begin{aligned} \frac{d(\Omega_z + 2\omega_z)}{dt} = & - (\Omega_z + 2\omega_z) \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \left( \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \\ & + \frac{1}{\rho^2} \left( \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \left( \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right), \end{aligned} \quad (2.22)$$

де  $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z}$  – знак повної (індивідуальної) похідної, яка характеризує зміну величини всередині повітряного об'єму, який рухається.

Сума  $\Omega_z + 2\omega_z$  – вертикальна проекція абсолютного вихору. У випадку, коли всі доданки правої частини (1.75) обертаються на нуль, то абсолютний вихор в повітряному об'ємі, що рухається, зберігає постійне значення (теорема Россбі):

$$\Omega_z + 2\omega_z = const.$$

Таким чином, роль перших трьох доданків правої частини рівняння (1.78) в сполученні з локальною похідною зводиться до перенесення в незмінному вигляді абсолютного вихору разом з об'ємом повітря, що рухається.

В рівнянні (1.79) всі доданки правої частини породжують новий або змінюють існуючий вихор. Їх можна назвати динамічними факторами зміни вихору.

4. Дивергенція горизонтальної швидкості вітру: від'ємна дивергенція породжує новий або посилює існуючий циклонічний вихор; додатна дивергенція породжує новий або посилює існуючий антициклонічний вихор (перший множник  $\Omega_z + 2\omega_z$  в цьому доданку є завжди додатним, оскільки  $2\omega_z > |\Omega_z|$ ).

5. Зміна вертикальної швидкості по горизонталі (найбільш значна роль цього фактору в гірській місцевості).

6. Барокліний фактор. Розглянемо його в загальному вигляді  $\frac{1}{\rho^2} \nabla p \times \nabla \rho$ . Коли ізобаричні та ізостеричні поверхні не співпадають, рідина є барокліною і для неї барокліний вектор  $\frac{1}{\rho^2} \nabla p \times \nabla \rho \neq 0$ . Відносний вихор змінюється з часом за умови, якщо барокліний вектор відрізнятиметься від нуля. Для ілюстрації цього механізму розглянемо рис. 1.8. Вектори  $\nabla p$  і  $\nabla \rho$  лежать в площині  $A$ . В розглянутому випадку на більш легку рідину праворуч діє та ж сила тиску ( $-\nabla p$ ), що і на важку рідину – ліворуч. Внаслідок цього більш легка рідина рухатиметься швидше, ніж більш важка (при відсутності інших ефектів).

Отже, швидкість руху часток змінюватиметься в просторі. Такий рух згідно з першою теоремою Гемгольца можна представити у вигляді суми поступального і обертального переміщення часток. В результаті уздовж контуру  $C$  виникатиме циркуляція проти годинникової стрілки. Внаслідок дії барокліного фактору утворюватимуться ізобаро-ізостеричні трубки.

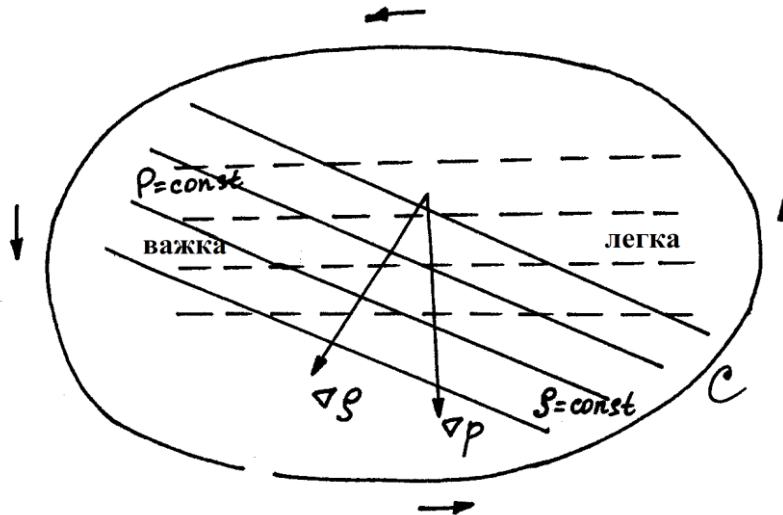


Рисунок 2.2 – До впровадження барокліного фактору

В баротропній рідині ( $\rho = \rho(p)$ ) поверхні рівних значень тиску і густини співпадають, тому барокліний фактор дорівнюватиме нулю.

Таким чином, можна зробити висновок, що барокліний фактор, відмінний від нуля, згідно з рівнянням (2.22) породжуватиме новий або посилюватиме існуючий вихор у вертикальній площині.

7. Вертикальна складова вихору сили тертя, яка діє на одиночну масу повітря. З фізичних уявлень і кількісних оцінок випливає, що під впливом цього фактору послаблюється як циклонічний, так і антициклонічний вихор (циклон заповнюється, антициклон руйнується).

В граничному шарі, де вплив сили тертя найбільш суттєвий, сьомий доданок правої частини (2.22) є протилежний з знаком четвертому (дивергентному) доданку і має з ним однаковий порядок. Це означає, що ці фактори в значній мірі компенсують один одного, а їх сума є близькою до нуля.

Більш того, сума

$$2\omega_z \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \left( \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right)$$

строго обертається на нуль в усіх моделях граничного шару атмосфери, якщо в рівняннях руху знехтували нестационарністю і зміною густини повітря по горизонталі.

Оскільки розглядається рух на обертовій Землі, то потрібно дослідити динаміку абсолютного вихору. З цією метою скористаємось рівнянням руху в'язкої рідини в формі (1.80a)

$$\rho \left( \frac{d\vec{V}}{dt} + 2\vec{\omega} \times \vec{V} \right) = -\nabla P - \rho \nabla \Phi + \mu \nabla^2 \vec{V}.$$



Врахуємо, що

$$\begin{aligned}\nabla^2 \vec{V} &= \text{grad div} \vec{V} - \text{rot rot} \vec{V}, \\ (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} &= \text{rot} \vec{V} \times \vec{V} + \text{grad} \left( \frac{V^2}{2} \right).\end{aligned}\quad (2.23)$$

Для нестисливої рідини ( $\text{div} \vec{V} = 0$ )

$$\nabla^2 \vec{V} = -\text{rot rot} \vec{V}.\quad (2.24)$$

Якщо врахувати, що масова сила  $F$  є сума сил тяжіння і Кориоліса, а сила тяжіння має потенціал  $\Phi$ ,  $\text{rot} \vec{V} = \vec{\Omega}$ , то рівняння (2.24) в системі координат, пов'язаній з обертовою Землею, прийме такий вигляд:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{\Omega} + 2\vec{\omega}) \times \vec{V} = -\text{grad} \left( \frac{V^2}{2} + \Phi + \frac{P}{\rho} \right) - \frac{\mu}{\rho} \text{rot} \vec{\Omega}.\quad (2.25)$$

Таким чином отримано рівняння руху для в'язкої нестисливої рідини в формі Громеко – Лемба, яке можна переписати у вигляді:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{\Omega}_a \times \vec{V} = -\frac{\nabla P}{\rho} - \nabla \left( \Phi + \frac{V^2}{2} \right) + \nu \nabla^2 \vec{V},\quad (2.26)$$

де  $\vec{\Omega}_a = 2\vec{\omega} + \vec{\Omega}$  - абсолютний вихор,  $\vec{\Omega} = \nabla \times \vec{V}$  - відносний вихор,  $2\vec{\omega}$  - планетарний або планетарний вихор.

Застосуємо до обох частин (2.26) операцію  $\text{rot}$ :

$$\frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial t} + \nabla \times (\vec{\Omega}_a \times \vec{V}) = \frac{\nabla \rho \times \nabla P}{\rho^2} + \nu \nabla \times (\nabla^2 \vec{V}).\quad (2.27)$$

Для будь-яких двох векторів  $\vec{A}$  і  $\vec{B}$  справедливе співвідношення

$$\nabla \times (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{A}(\nabla \cdot \vec{B}) + (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{A} - \vec{B}(\nabla \cdot \vec{A}) - (\vec{A} \cdot \nabla) \vec{B}\quad (2.28)$$

Тому

$$\nabla \times (\vec{\Omega}_a \times \vec{V}) = \vec{\Omega}_a (\nabla \cdot \vec{V}) + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{\Omega}_a - (\vec{\Omega}_a \cdot \nabla) \vec{V},\quad (2.29)$$

оскільки  $\nabla \cdot \vec{\Omega}_a = 0$ .

З урахуванням першої формули (2.28), застосованої до вектора  $\vec{\Omega}$ , дістанемо

$$\begin{aligned} \nabla^2 \vec{\Omega} &= -\text{rot rot } \vec{\Omega} \quad \text{і} \\ \text{rot}(\nabla^2 \vec{V}) &= \text{rot}(\text{grad div } \vec{V} - \text{rot rot } \vec{V}) = 0 - \text{rot rot } \vec{\Omega} = \nabla^2 \vec{\Omega}. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Підставляючи (2.29) і (2.30) в (2.27), дістанемо

$$\frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{\Omega}_a - (\vec{\Omega}_a \cdot \nabla) \vec{V} + \vec{\Omega}_a (\nabla \cdot \vec{V}) = \frac{\nabla \rho \times \nabla p}{\rho^2} + \nu \nabla^2 \vec{\Omega}. \quad (2.31)$$

З (2.31) знайдемо вирази для повної похідної від абсолютного вихору

$$\frac{d \vec{\Omega}_a}{dt} = \frac{d \vec{\Omega}}{dt} = (\vec{\Omega}_a \cdot \nabla) \vec{V} - \vec{\Omega}_a (\nabla \cdot \vec{V}) + \frac{\nabla \rho \times \nabla p}{\rho^2} + \nu \nabla^2 \vec{\Omega}, \quad (2.32)$$

оскільки  $\frac{d}{dt}(2\vec{\omega}) = 0$ .

Розглянемо фізичне визначення отриманого рівняння вихору (2.32). Швидкість зміни абсолютного вихору рухомої рідкої частинки визначається чотирма членами в правій частині цього рівняння. Дамо фізичну інтерпретацію першим двом членам правої частини. З цією метою розглянемо довільну точку  $P$  в рідині і виберемо локальну декартову систему координат так, щоб в точці  $P$  вісь  $z$  була дотичною до нитки абсолютного вихору, яка проходить через точку  $P$  (рис. 4.8). В цій системі координат  $\vec{\Omega}_a = \Omega_a \vec{k}$ ,  $\Omega_a = |\vec{\Omega}_a|$ .

Тоді в точці  $P$  перші два члени (3.32) можна представити у вигляді

$$\begin{aligned} (\vec{\Omega}_a \cdot \nabla) \vec{V} - \vec{\Omega}_a (\nabla \cdot \vec{V}) &= (\Omega_a \vec{k} \cdot \nabla) \vec{V} - \Omega_a \vec{k} (\nabla \cdot \vec{V}) = \\ &= \Omega_a \frac{\partial}{\partial z} (u \vec{i} + v \vec{j} + w \vec{k}) - \Omega_a \vec{k} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = \\ &= \vec{i} \Omega_a \frac{\partial u}{\partial z} + \vec{j} \Omega_a \frac{\partial v}{\partial z} - \vec{k} \Omega_a \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right), \end{aligned} \quad (2.33)$$

де  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$ ,  $\vec{k}$  - одиничні вектори вздовж осей  $x$ ,  $y$  і  $z$ .

Розглянемо швидкість зміни компоненти абсолютного вихору вздовж осі  $z$ . Нагадаємо, що вектор вихідного вихору був напрямлений вздовж  $z$  і його  $z$ -компонента рівна  $\Omega_a$ .

Тоді зміна цієї компоненти з часом в рухомій рідкій частинці при відсутності ефектів бароклинності і тертя виражається співвідношенням

$$\frac{d}{dt}(\bar{\Omega}_a)_z = -(\bar{\Omega}_a)_z \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right), \quad (2.34)$$

тобто дорівнює добутку модуля вихідного абсолютного вихору на дивергенцію швидкості в площині, перпендикулярній  $\bar{\Omega}_a$ .

Якщо дивергенція від'ємна, то  $\frac{d}{dt}(\bar{\Omega}_a)_z > 0$  і нитки абсолютного вихору будуть збиратися, стаючи ближче одна до одної.

При цьому величина вектору вихору збільшується, а площа поперечного перетину локальної вихрової трубки меншає.

Згідно з (1.35)

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{s} \frac{ds}{dt},$$

де  $s$  – площа поперечного перетину вихрової трубки в площині  $XOY$ . Тоді, підставивши (1.35) в (2.34), знайдемо

$$\frac{d(\bar{\Omega}_a)_z}{dt} = \frac{d(\bar{\Omega}_a)_z}{s} \frac{ds}{dt}$$

або

$$\frac{d[(\bar{\Omega}_a)_z s]}{dt} = 0, \quad (\bar{\Omega}_a)_z s = const. \quad (2.35)$$

Отже, добуток площі поперечного перетину вихрової трубки на компоненту вектора абсолютного вихору в напрямі, перпендикулярному до вказаного перетину, є постійна величина, що еквівалентно теоремі Кельвіна. За рахунок впливу дивергентного чинника інтенсивність вихрової трубки зберігається при русі. Описаний механізм збільшення компоненти абсолютного вихору в напрямі нитки можна трактувати як механізм розтягнення вихрової трубки, оскільки зменшення площі поперечного перетину трубки в квазінестисливій рідині досягається за рахунок витягнення рідкої трубки вздовж її довжини так, щоб об'єм її зберігався.

Розглянемо тепер швидкість збільшення компоненти абсолютного вихору в  $x$ -напрямі, тобто в напрямі, перпендикулярному вихровій нитці. У відповідності з (2.34) швидкість збільшення цієї компоненти дорівнює  $\Omega_a \frac{\partial u}{\partial z}$ .

За проміжок часу  $\delta t$  приріст  $x$ -компоненти абсолютного вихору буде

складати

$$\delta(\vec{\Omega}_a)_x = \Omega_a \frac{\partial u}{\partial z} \delta t = \Omega_a \frac{\delta x}{\delta z}. \quad (2.36)$$

Тоді

$$\frac{\delta(\vec{\Omega}_a)_x}{\Omega_a} = \operatorname{tg} \gamma \quad \text{и} \quad \frac{\delta x}{\delta z} = \operatorname{tg} \gamma. \quad (2.37)$$

Перша рівність (2.36) дає кут нахилу вихрової нитки, а друге - кут нахилу елемента рідкої лінії. Згідно з (2.37) ці кути співпадають. Таким чином, із-за зсуву поля швидкості елемент рідкої лінії нахиляється на кут  $\gamma$  і згідно з (2.36) внаслідок цього виникає паралельна осі  $x$  компонента вектора вихору. Ця компонента рівна  $x$ - компоненті вектору абсолютного вихору в момент часу  $t + \delta t$ , який сам нахиляється на той же кут, що і рідка лінія. Це є вияв того факту, що нитки абсолютного вихору за відсутності інших ефектів рухаються разом з рідиною. Аналогічні міркування застосовні і до  $y$ -напрямку.

Перші два члени правої частини (2.37) не є вихретвірними для абсолютного вихору. В той же час важливо відмітити, що якщо  $\Omega$  спочатку дорівнював нулю, то вигин і дивергенція ниток абсолютного вихору через відносний рух рідини в полі планетарного вихору будуть за відсутності інших ефектів створювати відносний вихор.

Отримані результати витікають із досліджень А.А.Фрідмана, який показав, що для збереження векторних ліній вектора  $\vec{A}$  і інтенсивності векторних трубок необхідно і достатньо, щоб

$$\frac{d\vec{A}}{dt} - (\vec{A} \cdot \nabla) \vec{V} + \vec{A} (\nabla \cdot \vec{V}) = 0. \quad (2.38)$$

Якщо  $\vec{A} \equiv \Omega_a$ , то рівняння (2.38) точно співпадає з (2.36) за відсутності ефектів бароклинності і в'язкості.

Третій член в рівнянні (2.33) описує внесок ефекту бароклинності на зміну з часом абсолютного і відносного вихору в рухомій рідині. Дійсно, векторний добуток  $\nabla \rho \times \nabla p$  відмінний від нуля лише для бароклинної рідини, в якій ізобаро- ізостеричні поверхні перетинаються. Тому, якщо в початковий момент  $t$  абсолютний або відносний вихори були відсутні, то за рахунок бароклинного механізму в момент  $t + \delta t$  ці вихори появляються.

Четвертий член в рівнянні (2.33) відображає зміни абсолютного і відносного вихорів за рахунок ефектів в'язкості, які породжують дифузію відносного вихору.

Як виходить із векторного аналізу, якщо  $\nabla^2\Omega > 0$ , то середнє значення  $\Omega$  на нескінченно малому колі з центром в досліджуваній точці більше за його значення в цій точці. Якщо  $\nabla^2\Omega < 0$ , то середнє значення менше значення в самій точці.

Із рівняння вихору (2.33) витікає, що при додатному  $\nabla^2\Omega$  за рахунок внеску члена  $v\nabla^2\Omega$  вихор<sup>1</sup> буде зростати з часом, а при від'ємному  $\nabla^2\Omega$  - зменшуватися з часом.

Таким чином, в'язкість прагне зрівняти значення  $\Omega$  в просторі.

Процес вирівнювання величин вихорів є дифузія вихорів. Отже, в'язкісний член в рівнянні вихору визначає його зміну за рахунок дифузії відносного вихору.

## 2.4 Потенціальний вихор

У попередньому розділі було виведене рівняння вихору і виписані основні фізичні механізми, що визначають зміну вихору з урахуванням його векторного характеру. Нарівні з цим в геофізичній гідродинаміці широке поширення дістав метод аналізу, заснований на інваріантних величинах, тобто таких що не змінюються у часі в рухомому елементарному об'ємі. До них відносяться так звані адіабатичні інваріанти, наприклад, ентропія, потенціальна температура, потенціальна густина. Широке застосування в геофізичній гідродинаміці дістав потенціальний вихор, який представляє собою комбінацію абсолютного вихору і градієнта будь-якої скалярної величини  $\lambda$ , що задовольняє рівняння вигляду

$$\frac{d\lambda}{dt} = \psi, \quad (2.39)$$

де  $\psi$  – деяке джерело характеристики  $\lambda$ .

Якщо  $\lambda$  є термодинамічна функція і тому  $\lambda = \lambda(p, \rho)$ , то в рівнянні (2.39)  $\psi$  є, наприклад, зовнішній приплив тепла.

У цьому випадку

$$\nabla\lambda = \frac{\partial\lambda}{\partial p} \nabla p + \frac{\partial\lambda}{\partial \rho} \nabla \rho \quad (2.40)$$

і скалярний добуток  $\nabla\lambda$  на бароклінний вектор  $\nabla\rho \times \nabla p$  обертається в нуль, т.т. цей бароклінний вектор лежить на поверхні сталої  $\lambda$  (рис.4.10).

---

<sup>1</sup> Далі при використанні терміна "вихор" будемо мати на увазі, що це відноситься і до абсолютного, і до відносного вихору.

Обмежимо розглядом процесів поза в'язкісними шарами, що звичайно розташовані поблизу підстилаючих поверхонь.

Тоді згідно з (2.15) при відсутності тертя

$$\frac{d}{dt} \int_s (\vec{\Omega}_a \cdot \vec{n}) ds = \int_s \frac{\nabla \rho \times \nabla p}{\rho^2} \cdot \vec{n} ds, \quad (2.41)$$

де  $s$  – площа довільної рідкої поверхні, а  $\vec{n}$  – вектор одиничної нормалі до цієї поверхні. Допустимо, що контур  $C$ , обмежуючий  $s$ , вибраний спочатку лежачим на поверхні  $\lambda = \text{const}$  (рис.4.10). Тоді в силу збереженості  $\lambda$  при  $\psi = 0$ , поверхня  $\lambda = \lambda_0$  складається весь час з одних і тих же частинок, т.т.  $\lambda = \lambda_0$  представляє собою рідку поверхню, а контур  $C$  – рідку лінію і весь час лежить на цій поверхні. Як було уже показано, якщо  $\lambda$  – термодинамічна функція, то барокліний вектор лежить на цій поверхні і, отже, права частина рівняння (4.5.3) дорівнює нулю. Отже виконується співвідношення

$$\frac{d}{dt} (\vec{\Omega}_a \cdot \vec{n} \delta s) = 0, \quad (2.42)$$

де  $\delta s$  – малий елемент площини, охопленої контуром  $C$ , а  $\vec{\Omega}_a$  – середня величина вихору по площі  $\delta s$ , близька до значення  $\vec{\Omega}_a$  в центрі  $\delta s$ .

Перепишемо (2.42), замінивши скалярний добуток через модулі відповідних векторів і кут  $\alpha$  між ними,

$$\frac{d}{dt} (|\vec{\Omega}_a| \delta s \cos \alpha) = 0. \quad (2.43)$$

Підкреслимо, що кут  $\alpha$  – також кут між  $\vec{\Omega}_a$  і  $\nabla \lambda$ .

Позначимо через  $\delta \lambda$  різницю значень  $\lambda$  на двох дуже близьких поверхнях постійних  $\lambda$ , а  $\delta n$  – відстань між ними. Величина  $\delta \lambda$  і маса рідини  $\rho \delta s \delta n$ , яка міститься в об'ємі  $\delta s \delta n$ , зберігаються при русі, т.т.

$$\frac{d}{dt} (\rho \delta s \delta n) = 0 \quad \text{и} \quad \frac{d}{dt} (\delta \lambda) = 0. \quad (2.44)$$

Звідси виходить інваріантність величини

$$\frac{d}{dt} \frac{|\vec{\Omega}_a| \cos \alpha \delta \lambda}{\rho \delta n} = 0. \quad (2.45)$$

Переходячи до границі при  $\delta n \rightarrow 0$  і до скалярного добутку, отримаємо

$$\frac{d}{dt} \left( \bar{\Omega}_a \frac{\nabla \lambda}{\rho} \right) = 0. \quad (2.46)$$

Звідси виходить, що

$$\Pi = \bar{\Omega}_a \cdot \frac{\nabla \lambda}{\rho} \quad (2.47)$$

зберігається в кожній рідкій частинці. Скалярна величина  $\Pi$  називається потенціальним вихором.

Оскільки  $\Pi$  зберігається при русі рідкої частинки, то коли відстань між двома  $\lambda$  – поверхнями збільшується, то  $\nabla \lambda$  повинен зменшуватися, а проекція вектора  $\bar{\Omega}_a / \rho$  на напрямок  $\nabla \lambda$  повинна пропорційно збільшуватись. Якщо густина змінюється не дуже сильно, то збільшення  $\bar{\Omega}_a / \rho$  зводиться до збільшення  $\bar{\Omega}_a$ . Таким чином, можна представити собі, що існує деякий запас завихреності, пов'язаний з наявністю градієнта  $\lambda$ , який може витратитись при віддаленні  $\lambda$  - поверхонь одна від одної через дію механізму розтягнення вихорових трубок.

Таким чином, механізм розтягнення або стиснення вихорових трубок приводить до зміни проекції абсолютного вихору на напрямок градієнта  $\lambda$ .

Зміна проекції абсолютного вихору складається із змін сум проекцій відносного і планетарного вихорів. Оскільки напрямки  $\bar{\omega}$  і  $\nabla \lambda$  не змінюються з часом, т.т. кут між ними залишається постійним, то зміна величини  $|\nabla \lambda|$  приводить до зміни модуля і напрямку відносного вихору.

Іншими словами механізм розтягнення вихрових трубок може індукувати відносну завихреність при русі рідких частинок в полі планетарного вихору.

Розглянемо геофізичне застосування поняття потенціального вихору. Як було показано, вертикальна стійкість середовища визначається стратифікацією потенціальної густини, яка є функцією від ентропії і термодинамічно активної домішки. В зв'язку з цим при використанні поняття потенціального вихору як функції  $\lambda$  можна використовувати ентропію і потенціальний вихор запишеться у вигляді

$$\tilde{\Omega} = \rho^{-1} \bar{\Omega}_a \cdot \nabla \eta. \quad (2.48)$$

Величина  $\tilde{\Omega}$  об'єднує в собі ефекти обертання ( $\bar{\Omega} + 2\bar{\omega}$ ) і стратифікації ( $\nabla \eta$ ). Можна показати, що проекція рівняння вихору (4.3.7) на термодинамічну вертикаль являє собою рівняння зміни потенціального вихору  $\tilde{\Omega}$  вздовж траєкторії руху. Під термодинамічною вертикаллю ми розуміємо напрямок  $\bar{e} = \nabla \eta / |\nabla \eta|$  найбільшої зміни ентропії в даній точці.

Оскільки для атмосферних процесів глобальних масштабів ізентропічні поверхні приблизно горизонтальні, то напрямок  $\vec{e}$  близький до вертикального.

У зв'язку з цим при дослідженні атмосферних адіабатичних процесів (у разі відсутності фазових переходів) як потенціального вихору використовується величина адіабатичного лагранжевого інваріанту

$$\frac{\Omega_z + 2\omega_z}{\rho} \frac{\partial \theta}{\partial z}. \quad (2.49)$$

## 2.5 Принцип ізентропічного аналізу

Звичним нам і загальноприйнятим є ізобаричний аналіз тривимірної структури атмосферних полів (коли ця структура характеризується набором карт рухів і температури на ізобаричних поверхнях). Перевагою ізобаричного аналізу є те, що тиск усюди безперервно і завжди падає з висотою, а також те, що вітер у вільній атмосфері дме уздовж ізобар, і що основні погодні системи виявляються саме в полі тиску. Недоліками цього аналізу є те, що тривимірні траєкторії частинок не лежать на ізобаричних поверхнях і, отже, картами баричної топографії неможливо оцінити вертикальних переміщень повітряних частинок.

Альтернативою ізобаричного аналізу є ізентропічний аналіз. В цьому випадку як вертикальна координата використовується потенціальна температура. У середньому стратифікація є стійкою, і потенціальна температура монотонно зростає з висотою. Тривимірна структура представляється за допомогою набору карт ізентропічних поверхонь. Гідність цього методу – у тому, що потенціальна температура є інваріантом адіабатичних процесів і, отже, ізентропічні поверхні є матеріальними поверхнями, тобто в адіабатичному процесі складаються з тих самих матеріальних частинок. Частина, рухаючись такою поверхнею, нікуди з неї не йде і, отже, траєкторії руху частинок на ній є тривимірними: видно вертикальні рухи частинок. Якщо має місце конденсація (при підйомі),

На додаток до координати  $\theta$ , при ізентропічному аналізі розраховується потенціальний вихор Ертеля  $PV$ , який, як бачили, є інваріантом системи примітивних рівнянь. Поверхні постійного  $PV$  також є матеріальними в адіабатичному наближенні, а якщо ми проведемо ізолінії  $PV$  на ізентропічній поверхні, то такі лінії будуть матеріальними лініями, тобто складаються з одних і тих же частинок. Такий аналіз кращий на дослідження тривимірної структури рухів. Так, проводячи траєкторії частинок на ізентропічних поверхнях, ми можемо стежити за переміщенням індивідуальних частинок. На кінцях траєкторій (напр., 12-годинних) повинні збігатися значення потенціального вихору. Різниця



тисків у початковій та кінцевій точках траєкторій показує зміну тиску в індивідуальній частинці,

Такий спосіб розрахунку вертикальних швидкостей є найнадійнішим. У порівнянні з іншими методами (особливо у верхній тропосфері), до того ж він дуже наочний. Крім припущення адіабатичності, інших припущень немає.

Ізентропічний аналіз був запропонований у 1930-х роках. Дж. Немаесом (J. Namias), потім на якийсь час був забутий, - коли швидко розвивався ізобаричний аналіз. З кінця 50-х років він знову став широко використовуватися з розвитком мезомасштабних досліджень у роботах Danielsen, Reiter, Bleck, Petersen, Browning, Ludlam, Hobbs, Carlson та ін. За допомогою ізентропічного аналізу було отримано важливі результати.

### 2.5.1 Поняття динамічної тропопаузи

З ізентропічним аналізом та з концепцією потенціального вихору Ертеля пов'язане поняття про динамічну тропопаузу, що має велике прикладне значення.

Як відомо, згідно з визначенням ВМО (1957), скоригованим у 1986 р., тропопаузою вважається рівень, на якому вертикальний градієнт температури стає рівним  $0.2^{\circ}\text{C}/100\text{ м}$ , за умови, що він залишається рівним або меншим цього значення у шарі вище товщиною 2 км. . Визначається таким чином тропопауза називається термічною.

Фізичний сенс тропопаузи полягає в тому, що вона є межею між тропосферою та стратосферою. Ці дві сфери відрізняються за термічною стратифікацією. Вони відрізняються також хімічним складом (озон, радіоактивні домішки), отже стратосферне повітря відрізняється за складом від тропосферного.

Перші роботи з ізентропічного аналізу показали, що значення PV в тропосфері і стратосфері відрізняються на порядок величини. Так, у тропосфері PV має порядок  $0.3 - 0.6\text{ рvи}$ , де  $\text{рvи}$  – прийнята міжнародна одиниця виміру потенціального вихору Ертеля:

$$\text{рvи} = 10^{-6}\text{ м}^2\text{Ккг}^{-1}\text{с}^{-1}$$

У стратосфері PV має порядок  $10\text{ рvи}$  та зростає з висотою до кількох десятків  $\text{рvи}$ . У перехідному шарі від тропосфери до стратосфери – тобто у шарі тропопаузи – PV змінюється від тропосферних до стратосферних значень. Користуючись цим, можна відрізнити тропосферне повітря від стратосферного та виділяти «субстратосферне» повітря перехідного шару. Було проведено низку досліджень відповідності між термічною тропопаузою та тропопаузою, що визначається за потенціальним вихором Ертеля та названою динамічною тропопаузою. Серед перших була наша робота (Борисова, Шакіна, 1989), заснована на даних ПГЕП північною півкулею. З'явилася робота К. Ноінка (1998). В обох роботах було

знайдено, що термічна тропопауза відповідає найближче із поверхні 4 *рви*. У роботі вказувалося, що є сезонний хід – від 3.5 *рви* в холодний період року по 4,5 *рви* у теплий період. Але в середньому за рік теж виходило 4 *рви*. Субстратосферне повітря рахується в інтервалі від 1 *рви* до тропопаузи. З того часу концепція динамічної тропопаузи широко використовується у дослідженнях. Динамічна тропопауза відрізняється більшою точністю визначення у порівнянні з термічною. Крім того, динамічна тропопауза буває єдиною, а якщо і виявляються глибокі вторгнення, коли субстратосферне повітря, що опустилося, підтікає під тропопаузу, то практично під час цих вторгнень повітря ніколи не характеризується значеннями  $PV > 4 \text{ рви}$ .

Топографія тропопаузи тісно пов'язана з вертикальними циркуляціями у фронтальних зонах та циклонах. У зонах глибоких висхідних рухів утворюються куполи тропопаузи, у зонах опускання (вони бувають більш локалізовані) – воронки чи складки тропопаузи. Щоб краще зрозуміти зв'язки топографії тропопаузи зі структурою циклонів, розглянемо основні особливості цієї структури на нелінійній фазі розвитку циклонів, але не теоретичних чи чисельних моделях, а виявлені шляхом аналізу реальних даних.

**Мезомасштабна структура циклонів.** Основні результати у цьому напрямі були отримані у 1960-1970-х рр. за матеріалами зондування за допомогою ізентропічного аналізу відносних швидкостей. Особливість цього виду ізентропічного аналізу полягає в тому, що дані зондування за послідовні терміни подаються в системі рухів щодо баричного центру, що вивчається (в припущенні, що останній зміщується між термінами з постійною швидкістю). Для визначення відносного вітру проводиться векторне віднімання швидкості циклону зі швидкості вітру на станціях. По відносним вітрам будується система ліній течії, які у прийнятому припущенні про стаціонарності руху є траєкторіями щодо центру циклону. Серію робіт у цьому напрямі опублікував К. Браунінг із співробітниками за радіозондовими та радарними даними над Великобританією, яка тоді вже була перекрита густою мережею радіозондування та мережею радарів. Надалі ці результати були підтвержені та доповнені іншими дослідниками, в основному на матеріалах спостережень над Північною Америкою.

Розглянемо основні висновки цих робіт.

У молодих циклонах і в циклонах на стадії максимального розвитку (аж до початку оклюдування) ізентропічний аналіз відносних швидкостей дозволяє виділити три основні альфа-мезомасштабні потоки, що несуть повітря різного походження.

У нижньому шарі в систему циклону втягується тепле та вологе повітря. Якщо циклон рухається із заходу на схід, то тепле повітря проникає в його систему з півдня і тече всередині теплого сектора перед

холодним фронтом до центру циклону. Не доходячи до центру, він починає підніматися над теплим фронтом і повертає вправо, при цьому волога, що міститься в ньому, конденсується.

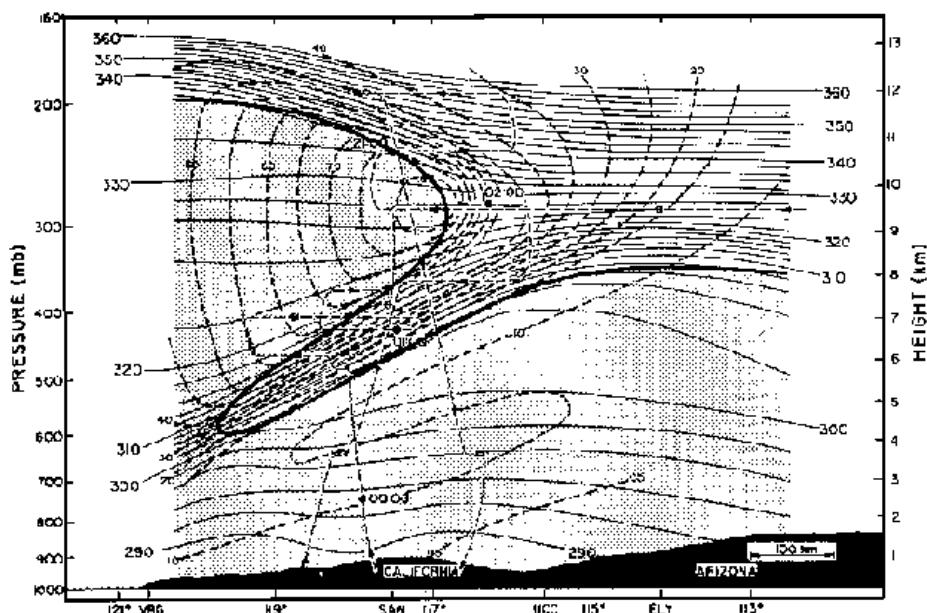


Рисунок 2.3 – Вертикальний переріз тропосфери і нижньої стратосфери 13 березня 1978 р. з глибоким стратосферним вторгненням. Ізолінії  $\theta$  (тонкі суцільні лінії), ізотахи (м/с) (товсті пунктирні лінії), траєкторія літака-лабораторії (тонка пунктирна лінія), динамічна тропопауза (товста суцільна лінія)

Тим самим забезпечується основний приплив водяної пари, необхідної для формування хмар та опадів. Про наявність зон найінтенсивнішої адвекції тепла перед холодними фронтами синоптики знали з досвіду вже наприкінці 30-х років. У 50-ті роки. І.П. Ветлов та Н.В. Петренко описували «теплу вісь», вздовж якої відбувається адвекція тепла та вологи, та відзначали сильну залежність між вологістю повітря, що переноситься по теплій осі, та інтенсивністю фронтальних опадів. Браунінг та Харролд [13] виділили цей потік, описали його форму в циклоні та назвали його «warm conveyor belt» (тепла стрічка конвеєра, або тепла виносна смуга). Вона втікає в циклон широким потоком паралельно холодному фронту та за географічних умов у Великобританії має ширину близько 300 км і вертикальну потужність близько 2 км у тому місці, де вона починає підніматися над теплим фронтом. Нерідко підйом починається вже всередині теплового сектора відповідно до загального сходження повітря в циклоні. Повітря теплої несучої лінії досягає стану насичення і формує велику хмарну систему теплового фронту, її передня

частина (хмари Ci, Cs) розташовуються в середній та верхній тропосфері. У найбільш типовому випадку, коли холодний фронт є анафронтом, в потоці теплої несучої смуги спостерігаються висхідні рухи перед холодним фронтом, як гілка термічно прямої циркуляції. Швидкість такого впорядкованого підйому досягає кількох десятків см/с. Безпосередньо перед холодним фронтом у потоці теплої несучої смуги зазвичай виділяється струменеве протягом нижніх рівнів у слабко нестійкому прикордонному шарі. Струмені такого типу з максимальними швидкостями 25-30 м/с спостерігаються як вдень, так і вночі.

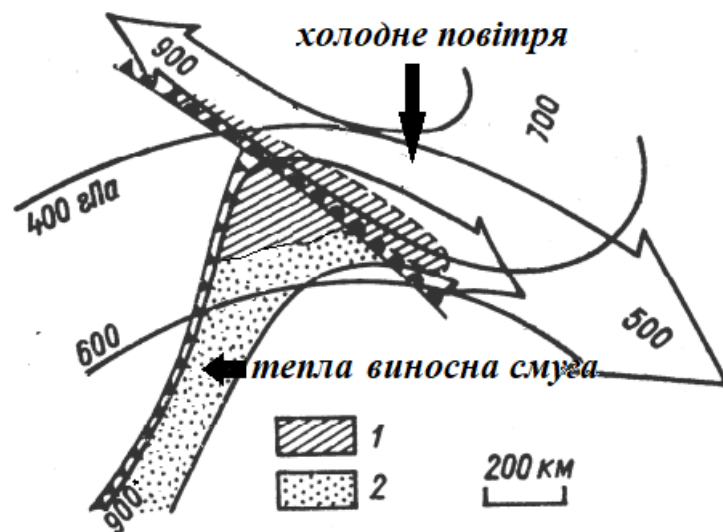


Рисунок 2.4 – Схема основних  $\alpha$ -мезомасштабних потоків в циклоні (рух відносно центру циклону), [11]: 1 – хмарна система теплового фронту, 2 – тепла виносна смуга

У циклонах, що зміщуються над нашою територією, потоки типу теплої несучої смуги також виявлені у всіх випадках. Так, за даними зондування над Україною перед меридіональним холодним фронтом, що повільно рухається, було виявлено теплу виносну смугу над великою територією, яка мала вигляд замкненого рукава в полі псевдопотенціальної температури шириною близько 300 км і вертикальною протяжністю від Чорного до Білого моря на відстань понад 2 тис км.

Є всі підстави стверджувати, що тепла виносна смуга є загальною характерною особливістю мезомасштабної структури циклонів і найважливішим джерелом тепла і вологи. Неодноразово зазначалося, що й унаслідок якихось причин потік теплої несучої смуги виявляється відрізаним і може здійснювати адвекцію тепла і вологи, то опади на фронтах припиняються і хмарність розмивається. Такі умови створюються в оклюдованих циклонах, а також при перевалюванні останніх через

гірські перешкоди значної ширини.

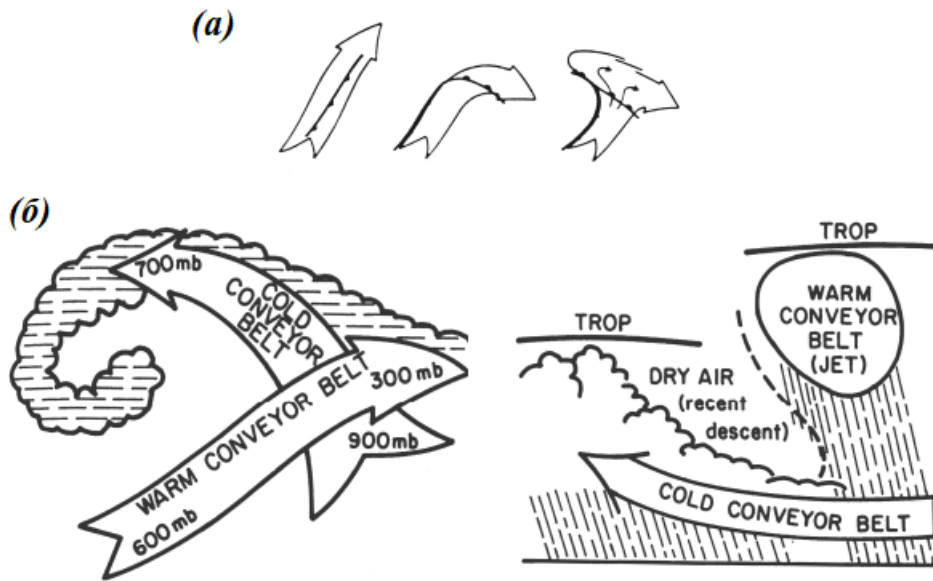


Рисунок 2.5 – Конфігурація теплої виносної смуги при еволюції хмарної системи від смуги до «коми» (а), схематична модель «зрілої» теплої виносної смуги в момент оклюдування: вид зверху (ліворуч) и вертикальний праворуч (праворуч) (б)

Тепла виносна смуга, за даними Браунінга, сягає 500 гПа. За пізнішими даними, як на рисунку, взятому з монографії Carlson, вже вказується як верхня межа її підйому – поверхню 300 гПа. В даний час цілком доведено, що потоки типу теплої виносної смуги підіймаються до тропопаузи і залишаються на стратосферних висотах, тим самим будучи одним з постійно діючих факторів стратосферно-тропосферного обміну.

Інший мезомасштабний потік, який формує хмарну систему циклону – це т. зв. "cold conveyor belt", холодна виносна смуга. Вона містить менш вологе і холодніше повітря, що втікає в циклон зі сходу перед теплим фронтом із системи антициклону (або гребеня), що розташовується на схід від циклону. Проходячи під вологим хмарним повітрям теплої несучої смуги, він збагачується вологою внаслідок випаровування опадів, що випадають з цього повітря, що розташоване вище. Він повертає на північний захід і захід і бере участь у загальному сходженні. Формується хмарність, що становить північну та західну частини хмарного вихору, характерного для циклону. Верхня межа цієї хмарності лежить зазвичай істотно нижче за хмарну систему теплового фронту. Обидві системи хмар формують «хмарну кому», яку можна побачити на супутникових знімках.

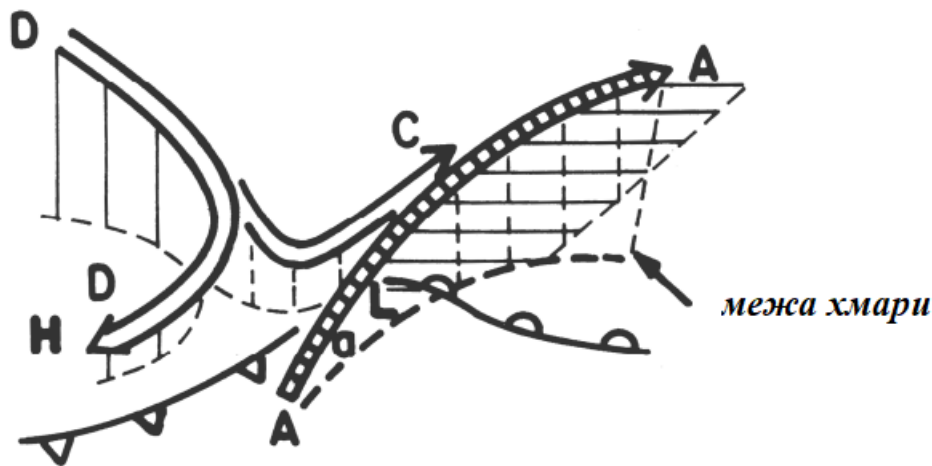


Рисунок 2.6 – Схема  $\alpha$ -мезомасштабних потоків в системі циклону и гребеня [12]: гілка циркуляції, яка опускається (D–D), розділяється на дві частини, одна з якої приєднується до висхідного потоку теплої виносної смуги і сягає насичення в точці А. Межа хмарної системи – проекція західної межі висхідної гілки на поверхні землі, яку можна побачити на супутникових знімках

Третій мезомасштабний потік втікає в циклон із заходу. Це холодніше і сухе повітря, що почало опускатися з верхньої тропосфери в системі гребеня або антициклону, що лежить на північ або північний захід від даного циклону. Частина цього сухого потоку («dry stream» за термінологією Браунінга) обтікає холодну смугу, що несе, з півночі. В результаті з'являються чіткі та згладжені краї хмарної «коми» циклонічного вихору. Інша частина сухого потоку тече над повітрям теплої несучої смуги або утворює мову сухого повітря між хмарними системами теплої та холодної несучих смуг.

Сухий потік у глибоких циклонах містить повітря верхньої тропосфери та навіть шару тропопаузи та субстратосферне повітря. Це другий дуже важливий елемент механізму тропосферно-стратосферного обміну, що є низхідною гілкою глибокої вертикальної циркуляції. Сухі потоки добре видно на супутникових знімках у смугі пропускання водяної пари як темні смуги або «завитки» у циклонічних вихорах.

У сухому потоці, що бере початок у стратосфері, відбувається зниження тропопаузи («складка» або «вирва»), а в потоці теплої виносної смуги утворюється «купол». Таким чином, топографія тропопаузи виявляється пов'язаною з основними мезомасштабними потоками та хмарними системами циклонів. Вона формується тими ж вертикальними циркуляціями, поперечними до великомасштабної барокліної зони. У мезомасштабах висхідна і низхідна гілки цих циркуляцій виявляються

локалізованими, що добре виділяються за своїм походженням і характеристиками. В даний час часто можна прочитати твердження, що мезомасштабні потоки в циклонах є більш важливою їхньою частиною з точки зору генерації опадів та перенесення властивостей (тепла та вологи), ніж навіть атмосферні фронти.

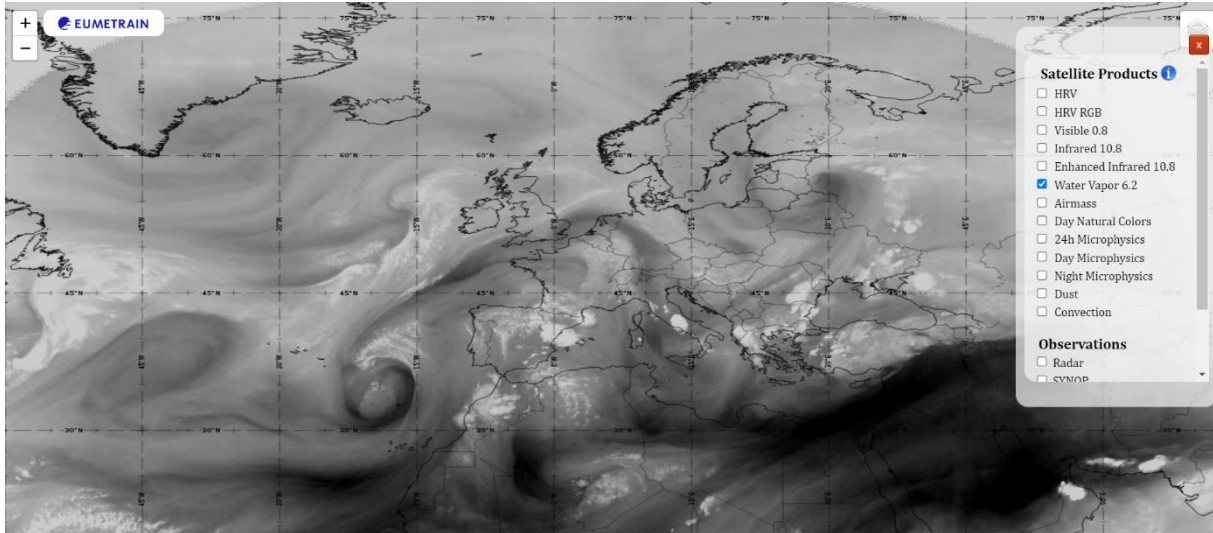


Рисунок 2.7 – Типові хмарні системи в смузі пропускання водяної пари 14.04.2022 р.

## 2.6 Контрольні запитання

1. Які фізичні чинники суттєво впливають на зміну вертикальної складової вихору з часом у фіксованій точці простору?
2. Яка рідина називається бароклінною?
3. Чим відрізняються абсолютний, планетарний та відносний вихор?
4. Чим обумовлений обертальний рух, який описується відносним вихором?
5. Чим обумовлений обертальний рух, який описується планетарним вихором?
6. Що характеризує абсолютний вихор?
7. Для великомасштабних рухів планетарний вихор більший за відносний чи навпаки?
8. В яких задачах динамічної метеорології має сенс використовувати абсолютний вихор?
9. Як називають вихор, що обумовлений переносним обертальним рухом Землі як планети?
10. Чому дорівнює планетарний вихор?
11. Що таке потенціальний вихор або вихор Ертеля?
12. За яких умов потенціальний вихор є інваріантною величиною?

13. В метеорології які величини використовують в якості потенціального вихору?
14. Яка тропопауза має назву термічної (динамічної)?
15. Чим відрізняється термічна і динамічна тропопаузи?
16. В чому сенс використання динамічної тропопаузи?
17. Який основний принцип ізентропічного аналізу?
18. Чим відрізняються ізобаричний та ізентропічний аналізи?
19. В чому є перевага ізентропічного аналізу над ізобаричним?



### 3 Спрощені рівняння гідротермодинаміки

#### 3.1 Методи спрощення системи рівнянь гідротермодинаміки атмосфери

Система рівнянь гідротермодинаміки, одержана раніше, дозволяє описувати будь-які рухи, що спостерігаються в земній атмосфері. В той же час, просторовий спектр цих атмосферних рухів простягається від сантиметрових розмірів турбулентних вихорів у шарі рослинності до десятків тисяч кілометрів (планетарні хвилі). У цьому розділі ми розглянемо динаміку атмосферних рухів синоптичного масштабу, просторовий масштаб яких складає не менше двох тисяч кілометрів.

Ці рухи характерні для вільної атмосфери – частини атмосфери, на формування динаміки якої мало впливає приземне тертя.

Рухи синоптичного масштабу мають деякі характерні фізичні риси, врахування яких дозволяє істотно спростити вихідну систему рівнянь гідротермодинаміки атмосфери, яку ми отримали у попередньому розділі. Розглянемо ці особливості. Для цього введемо поняття просторового масштабу рухів ( $L$ ) і характерного масштабу швидкості ( $U$ ). Час, за який елементарний об'єм повітря переміститься на відстань  $L$  зі швидкістю  $U$ , представляє собою характерний масштаб часу і дорівнює  $\tau = L/U$ .

Якщо цей проміжок часу істотно менше за період обертання Землі ( $T = 2\pi/\Omega$ ), то за час  $\tau$  цей об'єм навряд чи зможе зазнати впливу від цього обертання. Таким чином, можна припустити, що ефект обертання Землі стане істотним за умови, що

$$\tau \geq T \quad \text{або} \quad L/U \geq 2\pi/\Omega,$$

Оцінимо виконання цієї умови для атмосферних процесів синоптичного масштабу. Маємо

$$L \sim 2000 \text{ км}, \quad U \sim 10 \text{ м/с}, \quad \Omega \sim 7,29 \times 10^{-5} \text{ с}^{-1},$$

тоді ліва частина співвідношення дорівнює  $2 \times 10^5$  с, а права частина  $\sim 10^5$  с. Таким чином, для рухів синоптичного масштабу умова завжди виконується. Отже, першою особливістю атмосферних рухів синоптичного масштабу є істотний вплив сили Коріоліса на динаміку цих процесів.

У метеорології оцінку співвідношення сил інерції і Коріоліса звичайно здійснюють за допомогою безрозмірного параметра  $Ki$ , який будемо

називати числом Кібеля\*

$$Ki = \frac{U}{2 \omega_z L}, \quad (3.1)$$

де  $\omega_z$  – вертикальна складова кутової швидкості обертання Землі.

Таким чином, якщо виконується умова  $Ki \leq 1$ , то вплив сили Коріоліса на динаміку атмосферних рухів стає істотним.

Друга важлива особливість рухів синоптичного масштабу пов'язана з непорівнянністю горизонтального ( $L \sim 2000$  км) і вертикального ( $H \sim 10$  км) масштабів рухів синоптичного масштабу, тобто у вільній атмосфері

$$H/L \ll 1. \quad (3.2)$$

Зі співвідношення (57) випливає, що вертикальна складова швидкості повітря в рухах синоптичного масштабу набагато менше від горизонтальної складової, тобто повітряні рухи синоптичного масштабу є квазігоризонтальними. Дійсно, масштаб горизонтальної складової швидкості можна виразити як  $U = L/\tau$ , а масштаб вертикальної складової –  $W = H/\tau$ . Тоді

$$W/U = H/L, \quad (3.3)$$

і в силу (3.2)

$$W/U \ll 1. \quad (3.4)$$

Якщо для цих рухів малі вертикальні швидкості, то можна припустити, що й вертикальні прискорення малі. А малість вертикальних прискорень свідчить про наявність рівноваги сил, що діють у цій площині на частинку повітря. Отже, у вертикальній площині для рухів синоптичного масштабу спостерігається приблизна рівновага сил, що діють на елементарний об'єм повітря і, насамперед, вертикальної складової сили баричного градієнта і сили тяжіння, тобто в цій частині атмосфери виконується умова квазістатичної рівноваги

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g = 0 \quad \text{або} \quad \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \quad (3.5)$$

---

\* Цей параметр пов'язаний з числом Россбі  $\varepsilon = \frac{U}{|\vec{\Omega}|L}$ , де  $\vec{\Omega}$  - вектор кутової швидкості обертання Землі. Число Россбі являє собою відношення сили інерції до сили Коріоліса

Співвідношення (3.5) має назву рівняння статички атмосфери.

Розглянемо тепер, як описані вище особливості атмосферних рухів синоптичного масштабу дозволяють спростити вихідну систему рівнянь гідротермодинаміки атмосфери. Ці спрощення необхідні для того, щоб аналітично досліджувати особливості динаміки рухів цього масштабу.

### 3.2 Рівняння руху для вільної атмосфери

Одержимо рівняння руху, що описують динаміку вільної атмосфери, спростивши повну систему рівнянь гідротермодинаміки атмосфери. Для цього:

– по-перше, використовуючи умову (3.4), можна замінити третє рівняння руху (рівняння для  $w$ -складової швидкості) на рівняння статички атмосфери (3.5).

– по-друге, використаємо для спрощення двох інших рівнянь руху методику теорії подібності.

Ця методика основана на аналізі співвідношення характерних масштабів величин, що входять у рівняння, які досліджуються. Причому, ці масштаби вибираються таким чином, щоб вони характеризували конкретний діапазон рухів, який нас цікавить. При використанні методики теорії подібності за допомогою цих характерних масштабів у досліджуваному рівнянні здійснюється перехід до нових безрозмірних змінних типу  $f_n$ .

Тобто, якщо  $f$  – розмірне значення будь-якої характеристики, а  $F$  – масштаб, що характеризує цю величину в конкретному діапазоні рухів, тоді безрозмірне значення величини  $f$  ( $f_n$ ) буде дорівнювати

$$f_n = f/F. \quad (3.6)$$

Якщо ми правильно підібрали масштаб  $F$ , тоді порядок безрозмірного значення розглянутої величини повинен дорівнювати одиниці

$$O(f_n) = 1. \quad (3.7)$$

В цьому випадку дослідження кількісного внеску кожного члена рівняння в формування фізичних процесів даного просторового масштабу зводиться до оцінки розмірного коефіцієнта, що стоїть перед конкретним безрозмірним членом рівняння і складається з комбінації масштабів величин, що входять у цей член рівняння.

Скористаємося описаною методикою для дослідження рівнянь гідротермодинаміки стосовно до умов вільної атмосфери. Для цього вводимо масштаби величин, що входять у рівняння руху (причому значення цих масштабів характерні для рухів синоптичного масштабу):

– для горизонтальної швидкості –  $U$ ;

- для вертикальної швидкості –  $W$ ;
- просторовий масштаб рухів:
  - у горизонтальній площині –  $L$ ,
  - у вертикальній площині –  $H$ ;
- масштаб часу –  $\tau$ ,
- масштаб горизонтального градієнта тиску  $(\partial p / \partial n) - P_s$ .

Тоді, перше рівняння руху (1.80с) можна записати за допомогою операції типу (3.7) у вигляді

$$\left(\frac{U}{\tau}\right) \frac{\partial u_n}{\partial t_n} + \left(\frac{U^2}{L}\right) u_n \frac{\partial u_n}{\partial x_n} + \left(\frac{U^2}{L}\right) v_n \frac{\partial u_n}{\partial y_n} + \left(\frac{W U}{H}\right) w_n \frac{\partial u_n}{\partial z_n} = -\frac{P_s}{\rho} \frac{\partial p_n}{\partial x_n} +$$

$$+ 2\omega_Z U v_n - 2\omega_Y W w_n + \eta \left(\frac{U}{L^2}\right) \left(\frac{\partial^2 u_n}{\partial x_n^2} + \frac{\partial^2 u_n}{\partial y_n^2}\right) + \eta \left(\frac{U}{H^2}\right) \left(\frac{\partial^2 u_n}{\partial z_n^2}\right)$$

Розділимо тепер обидві частини цього рівняння на коефіцієнт, що стоїть при члені, який описує вплив сили Коріоліса –  $(2\omega_z)$ , тому що, як було показано в пункті 3.1, ця сила є істотною у формуванні динаміки атмосферних процесів синоптичного масштабу. Таким чином, якщо отриманий у результаті ділення безрозмірний критерій виявляється за величиною рівним одиниці або близьким до неї, то даний член рівняння впливає на формування динаміки вільної атмосфери приблизно так само, як ефект обертання Землі. Якщо ж критерій виявляється набагато меншим за одиницю, то вплив фізичного процесу, що описується таким членом рівняння, виявляється несуттєвим при формуванні динаміки процесів вільної атмосфери.

Для спрощення записів запровадимо позначення  $l = 2\omega_z$ . Цей параметр звичайно називають параметром Коріоліса. Отже, розділивши обидві частини рівняння на параметр  $l$ , отримаємо

$$\left(\frac{1}{\ell \tau}\right) \frac{\partial u_n}{\partial t_n} + \left(\frac{U}{\ell L}\right) u_n \frac{\partial u_n}{\partial x_n} + \left(\frac{U}{\ell L}\right) v_n \frac{\partial u_n}{\partial y_n} + \left(\frac{W}{\ell H}\right) w_n \frac{\partial u_n}{\partial z_n} = -\frac{P_s}{\ell U \rho} \frac{\partial p_n}{\partial x_n} +$$

$$+ v_n - \frac{2\omega_Y W}{\ell U} w_n + \eta \left(\frac{1}{\ell L^2}\right) \left(\frac{\partial^2 u_n}{\partial x_n^2} + \frac{\partial^2 u_n}{\partial y_n^2}\right) + \eta \left(\frac{1}{\ell H^2}\right) \left(\frac{\partial^2 u_n}{\partial z_n^2}\right). \quad (3.8)$$

Аналізуючи рівняння (53), отримане для безрозмірних значень характеристик рідини, можна виділити шість безрозмірних критеріїв, які визначають значущість того або іншого члена першого рівняння руху у формуванні динаміки рухів синоптичного масштабу. Це:

$$1) \left( \frac{1}{\ell \tau} \right) = \frac{U}{\ell L} = Ki; \quad 2) \frac{U}{\ell L} = Ki; \quad 3) \left( \frac{W}{\ell H} \right) = \frac{U}{\ell L} = Ki \text{ (у силу (3.3));}$$

$$4) \frac{2\omega_y W}{\ell U} \ll 1 \text{ (у силу (3.4));} \quad 5) \eta \left( \frac{1}{\ell L^2} \right) = E - \text{число Екмана}^*;$$

$$6) \eta \left( \frac{1}{\ell H^2} \right) = E \frac{L^2}{H^2} \approx 10^{-7}^{**}.$$

Перших три критерії мають порядок числа Кібеля, що для рухів синоптичного масштабу складає  $\sim 10^{-2}$ , три інших ще набагато менше. Таким чином, залишається один член рівняння руху, який описує силу баричного градієнта (рушійна сила всіх атмосферних процесів). Отже, проекція цієї сили на вісь X (перше рівняння руху) має той же порядок, що і проекція сили Коріоліса для рухів синоптичного масштабу. Тобто, безрозмірний параметр:  $\frac{P_s}{\ell U_p} \sim 1$ .

Отже, із проведеного аналізу значень безрозмірних критеріїв першого рівняння руху для рухів синоптичного масштабу можна зробити наступні висновки:

1) члени, пов'язані з прискореннями елементарного об'єму повітря, дуже малі (в порівнянні з ефектом сили Коріоліса), і, отже можна говорити про те, що рухи синоптичного масштабу практично рівномірні і прямолінійні як у горизонтальній, так і у вертикальній площинах;

2) члени, пов'язані з дією сили молекулярної в'язкості, на 7-11 порядків менше від членів, що описують дію сили баричного градієнта або Коріоліса, і, отже, цією силою можна нехтувати при описі динаміки рухів синоптичного масштабу у вільній атмосфері;

3) член, що описує дію сили Коріоліса, з горизонтальною складовою кутової швидкості обертання Землі ( $2\omega_y$ ) набагато менше від члена з вертикальною складовою і тому ним можна також знехтувати.

Таким чином, перше рівняння руху для атмосферних процесів синоптичного масштабу можна виписати з різним ступенем точності, що відтворюватиме динаміку цих процесів:

– по-перше, можна виписати це рівняння з урахуванням тільки головних членів (тобто членів, що мають порядок складової сили Коріоліса):

---

\* Значення числа Екмана для рухів синоптичного масштабу складає  $\sim 1,0 \times 10^{-11}$ .

\*\* Тому що для рухів синоптичного масштабу  $\frac{L^2}{H^2} \approx 10^4$ .

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + 2 \omega_z v;$$

– по-друге, можна виписати рівняння з членами, що мають порядок до числа Кібеля включно:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + 2 \omega_z v.$$

Аналогічно, можна визначити для другого рівняння руху його вигляд для процесів синоптичного масштабу з урахуванням тільки головних членів порядку одиниці

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - 2 \omega_z u$$

і з урахуванням членів, що мають порядок до числа Кібеля включно

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - 2 \omega_z u.$$

Нагадуємо, що третє рівняння руху для атмосферних процесів синоптичного масштабу перетворюється на рівняння статички атмосфери.

Отже, можна записати дві системи спрощених рівнянь руху, що описують динаміку процесів синоптичного масштабу з різним ступенем точності:

– з точністю до головних членів рівнянь

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + 2 \omega_z v, \quad (3.9)$$

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - 2 \omega_z u, \quad (3.10)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g; \quad (3.11)$$

– з точністю до членів порядку числа Кібеля включно

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + 2 \omega_z v, \quad (3.12)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - 2 \omega_z u, \quad (3.13)$$

і рівняння статички (56).

### 3.3 Геострофічне наближення

У динамічній метеорології рух у горизонтальній площині, який виникає за умови, що горизонтальний градієнт тиску врівноважується горизонтальним компонентом сили Коріоліса (геострофічна рівновага), називається геострофічним рухом, тобто

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 2 \omega_Z v_g, \quad -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = 2 \omega_Z u_g, \quad (3.14)$$

де  $u_g$  і  $v_g$  – складові вектора швидкості геострофічного руху або вектора геострофічної швидкості  $\vec{V}_g$ .

Зі співвідношень (3.14) можна одержати вирази для складових швидкості геострофічного вітру

$$u_g = -\frac{1}{2 \omega_Z \rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \quad v_g = \frac{1}{2 \omega_Z \rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (3.15)$$

і модуля вектора швидкості геострофічного вітру

$$V_g \equiv |\vec{V}_g| = \frac{1}{2 \omega_Z \rho} \frac{\partial p}{\partial n}, \quad (3.16)$$

де  $\partial p / \partial n$  – модуль вектора горизонтального градієнта тиску\*.

Визначимо, виходячи зі співвідношень (3.14) і (3.15), властивості геострофічного вітру.

По-перше, це прямолінійний і рівномірний рух у горизонтальній площині, тому що сили баричного градієнта ( $\vec{G}$ ) і Коріоліса ( $\vec{K}$ ) врівноважуються в горизонтальній площині;

По-друге, вектор геострофічної швидкості перпендикулярний до вектора горизонтальної сили баричного градієнта. Дійсно, скалярний добуток цих векторів дорівнює

$$\begin{aligned} \vec{V}_g \cdot \vec{G} &= u_g \left( -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + v_g \left( -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \right) = \left( -\frac{1}{2 \omega_Z \rho} \frac{\partial p}{\partial y} \right) \left( -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \\ &+ \left( \frac{1}{2 \omega_Z \rho} \frac{\partial p}{\partial x} \right) \left( -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \right) = 0. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Отже, вектор геострофічної швидкості спрямований уздовж ізобар

---

\* Вектор горизонтального градієнта тиску спрямований перпендикулярно до ізобари - лінії, що з'єднує точки рівного тиску на горизонтальній площині. На картах приземного тиску ізобари проводяться через 5 гПа (п'ять гектопаскалів).

так, що низький тиск залишається ліворуч від напрямку руху у Північній півкулі (рис. 3.1).

Якщо тепер порівняти співвідношення (3.12) і (3.13), то можна зробити фундаментальний висновок про те, що у вільній атмосфері в першому наближенні виконуються умови геострофічного руху, тобто в першому наближенні рухи синоптичного масштабу у вільній атмосфері є

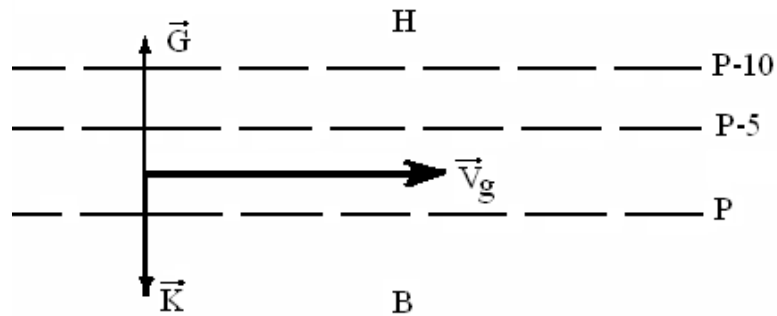


Рисунок 3.1 – Взаємне розташування векторів геострофічної швидкості  $\vec{V}_g$ , сил горизонтального баричного градієнта  $\vec{G}$  і Коріоліса  $\vec{K}$  у випадку геострофічного руху

геострофічними і мають його властивості. Тому в метеорології прийнято говорити, що у вільній атмосфері спостерігається *геострофічний вітер*. А рівняння руху у формі (3.12) називають рівняннями руху, записаними в геострофічному наближенні або просто *геострофічним наближенням*.

З фундаментальної властивості геострофічності великомасштабних рухів у вільній атмосфері випливає, що поля тиску і вітру у вільній атмосфері взаємоузгоджені та по структурі одного з цих полів можна відновити інше. Ця властивість широко використовується в синоптичній метеорології.

### 3.4 Термічний вітер

Вище були розглянуті перших дві властивості геострофічного вітру. Тепер, розглянемо, як змінюється геострофічний вітер з висотою. З цією метою запишемо геострофічні співвідношення (3.15) з урахуванням рівняння стану у вигляді

$$\rho = p/R T.$$



Маємо

$$\begin{aligned}\frac{u_g}{T} &= -\frac{R}{2\omega_Z} \frac{1}{p} \frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{R}{2\omega_Z} \frac{\partial}{\partial y} \ln(p), \\ \frac{v_g}{T} &= \frac{R}{2\omega_Z} \frac{1}{p} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{R}{2\omega_Z} \frac{\partial}{\partial x} \ln(p).\end{aligned}\quad (3.18)$$

Продиференціювавши співвідношення (3.18) за координатою  $Z$ , одержимо

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{u_g}{T} \right) &= -\frac{R}{2\omega_Z} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial}{\partial z} \ln(p) \right), \\ \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{v_g}{T} \right) &= \frac{R}{2\omega_Z} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial}{\partial z} \ln(p) \right).\end{aligned}\quad (3.19)$$

Скористаємося тепер рівнянням статики у вигляді (56)

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g.$$

Тоді можна отримати

$$\frac{\partial}{\partial z} \ln(p) = -\frac{g}{RT}.\quad (3.20)$$

Підставляючи рівняння статики у вигляді (3.20) у праву частину співвідношення (7.74), маємо

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{u_g}{T} \right) &= \frac{R}{2\omega_Z} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{g}{RT} \right) = \frac{g}{2\omega_Z} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{T} \right) = -\frac{g}{2\omega_Z T^2} \frac{\partial T}{\partial y}, \\ \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{v_g}{T} \right) &= -\frac{R}{2\omega_Z} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{g}{RT} \right) = -\frac{g}{2\omega_Z} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{T} \right) = \frac{g}{2\omega_Z T^2} \frac{\partial T}{\partial x}.\end{aligned}\quad (3.21)$$

З аналізу співвідношень (3.21) можна зробити наступні висновки:

- по-перше, геострофічний вітер з висотою змінюється тільки при горизонтальному градієнті температури, відмінному від нуля;
- по-друге, величина зміни геострофічного вітру з висотою прямо пропорційна значенню горизонтального градієнта температури.

З фізичної точки зору отриману закономірність можна пояснити в такий спосіб. Відповідно до рівняння статики у вигляді (3.20) атмосферний тиск у холодній повітряній масі знижується з висотою швидше, ніж у теплій. Тому, при зміні температури в горизонтальній площині в

повітряній масі тиск над різними пунктами змінюється з висотою по-різному, що приводить до зміни з висотою горизонтального баричного градієнта, а, відповідно, і швидкості геострофічного руху.

Повернемося тепер до співвідношень (3.21) і проінтегруємо їх по шару повітря товщиною  $Z_1 - Z_2$

$$\int_{Z_1}^{Z_2} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{u_g}{T} \right) dz = - \frac{g}{2 \omega_Z} \int_{Z_1}^{Z_2} \frac{1}{T^2} \frac{\partial T}{\partial y} dz,$$

$$\int_{Z_1}^{Z_2} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{v_g}{T} \right) dz = \frac{g}{2 \omega_Z} \int_{Z_1}^{Z_2} \frac{1}{T^2} \frac{\partial T}{\partial x} dz. \quad (3.22)$$

Для подальших перетворень введемо поняття "середньої температури" шару  $Z_1 \div Z_2$  і позначимо її як  $T_m$ . Тоді, скориставшись у (3.22) теоремою про середнє\*, у першому наближенні одержимо

$$\frac{1}{T_m} (u_g(Z_2) - u_g(Z_1)) = - \frac{g}{2 \omega_Z T_m^2} \frac{\partial T_m}{\partial y} (Z_2 - Z_1),$$

$$\frac{1}{T_m} (v_g(Z_2) - v_g(Z_1)) = \frac{g}{2 \omega_Z T_m^2} \frac{\partial T_m}{\partial x} (Z_2 - Z_1). \quad (3.23)$$

Запровадимо для зручності позначення

$$u_g(Z_2) - u_g(Z_1) \equiv u_T,$$

$$v_g(Z_2) - v_g(Z_1) \equiv v_T. \quad (3.24)$$

Власне кажучи, ці величини є складовими результуючого вектора різниці векторів геострофічного вітру на рівнях  $Z_2$  і  $Z_1$  відповідно, тобто

$$\vec{V}_g(Z_2) - \vec{V}_g(Z_1) \equiv \vec{V}_T. \quad (3.25)$$

У метеорології вектор  $\vec{V}_T$  зі складовими  $u_m$  і  $v_m$  звичайно називають *вектором термічного вітру* або просто *термічним вітром*. Таке позначення часто використовується при розрахунках зміни геострофічного вітру з висотою.

---

\*) Нагадаємо, що відповідно до цієї теореми  $\int_a^b f(x) dx \cong f(c)(b-a)$ , де  $f(c)$  - середнє значення даної функції на відрізьку  $(b-a)$ .

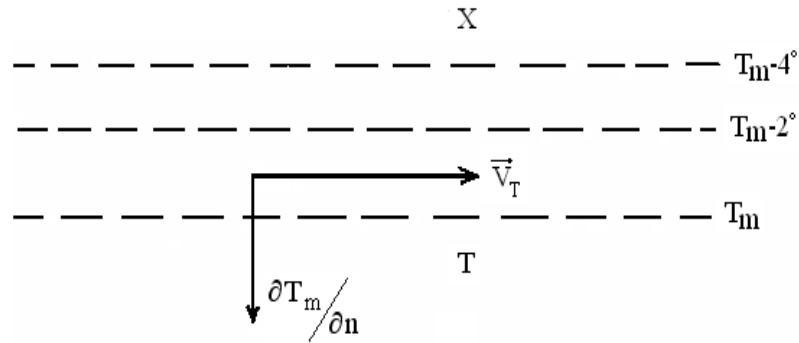


Рисунок 3.2 – Взаємне розташування векторів швидкості термічного вітру  $\vec{V}_T$  і градієнта середньої температури шару  $\frac{\partial \bar{T}_m}{\partial n}$

З урахуванням позначень (3.24) співвідношення (3.23) набувають вигляду

$$u_T = -\frac{g}{2\omega_Z T_m} \frac{\partial T_m}{\partial y} (Z_2 - Z_1),$$

$$v_T = \frac{g}{2\omega_Z T_m} \frac{\partial T_m}{\partial x} (Z_2 - Z_1). \quad (3.26)$$

Модуль вектора термічного вітру визначається зі співвідношення

$$V_T \equiv |\vec{V}_T| = \frac{g}{2\omega_Z T_m} \frac{\partial T_m}{\partial n} (Z_2 - Z_1), \quad (3.27)$$

де  $\frac{\partial T_m}{\partial n}$  – модуль вектора горизонтального градієнта середньої температури у шарі повітря товщиною  $Z_2 - Z_1$ .

Зі співвідношень (7.81) і (7.82) випливає, що зміна геострофічного вітру з висотою (або термічний вітер) визначається не тільки значенням горизонтального градієнта середньої температури у шарі, але і прямо пропорційна товщині цього шару.

Крім того, оскільки скалярний добуток векторів  $\vec{V}_T$  і  $\frac{\partial \bar{T}_m}{\partial n}$  дорівнює

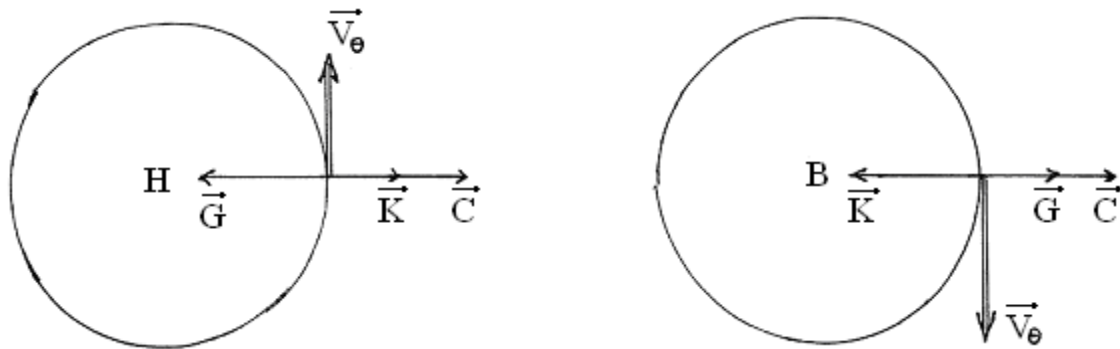
$$\vec{V}_T \cdot \frac{\partial \bar{T}_m}{\partial n} = -\frac{g}{2\omega_Z T_m} \frac{\partial T_m}{\partial y} (Z_2 - Z_1) \frac{\partial T_m}{\partial x} + \frac{g}{2\omega_Z T_m} \frac{\partial T_m}{\partial x} (Z_2 - Z_1) \frac{\partial T_m}{\partial y} = 0,$$

то ці вектори взаємно перпендикулярні, тобто вектор термічного вітру спрямований уздовж ізотерм так, що низькі температури залишаються ліворуч від напрямку вектора вітру (рис. 7.2).

### 3.5 Рухи синоптичного масштабу при кругових ізобарах

При кругових ізобарах у вільній атмосфері спостерігаються рухи, динаміка яких визначається наявністю балансу трьох сил: горизонтальної складової сили баричного градієнта, сили Коріоліса і відцентрової сили, що виникає за рахунок обертальної складової руху. Схематично баланс цих сил можна зобразити в такий спосіб (рис. 7.3).

У метеорології рухи, що спостерігаються при кругових ізобарах, називаються *градієнтним вітром*. Розглянемо властивості цього руху.



$\vec{G}$  – вектор горизонтального градієнта тиску,  
 $\vec{K}$  – сила Коріоліса,  
 $\vec{C}$  – відцентрова сила

Рисунок 3.3 – Баланс сил, що діють на рухомий елементарний об'єм при кругових ізобарах

У циліндричній системі координат (координатні осі:  $\theta$ ,  $r$ ,  $z$  – рис. 3.4) рівняння руху у формі (58) набувають вигляду

$$\begin{aligned} \frac{dv_r}{dt} - \frac{v_\theta^2}{r} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + 2\omega_z v_\theta, \\ \frac{dv_\theta}{dt} + \frac{v_r v_\theta}{r} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \theta} - 2\omega_z v_r, \end{aligned} \quad (3.28)$$

де  $v_\theta$  і  $v_r$  – складові горизонтального вектору швидкості руху (рис. 3.5).

Можна показати, що при кругових ізобарах

$$\frac{\partial}{\partial r}(r v_r) = 0, \quad (3.29)$$

тоді  $v_r = 0^*$ . Отже вектор швидкості завжди спрямований по дотичній до ізобари.

Оскільки градієнтний вітер – це рух, що виникає при рівновазі сил баричного градієнта, Кориоліса і відцентрової сили, то цей рух є стаціонарним, тобто модуль вектора швидкості не змінюється з часом  $\frac{dV_\theta}{dt} = 0$ .

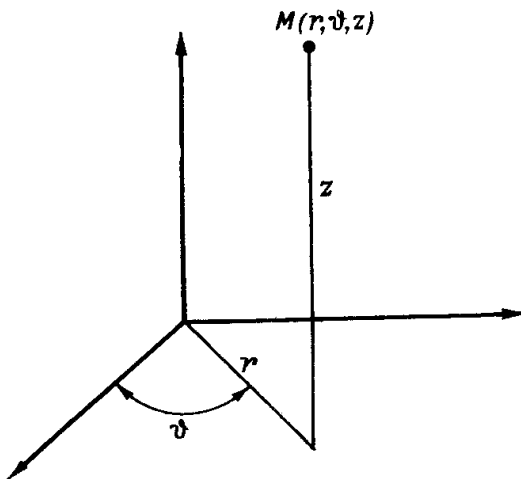


Рисунок 3.4 – Циліндрична система координат в циліндричній системі

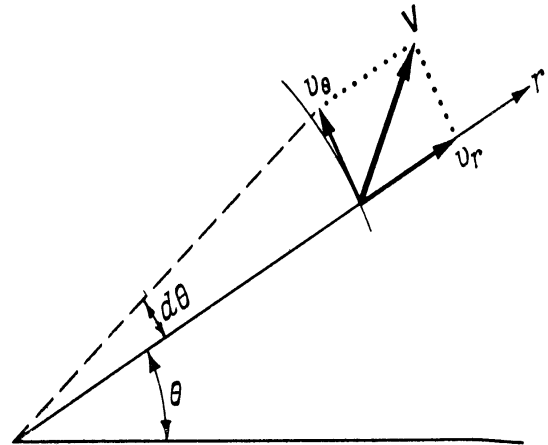


Рисунок 3.5 – Складові вектора швидкості вітру

Крім того, при кругових ізобарах по визначенню  $\partial p / \partial \theta = 0$ , тоді система (3.28) перетворюється на рівняння\*

$$\frac{v_\theta^2}{r} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + 2 \omega_Z v_\theta = 0, \quad (3.30)$$

яке описує баланс вищевказаних трьох сил.

Щодо швидкості руху при кругових ізобарах  $v_\theta$  (7.85) являє собою квадратне рівняння, коренями якого є

$$v_\theta = -\frac{r 2 \omega_Z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{r 2 \omega_Z}{2}\right)^2 + \frac{r}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r}}. \quad (3.31)$$

При  $\partial p / \partial r = 0$  (тобто при відсутності градієнта тиску) швидкість вітру

\* Тому що при кругових ізобарах  $r = \text{const}$ .

\*) Друге рівняння системи (7.83) перетворилося на тривіальну тотожність типу  $0 = 0$ .

повинна бути рівною нулю, тому фізично обґрунтованим є лише один корінь розв'язання (7.86)

$$v_{\theta} = -r \omega_z + \sqrt{(r \omega_z)^2 + \frac{r}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r}}. \quad (3.32)$$

В зв'язку з тим, що в циклонах  $\partial p / \partial r > 0$ , а в антициклонах  $\partial p / \partial r < 0$ , то з аналізу формули для швидкості градієнтного вітру (3.33) випливають, принаймні, два висновки:

1) у циклонах швидкість градієнтного вітру  $v_{\theta} > 0$ , тобто у циклонах вектор швидкості спрямований по дотичній до ізобари проти годинникової стрілки. В антициклонах  $v_{\theta} < 0$  – вектор вітру спрямований по дотичній до ізобари за годинниковою стрілкою;

2) через те що в антициклонах  $\partial p / \partial r < 0$ , цей градієнт не може перевищувати деяке критичне значення, рівне

$$\left( \frac{\partial p}{\partial r} \right)_{\max} = \rho r \omega_z^2. \quad (3.33)$$

Крім того, при тому самому значенні горизонтального градієнта тиску в циклоні швидкість градієнтного вітру більше ніж в антициклоні. Це випливає з формули (3.33), тому що в циклонах  $\partial p / \partial r > 0$ , а в антициклонах  $\partial p / \partial r < 0$ .

### 3.6 Контрольні запитання

1. Для яких цілей використовуються числа Росбі та Кібеля.
2. Для процесів в яких широтах застосовуються числа Росбі та Кібеля? І, якщо існує обмеження, то пояснити – чому.
3. Що являє собою параметр Коріоліса?
4. Що таке вільна атмосфера?
5. Які рухи називають великомасштабними в атмосфері (їх масштаби)?
6. Особливості великомасштабних рухів.
7. На рухи яких масштабів суттєво впливає сила Коріоліса?
8. Які сили мають найбільший порядок у рівняннях руху?
9. Якою силою можна знехтувати у вільній атмосфері?
10. Які сили врівноважуються при великомасштабних рухах у горизонтальній площині?
11. Які сили врівноважуються при великомасштабних рухах у вертикальній площині?
12. Які сили для великомасштабних рухів мають найбільший порядок у рівняннях руху?
13. Визначення геострофічного вітру.

14. Зобразіть діаграму сил, які врівноважуються для геострофічної течії в атмосфері.
15. Властивості геострофічного вітру.
16. Як спрямовані вектори геострофічного вітру та горизонтального баричного градієнта один відносно одного?
17. Визначення термічного вітру.
18. Властивості термічного вітру.
19. Як спрямовані вектори термічного вітру та горизонтального градієнта середньої температури в шарі один відносно одного?
20. Що таке висота обертання геострофічного вітру?
21. Як спрямовані горизонтальні градієнти температури та тиску при наявності обертання геострофічного вітру?
22. Як змінюватиметься геострофічний вітер з висотою при адвекції холоду (тепла)?
23. Як змінюється геострофічний вітер з висотою при горизонтальних градієнтах тиску та середньої температури, спрямованих в одну й ту саму сторону (в протилежні сторони)?
24. Визначення градієнтного вітру?
25. Зобразіть діаграму сил, які врівноважуються для градієнтного вітру в циклоні (антициклоні).
26. Як змінюватиметься градієнтний вітер з висотою в західній (східній) частині циклона при збільшенні температури з півночі на південь?
27. Як змінюватиметься градієнтний вітер з висотою в західній (східній) частині антициклона при збільшенні температури з півночі на південь?
28. Як змінюватиметься градієнтний вітер з висотою в північній (південній) частині циклона при збільшенні температури з півночі на південь?
29. Як змінюватиметься градієнтний вітер з висотою в північній (південній) частині антициклона при збільшенні температури з півночі на південь?
30. Де існує обмеження для градієнтного вітру: в циклоні чи антициклоні?

## РОЗДІЛ II ГІДРОДИНАМІЧНА НЕСТІЙКІСТЬ, ХВИЛЬОВІ РУХИ І АТМОСФЕРНА ТУРБУЛЕНТНІСТЬ

### 4 Баротропна-бароклінна нестійкість. Хвильові процеси.

#### 4.1 Баротропна нестійкість зонального потоку на $\beta$ -площині

Це найпростіша із задач про стійкість, крім задачі Релея, яка найбільш детально вивчена, тому інші задачі про стійкість зазвичай аналізуються за аналогією з нею.

Вважатимемо основний потік гідростатичним і геострофічним, а збурення – квазігеострофічними та бездивергентними.

Квазігеострофічне наближення – це припущення геострофічності вітру, але за умови, що горизонтальна дивергенція швидкості визначається не з рівнянь геострофічного вітру, а іншим шляхом, наприклад, рівняння нерозривності.

У разі двомірна дивергенція збурень швидкості вважається рівної нулю (бездивергентність).

Наближення гідростатики – це застосування замість третього рівняння руху рівняння гідростатики.

Лінеаризована система рівнянь для збурень швидкості

$$\begin{aligned}\frac{\partial u'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial u'}{\partial x} + v' \frac{d\bar{u}}{dy} &= -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial P'}{\partial x} + \ell v' \\ \frac{\partial v'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial v'}{\partial x} &= -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial P'}{\partial y} - \ell u', \\ \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} &= 0.\end{aligned}\tag{4.1}$$

За умови бездивергентності можна ввести функцію течії:

$$u' = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v' = \frac{\partial \psi}{\partial x}.\tag{4.2}$$

Продиференціювавши перше рівняння (4.1) по  $y$ , друге по  $x$  і склавши, отримаємо рівняння відносно  $\psi$  (рівняння завихреності):

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x}\right) \nabla^2 \psi + (\beta - u'') \frac{\partial \psi}{\partial x} &= 0, \\ \nabla^2 &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\end{aligned}\tag{4.3}$$

Уявімо збурення у вигляді нормальних мод з амплітудною функцією,



яка залежить від  $y$ , і введемо фазову швидкість збурення  $c$

$$\psi = \Psi(y)e^{ik(x-ct)}.$$

Щодо  $\Psi$  отримаємо рівняння

$$\Psi'' - \left[ k^2 - \frac{\beta}{\bar{u} - c} + \frac{\bar{u}''}{\bar{u} - c} \right] \Psi = 0, \quad (4.4)$$

На межах широтної смуги, у якій заданий профіль  $u(y)$ , ставляться однорідні граничні умови

$$\Psi = 0 \text{ при } y = 0, y = 2b.$$

Інакше кажучи,

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = v' = 0:$$

це означає непротікання через межі смуги.

Після переходу до безрозмірних величин (запровадження масштабів  $V, L, \beta$ )

$$\beta_0 = \frac{\ell}{L},$$

у рівнянні з'явиться число Россбі – визначальний параметр цього виду нестійкості:

$$\Psi_0'' - \left[ k_0^2 - \text{Ro}^{-1} \frac{\beta_0}{\bar{u}_0 - c_0} + \frac{\bar{u}_0''}{\bar{u}_0 - c_0} \right] \Psi_0 = 0, \quad \Psi_0 = 0, y = 0; y = 2b$$

Сформульована задача, очевидно, має розв'язання  $\Psi = 0$ .

Це так зване тривіальний розв'язок. Будь-яка задача про стійкість, що складається з однорідного рівняння та нульових граничних умов, має тривіальний розв'язок. Нас цікавлять нетривіальні розв'язки, які, можливо, існують при певних поєднаннях параметрів  $c, k, \beta, \text{Ro}$ . Ці нетривіальні розв'язки, що задовольняють рівняння та граничні умови, і треба знайти.

Зазвичай  $k, \beta, \text{Ro}$  задають, а фазову швидкість, якщо існують нетривіальні розв'язки, шукають. Такі значення фазової швидкості називають власними значеннями або власними числами, а вся задача, що складається з рівняння та граничних умов, називається задачею на власні значення. Іноді власні значення шукають у вигляді не  $c$ , а  $kc$ .

Якими можуть бути власні значення? Вочевидь, вони можуть бути або дійсними, або комплексними. У першому випадку їм будуть відповідати нейтральні (не зростаючі і не згасаючі) хвилі, у другому - амплітуди, що ростуть, або загасаючі хвилі.

При цьому може виникнути ситуація, коли дійсне власне значення виявиться рівним швидкості основного потоку в будь-якій точці:  $\bar{u}(y_k) = c$ .

І тут у рівнянні з'являється особлива точка  $y_k$ , у якій рівняння сингулярно. Значення координати, що відповідає сингулярності, називається критичним рівнем. Розв'язки рівняння, відповідні таким, називаються сингулярними нейтральними хвилями. Вони мають низку особливостей, про які ми скажемо пізніше.

Очевидно, фазові швидкості нейтральних сингулярних хвиль лежать в інтервалі  $u_{\min}c \leq u_{\max}$ .

Їх існування обумовлено наявністю сили, що відновлює, прагне повернути частинку у вихідне положення рівноваги. Наприклад, у стійко стратифікованому середовищі несингулярними нейтральними хвилями є гравітаційні хвилі.

Сингулярні хвилі існують остільки, оскільки існує нестійкість. Усі наявні при заданих  $\beta$  (або  $Ro$ ) та  $u(y)$  власні значення утворюють спектр власних значень.

У площині  $c_r, c_i$  власні значення розташовуються так, як показано рис. 4.1. Тут показано весь спектр своїх значень.

Звернемося до рівняння задачі про баротропну нестійкість

$$\Psi'' - \left[ k^2 - \frac{\beta}{\bar{u} - c} + \frac{\bar{u}''}{\bar{u} - c} \right] \Psi = 0. \quad (4.5)$$

з однорідними граничними умовами.

Спектр цієї задачі докладно досліджено Н.- Л. Куо. Згодом було отримано розв'язки для деяких інших профілів, крім струменеподібного профілю та профілю шару змішування, досліджених Куо.

Куо показав, що у цій задачі відсутні несингулярні хвилі, що обганяють потік, тобто хвилі з фазовими швидкостями  $c > \bar{u}_{\max}$ , але існують хвилі, що біжать проти потоку. Найпростіша формула для їх фазових швидкостей виходить при заміні  $u \rightarrow (y)$  його середнім значенням  $U$  та за умови, що  $\Psi$  не залежить від  $y$ , тоді з рівняння отримуємо (скорочуючи  $\Psi$ , оскільки  $\Psi$  не дорівнює тотожному нулю):

$$k^2 = \frac{\beta}{\bar{u} - c}$$

$$c = U - \beta k^2$$

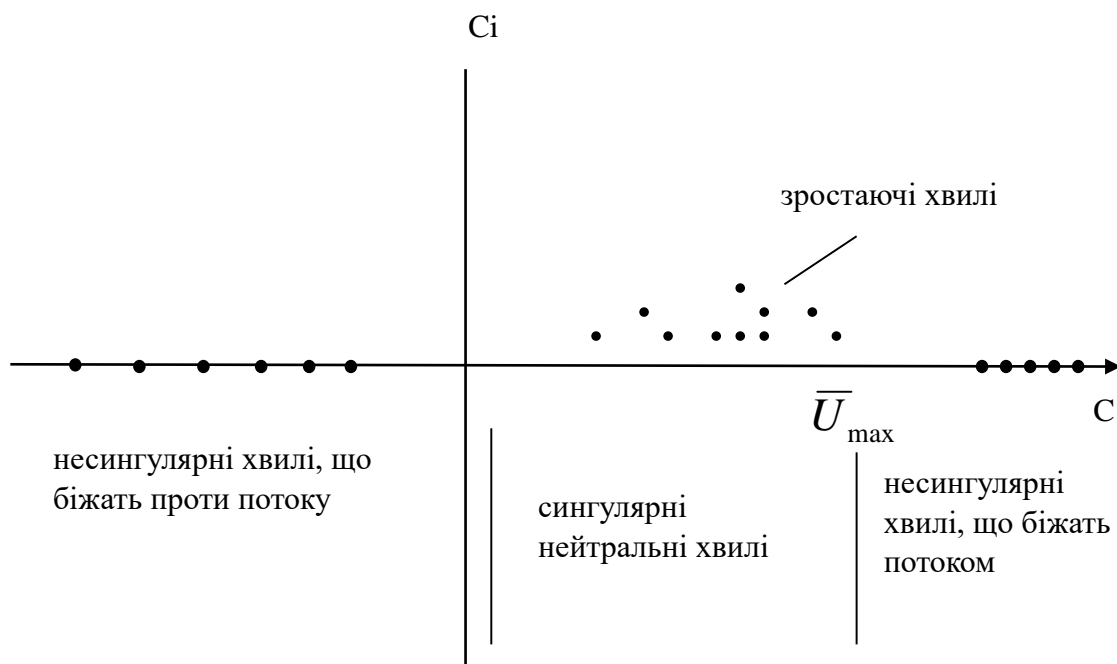


Рисунок 4.1. – Власні значення задач про гідродинамічну нестійкість в площині  $c_r, c_i$ .

Це співвідношення, що зв'язує фазову швидкість з параметрами  $\beta$  і  $k$  називається дисперсійним співвідношенням.

Хвилі, що визначаються отриманим дисперсійним співвідношенням, відомі як баротропні хвилі Россбі. Важливо, що вони біжать проти потоку і їх спектр безперервний. Крім того, їхня амплітуда  $\Psi$  не залежить від поперечної координати  $y$ .

Інший окремий випадок несингулярних хвиль – хвилі Гаурвіца. Їх ми отримуємо  $\bar{u} = \text{const}$  та

$$\Psi = A \sin \frac{\pi y}{2b}, \quad (4.6)$$

де  $b$  – напівширина зональної лінії, у якій розглядається основний потік. Підставляючи ці величини до рівняння, отримуємо дисперсійне співвідношення

$$c = \bar{u} - \frac{\beta}{k^2 + \frac{\pi^2}{4b}}, \quad (4.7)$$

Хвилі Гаурвіца характеризуються синусоїдальною залежністю меридіональної складової швидкості ( $v'$ ) від поперечної координати в межах широтної смуги  $(0, 2b)$ .

Несингулярні нейтральні хвилі не одержують енергії від зонального потоку; вони можуть у ньому існувати теоретично як завгодно довго, якщо були внесені в цей потік від будь-якого джерела, - наприклад, при обтіканні перешкоди.

Хвилі Россбі і Гаурвіца є довгими хвилями на баротропному зональному потоці. Їх довжини – близько 5000 км та більше. У реальній атмосфері не реалізуються точно умови, за яких отримані дисперсійні співвідношення для хвиль Россбі і Гаурвіца. Однак у ряді випадків реальні потоки досить близькі до ідеалізованих, для яких ці дисперсійні співвідношення отримані, так що хвилі Россбі і Гаурвіца виявляються такими, що добре описують реальні атмосферні довгі хвилі, що біжать проти потоку.

Звернемося до нестійких та нейтральних хвиль.

У всіх лінійних задачах про стійкість виводиться необхідна умова існування нестійких збурень.

В даному випадку ця необхідна умова полягає у виконанні рівності

$$\beta - \frac{d^2\bar{u}}{dy^2} = 0$$

Фізично це означає, що похідна по широті від абсолютного вихору повинна звертатися в нуль (міняти знак) десь усередині широтної смуги.

Справді, абсолютний вихор у баротропному зональному потоці буде

$$\left( \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} - \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \ell \right) = -\frac{d\bar{u}}{dy} + \ell, \quad (4.8)$$

а його похідна по  $y - \frac{d^2\bar{u}}{dy^2} + \beta$ .

Виконання необхідної умови нестійкості свідчить про можливість існування нестійких мод. Навпаки, умова необернення на нуль і сталості знака похідної абсолютного вихору по широті є достатньою умовою стійкості даного потоку.

Є аналітичні розв'язки для найбільш характерних меридіональних профілів  $\bar{u}(y)$ . Наведемо класичні результати Куо для зонального струменя  $\bar{u}(y) = \frac{1+\cos y}{2}$ ,  $-\pi < y < \pi$ .

Для такого потоку існує інтервал нестійкості, причому нестійкі хвилі існують в інтервалі між двома нейтральними сингулярними хвилями, в однієї з яких критичний рівень знаходиться в точці, де виконується

необхідна умова нестійкості, а другий - на кордоні, де він відокремлює інтервал фазових швидкостей нестійких хвиль від інтервалу несингулярних мод Россбі - Гаурвіца. У проміжку розташовані фазові швидкості нестійких хвиль.

Показники зростання представлені рисунку.

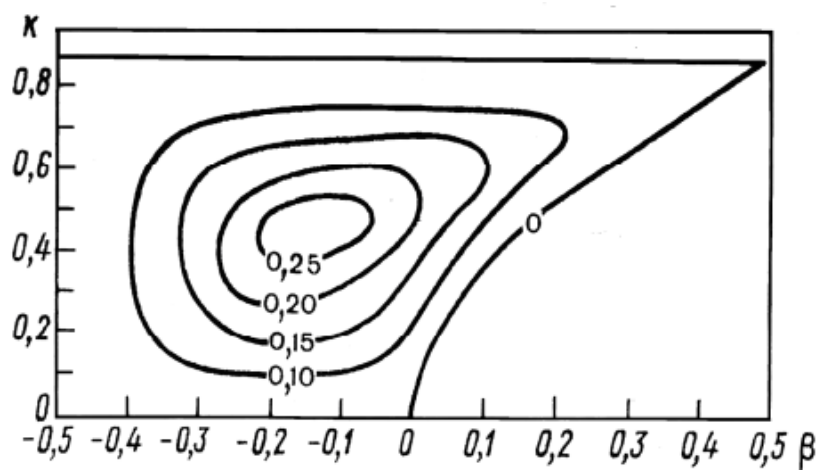


Рисунок 4.2 – Ізолінії показників зростання  $kc_i$  баротропно-нестійких хвиль в площині безрозмірних  $\beta, k$  при  $\bar{u} = \frac{1}{2}(1 + \cos y)$

Тут по осі  $x$  відкладено безрозмірне  $\beta$ , по осі  $y$  – безрозмірне  $k$ . Негативні  $\beta$  відповідають потоку зі сходу на захід ( $U$  – швидкість на осі струменя,  $L$  – її півширина). У східному потоці показники зростання та довжина нестійких хвиль більші, ніж у західному.

Розглянемо наведений рисунок. Тут проведені ізолінії  $kc_i$ , амплітуда хвилі зростатиме як  $\exp(kc_i t)$ .

Усі величини тут безрозмірні. Для цього процесу характерний час можна визначити як  $T = \frac{L}{U}$ .

Безрозмірний час вимірюватимемо в одиницях характерного часу. Внутрішня замкнута ізолінія рисунку – це  $kc_i = 0.25$ , що близько до максимального показника зростання. При  $t = 0$ ,  $\exp(kc_i t) = 1$ , а за  $t = 4$  буде  $\exp(kc_i T) = e$ . Таким чином, за 4 характерні години збурення зросте в  $e$  рази.

Швидкість зростання збурень вимірюється через час подвоєння амплітуди, але частіше (і це зручніше) - через час зростання амплітуди в  $e$  раз ( $e$ -folding time). У цьому випадку це  $4T$ .

Нехай  $L=1000$  км,  $U=10$  м/с. Тоді  $T \approx 30$  год. Отже, за 120 год або 5 діб амплітуда збурення може зрости в  $e$  рази. Довжина хвилі у своїй – близько 6 тис. км.

Ще один приклад розв'язання задачі про стійкість баротропного зонального потоку. Якщо перший приклад відтворював ситуацію із зональною струменевою течією середніх широт, то для тропіків більш характерний профіль типу переходу від східного перенесення до західного. У внутрішньотропічній зоні конвергенції (ВТЗК) вітер розподілено так: на північ від ВТЗК він східний, на південь – західний. Цей тип профілю апроксимується функцією (див. рис. 4.3)  $\bar{u} = -thy$ .

Ширина перехідної зони  $d$  – близько 150 км. Розв'язок для цього випадку при  $\beta_6 > 0$  одержав Ljrrps для показників зростання. Сингулярні нейтральні хвилі винайшов Куо. Це також дві хвилі, що обмежують область нестійкості. Масштаб швидкості  $U$  вибраний рівним половині перепаду швидкостей на відстані  $d$ . Зі зростанням  $\beta$ , максимальний показник зростання зміщується у бік більш коротких хвиль. При  $U = 7$  м/с довжина найбільш нестійкої хвилі близько 3000 км, час зростання амплітуди раз - близько 2 діб.

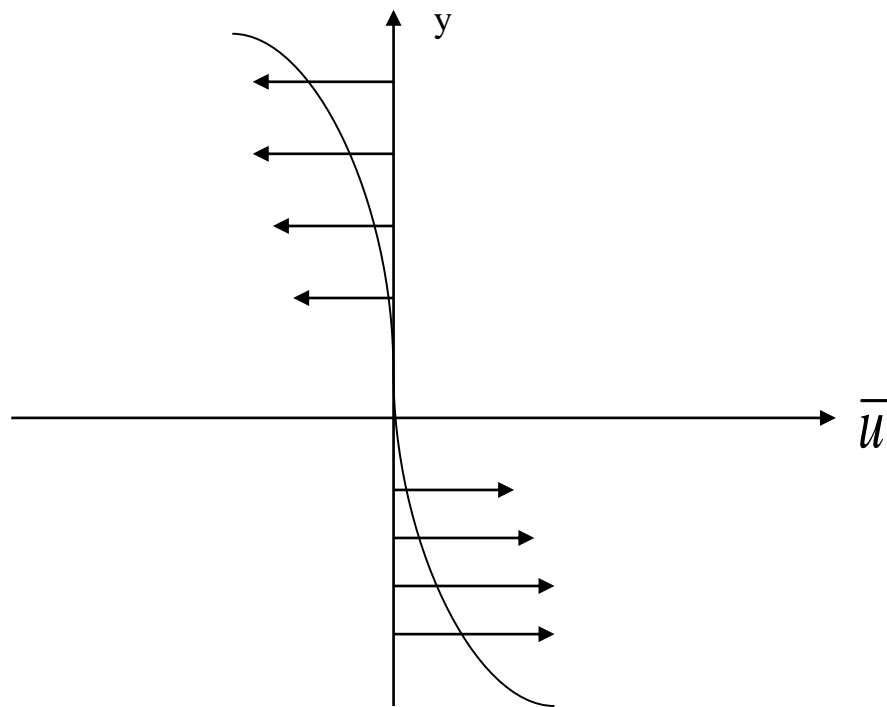


Рисунок 4.3 – Профіль типу «шару змішування»,  $\bar{u} = -thy$

Таким чином, баротропні хвилі - і нейтральні несингулярні, і нестійкі - досить довгі хвилі. Їхня довжина варіює залежно від параметрів потоку.

Звернемо увагу, що області нестійкості на рисунках обмежені ізолінією  $c_i = 0$ : це межа області нестійкості, що з власних чисел, відповідних нейтральним сингулярним хвиль.

Зауважимо ще, що у діаграмах стійкості бачимо досить широкі інтервали  $k$  і  $\beta$ , у яких хвилі нестійкі. Однак фізичне значення має тільки

найбільш нестійка хвиля, тому що вона зростає найшвидше і незабаром придушить решту нестійких мод. Вони хоч і будуть існувати і якимось змінювати структуру збурення, що розвивається, але їх вплив буде другорядним через малі швидкості зростання.

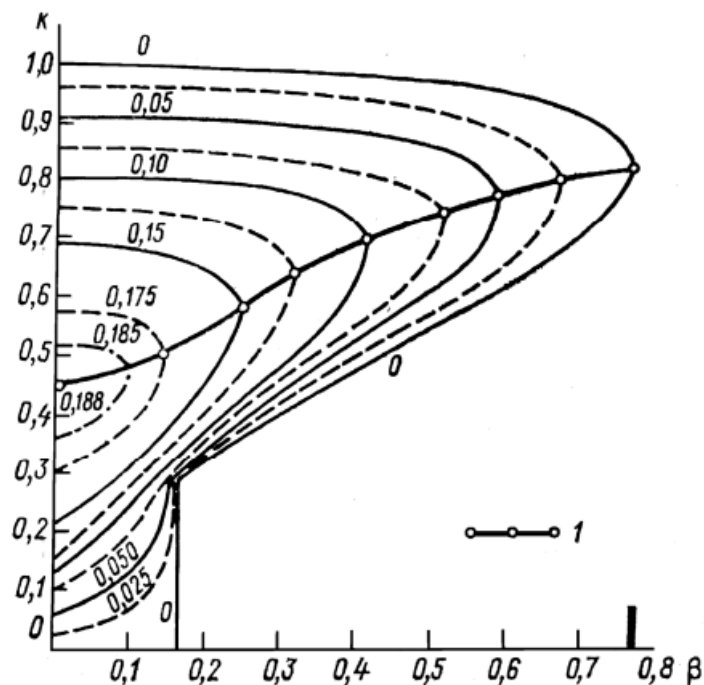


Рисунок 4.4 – Ізолінії показників зростання  $k_i$  баротропно-нестійких хвиль в площині безрозмірних  $\beta, k$  при  $\bar{u} = -\text{th}u$

Тому нестійке збурення матиме структуру, близьку до найбільш нестійкої структури нормальної моди.

Які атмосферні об'єкти розвиваються із баротропно-нестійких збурень?

Це великомасштабні улоговини та гребені, циклони та антициклони, мусонні депресії, стратосферні збурення та центри дії атмосфери. У освіті всіх цих об'єктів баротропна нестійкість західних зональних потоків відіграє велику роль.

Потоки типу шару змішування, притаманні ВТЗК, можуть породжувати нестійкі збурення, які відіграють роль початкових вихорів у розвиток тропічних циклонів.

Вплив баротропної нестійкості у атмосфері проявляється переважно масштабах загальної циркуляції атмосфери. Однак рухи малих масштабів можуть бути баротропно-нестійкими. Є роботи, в яких, зокрема, показано, що у вихорі типу торнадо – дрібномасштабному вихорі з великими швидкостями обертання та великими радіальними градієнтами

тангенціальної швидкості, - азимутальні неоднорідності, що розвиваються у вторинні множинні торнадо, можуть виникати в результаті баротропної.

Отже, на прикладі задачі про баротропну нестійкість ми познайомилися з основними поняттями лінійної теорії нестійкості:

- задача на власні значення (фазової швидкості або показника зростання);
- спектр власних значень;
- дисперсійне співвідношення;
- несингулярні нейтральні хвилі, зокрема хвилі Россбі та Гаурвіца, що біжать проти потоку;
- необхідна умова нестійкості (і достатня умова стійкості);
- сингулярні нейтральні хвилі, що утворюють межу області нестійкості;
- критичний рівень сингулярних хвиль;
- час зростання амплітуди в рази;
- найбільш нестійка хвиля;
- діаграма стійкості у площині параметрів задачі (в даному випадку  $\beta$  та  $k$ ).

Всі ці поняття є фундаментальними для теорії нестійкості. Вони були введені ще Релеєм при дослідженні задачі, яка тепер називається задачею Релея і яка відрізняється від задачі про баротропну нестійкість зонального потоку на  $\beta$ -площині тим, що в ній  $\beta = 0$ . При цій умові з рівняння задачі про баротропну нестійкість отримуємо рівняння Релея

$$\Psi'' - \left[ k^2 + \frac{\bar{u}''}{\bar{u} - c} \right] \Psi = 0, \quad (4.9)$$

а необхідна умова нестійкості буде:  $\bar{u}'' = 0$  десь у потоці. Інакше висловлюючись, нестійкими будуть потоки з точкою перегину профілю швидкості, а стійкими – потоки без точки перегину. Це т. зв. теорема Релея. Виведена нами вище умова нестійкості баротропного зонального потоку є аналогом теореми Релея для цього випадку.

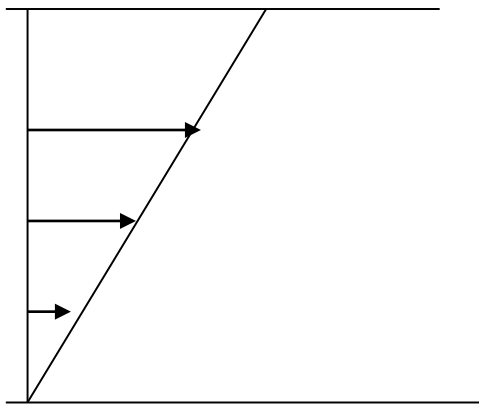
Нижче на рисунку показані профілі швидкості, що найчастіше розглядаються. Течії Куетта і Пуазейля стійкі згідно з теоремою Релея, а струменевий перебіг та перебіг типу шару змішування – нестійкі.

Такий результат має місце в рамках задачі Релея, тобто в нев'язкій та байдуже стратифікованій рідині (або газі). У реальних рідинах існує в'язкість, та його турбулізація відбувається зовсім так, як це впливає із задачі Релея. Чим більш в'язка рідина, тим більша і відмінність. З одного боку, в'язкість грає стабілізуючу роль, з іншого – вона призводить іноді до появи нестійкості таких потоків, які за теореми Релея є стійкими.

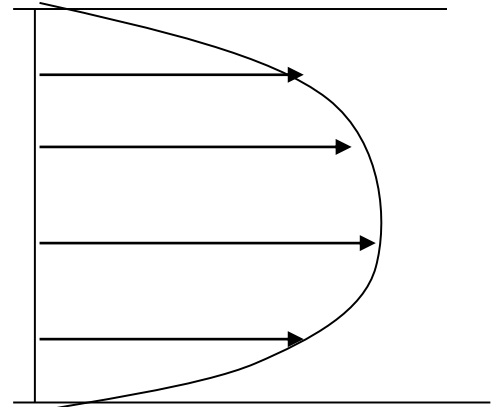
Якщо в'язкістю не нехтувати, то замість рівняння Релея отримуємо т. зв. рівняння Ора-Зоммерфельда (4-го порядку):



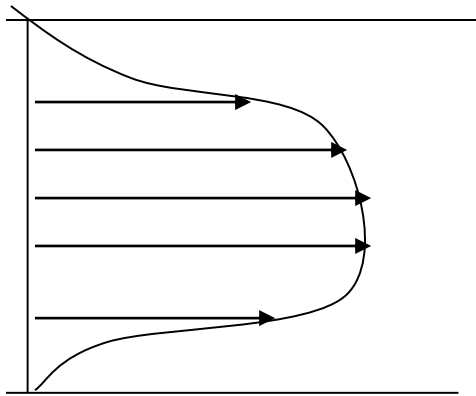
$$w'' - \left[ k^2 - \frac{\beta}{\bar{u} - c} + \frac{\bar{u}''}{\bar{u} - c} \right] w = -\frac{iv}{k(\bar{u} - c)} [w^{IV} - 2w''k^2 + k^4w], \quad (4.10)$$



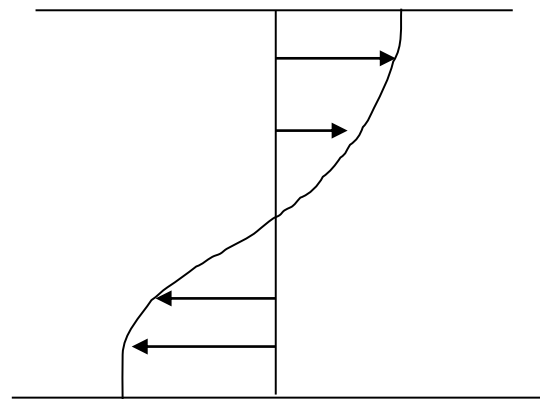
течія Куетта



Течія Пуазейля



струменева течія



течія шару змішування

Рисунок 4.5 – Приклади профілей швидкості. Стійких згідно теоремі Релея (течії Куетта і Пуазейля) і нестійких (струменева течія, шар змішування)

Про роль в'язкості можна сказати таке. Якщо рівняння нев'язкої задачі виявляє нестійкість, то й у в'язкому наближенні потік виявляється нестійким. Зворотне невірно: у випадках, коли нев'язкий розгляд приводить до висновку про стійкість потоку, - не виключено, що в'язкий розгляд виявить нестійкість. Так, течія Пуазейля у в'язкому наближенні нестійка.

В задачах про нестійкість атмосферних потоків роллю в'язкості можна знехтувати (крім задач про конвективну нестійкість, а також задач про нестійкість рухів найменших масштабів, якими ніхто в метеорології не займається). Найважливішу роль відіграють сили Коріоліса та плавучості.

## 4.2 Теорема Сквайра та Говарда

Розглядом цих теорем ми продовжимо стислий огляд результатів аналізу задачі Релея. Хоча сама по собі, за своїм фізичним змістом, ця задача не являє для нас інтересу, тому що погодотворних процесів вона не описує, проте основні закономірності поведінки нестійких збурень вона виявляє, і ці закономірності, з певними видозмінами, залишаються в силі і для атмосферної нестійкості.

Ми вже бачили, що необхідна умова нестійкості у задачі Релея  $\bar{u}'' = 0, y = y_k$  - умова зміни знаку кривизни профілю вітру (умова наявності точки перегину профілю) - у разі баротропної нестійкості перетворюється на  $\beta - \bar{u}'' = 0, y = y_k$ .

Аналогічні формулювання ми отримуємо інших видів нестійкості, як буде показано пізніше.

Згадаймо й інші загальні положення, які мають аналоги в інших задачах стійкості. Насамперед звернемо увагу на **теорему Сквайра (1933)**:

Якщо є тривимірне ( $l \neq 0$ ) хвильове збурення, тобто нормальна мода, що розповсюджується під кутом до основного потоку, то завжди існує двовимірне ( $l = 0$ ) збурення, що зростає швидше за цей тривимірний.

Фізичний сенс цього твердження є таким. У загальному вигляді нормальні моди задачі Релея (а також і задачі Куо про баротропну нестійкість) слід подавати у вигляді  $\Psi(y)e^{ikx+ily+i\omega t}$ , але на попередній лекції представляли їх у вигляді  $\Psi(y)e^{ikx+i\omega t}$ , або, вводячи фазову швидкість,

$$\Psi(y)e^{ik(x-ct)}. \quad (4.11)$$

Отже, ми вважали  $l = 0$ . Проте цим, взагалі кажучи, применшували спільність розгляду. Насправді ми при цьому спиралися на теорему Сквайра, яка має місце і для задачі Релея, і для задачі Куо: якщо є нестійкі моди з  $l \neq 0$ , то є і більш нестійкі (з більшим  $ks$ ) моди, у яких  $l = 0$ , Т. е. такі, у яких фронт хвилі перпендикулярний основному потоку. Фронтом хвилі ми називаємо тут лінію постійної фази: напр., вісь гребеня чи вісь улоговини. Фізична фаза хвилі в поданні (4.11) дорівнює при  $ct < 0$ .

Тому у всіх задачах про стійкість треба спочатку перевірити, чи має місце теорема Сквайра, і якщо так, то відразу спростити задачу, поклавши  $l = 0$ . Адже нас цікавить лише найбільш нестійка хвиля, оскільки згодом вона придушить решту.

**Теорема Говарда** вказує на геометричне місце комплексних  $s$ . Першим у цьому напрямку просунувся Релей, який вказав геометричне місце точок, що відповідають фазовим швидкостям нестійких хвиль. Він показав, що ці точки лежать усередині інтервалу швидкостей основного потоку: якщо  $cs \neq 0$ , то

$$u_{\min}^- \leq c_r \leq \bar{u}_{\max}, \quad (4.12)$$

Говард (1961) довів таке твердження.

У комплексній площині всі власні значення задачі Релея, якщо вони існують, лежать усередині півкола, діаметром якого є інтервал  $(u_{\min}^-, \bar{u}_{\max})$ .

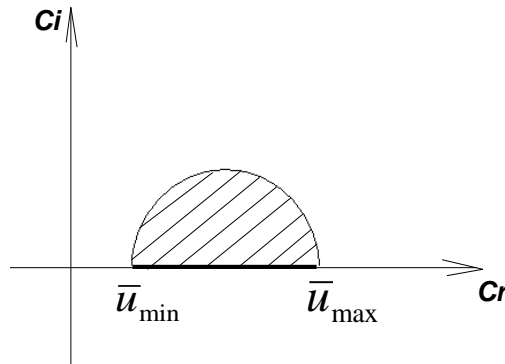


Рисунок 4.6 – Напівколо в площині  $c_r, c_i$ , в якому знаходяться комплексні фазові швидкості Релея

Таким чином, можна оцінити верхню межу можливих показників зростання. У різних задачах про стійкість атмосферних течій теорема Говарда має місце певним чином модифікованому вигляді. Так, для баротропного потоку на  $\beta$ -площині теорема про півколо має місце, але діаметр півкола дещо розширюється порівняно із задачею Релея і дорівнює  $D = \bar{u}_{\max} - u_{\min} + \beta F$ , де  $F$  – позитивна величина, що залежить від  $k$  і від швидкості основного потоку.

Для потоків на  $\ell$  – площині теорема Говарда зберігається у тому вигляді, як і задача Релея. Це не означає, однак, що все півколо заповнене власними числами з  $c_i \neq 0$ . Це означає тільки, що всі комплексні власні числа, які існують, будуть лежати в цьому напівколі, а поза його межами – ні. Так само не можна думати, що весь інтервал швидкостей основного потоку заповнений нейтральними сингулярними хвилями і всі вони лежать на межі стійкості, тобто в околицях є комплексні  $c$ .

Перейдемо до основної для нас задачі – до задачі бароклінної нестійкості.

### **Бароклінна нестійкість зональних потоків**

#### **1. Бароклінна нестійкість на $\ell$ -площині**

Вперше таку задачу було поставлено та вирішено англійським метеорологом Eady (1949). Отриманий розв’язок відоме як модель Іді.

Основний потік вважається геострофічним, гідростатичним, постійним за напрямком і таким, що має постійний вертикальний зсув швидкості:

$$\bar{u} = \bar{u}(z), \frac{d\bar{u}}{dz} = \text{const.} \quad (4.13)$$

Вважатимемо, що потік обмежений жорсткими стінками при  $z = H/2$ , але не обмежений по горизонталі. В'язкість та теплопровідність не враховуються. На межах виконується умова непротікання як умова згасання вертикальної швидкості збурення ( $w = 0$ ).

Оскільки збурення розглядаються в площині  $x, z$  і залежать від цих координат і часу, то, на відміну від баротропної задачі, мають місце не тільки збурення швидкості та тиску, а й температури, а систему рівнянь увійде і рівняння припливу тепла для адіабатичного процесу. Температура незбуреного потоку залежить від висоти та поперечної координати

$$\bar{\vartheta} = \vartheta(y, z), \frac{\partial \bar{\vartheta}}{\partial y} = \text{const}, \frac{\partial \bar{\vartheta}}{\partial z} = \text{const.} \quad (4.14)$$

Залежність від визначається співвідношенням термічного вітру.

Система рівнянь щодо збурень буде, після лінеаризації та прийняття наближення Бусінеска

$$\begin{aligned} \frac{\partial u'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial u'}{\partial x} + w' \frac{d\bar{u}}{dz} &= -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial P'}{\partial x} + f v', \\ \frac{\partial v'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial v'}{\partial x} &= -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial P'}{\partial y} - f u', \\ -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial P'}{\partial z} - \frac{\theta' g}{\bar{\theta}} &= 0, \\ \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial \theta'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \theta'}{\partial x} + v' \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial y} + w' \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Коефіцієнти цієї системи залежать від  $z$  і розв'язок можна шукати у вигляді (теорема Сквайра виконується)

$$S' = S^{\wedge}(z) e^{ikx + i\omega t} = S^{\wedge}(z) e^{ik(x-ct)}, \quad (4.16)$$

де

$$S' = \{u', v', w', \theta', P'\}.$$

Після підстановки в систему рівнянь, виписану вище, виразів для  $S'$  у вигляді нормальних мод та виконання перетворень з метою виключення всіх невідомих амплітудних функцій, крім  $w'$ , – отримуємо після деяких спрощень

$$w'' - \frac{2\bar{u}'w'}{\bar{u} - c} - \frac{k^2 N^2}{f^2} w = 0. \quad (4.17)$$

Граничні умови

$$w = 0, z = \pm \frac{H}{2}.$$

Тут у рівнянні з'являється частота Брента-Вяйсяля

$$N^2 = \frac{g}{\bar{\theta}} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z}. \quad (4.18)$$

Якщо перейти до рівняння до безрозмірних величин, то з'являється характерне число Річардсона

$$Ri = \frac{N^2 H^2}{U^2}. \quad (4.19)$$

Розв'язання цієї задачі, отримане вперше Іді, досить складне. Воно наводиться повністю у рекомендованих монографіях (Шакіна 1985, 1990). Ми тут зупинимося лише на результатах.

Необхідна умова нестійкості цієї задачі аналогічно задачі Релея (похідна завихренності обертається на нуль десь у області) і виконується завжди, тобто. барокліний потік на  $f$  – поверхні завжди нестійкий. Виконується і теорема про півколо.

Якщо швидкість основного потоку змінюється від  $u_{\min}^-$  до  $u_{\max}^-$ , то для задачі на власні значення, сформульованій вище, знайдено нестійкі розв'язки, яким відповідають

$$c_r = \frac{\bar{u}_{\min} + \bar{u}_{\max}}{2}, \quad (4.20)$$

$$c_i = c_i(f, H, \bar{u}', N^2),$$

причому залежність  $c_i$  від своїх аргументів не виражається простою формулою.

Перше з цих співвідношень показує, що хвилі поширюються з фазовою швидкістю, що дорівнює середній швидкості незбуреного потоку або, що те ж саме при  $\bar{u}' = \text{const}$ , зі швидкістю незбуреного потоку на середньому рівні шару, що розглядається. Це був названий рівнем ведучого потоку (steering level).

Друге співвідношення визначає  $c_i$  таким чином, що починаючи з певного  $k = k_c$ , що залежить від інших параметрів, буде  $c_i = 0$ , а від  $k =$

0 до  $k = k_c$  спостерігається спочатку зростання  $c_i$  від 0 до деякого максимуму, а потім спадання. Таким чином, на певному інтервалі довжин хвиль, від найдовших до

$$\lambda_c = \frac{\pi}{k_c}, \quad (4.21)$$

має місце зростання збурень, причому одна з нестійких хвиль має максимальний показник зростання, тобто є найбільш нестійкою. Ця найбільш нестійка хвиля знайдена у роботі Іді аналітично (амплітудна функція та довжина). Розв'язки отримані для необмеженого потоку в поперечному напрямку, і для обмеженої широтної смуги. Очевидно, що і те, й інше нефізично стосовно реальної атмосфери, оскільки припущення  $f = const$  придатне лише у вузькому інтервалі широт. Проте отримані розв'язки мають багато характерних рис атмосферних збурень: гребенів і улоговин, молодих циклонів та антициклонів.

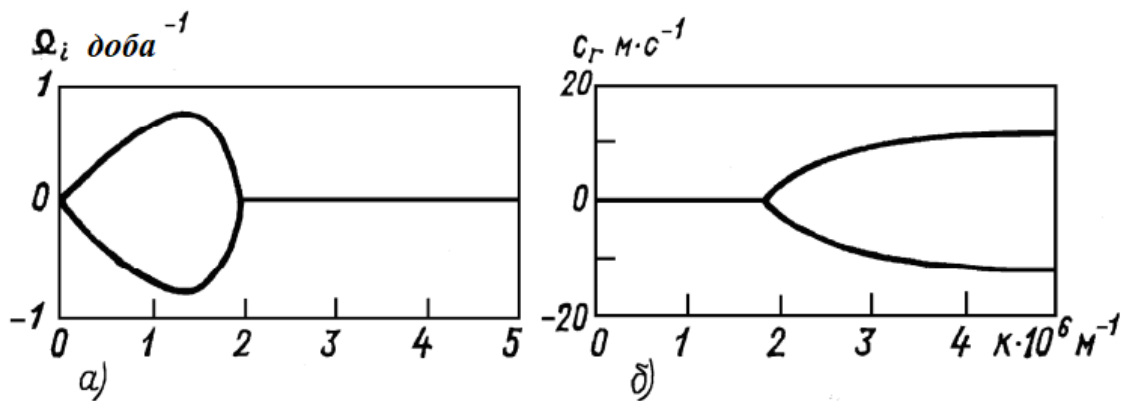


Рисунок 4.7 – Показник зростання  $\Omega_i = -kc_i$  (а) і фазова швидкість  $c_r$  відносно потоку на середньому рівні (б) хвиль Іді в залежності від горизонтального хвильового числа  $k$  при значеннях параметрів, які є характерними для тропосфери середніх широт

При  $k = k_c$  показник зростання перетворюється на нуль: це т. зв. короткохвильове відсікання нестійкості: short wave cut-off. Дедалі коротші хвилі, ніж  $\lambda_c = 2\pi k_c$ , можуть бути лише нейтральними. Вони не одержують енергії від основного потоку. На рисунку показано фазові швидкості двох таких хвиль, що лежать усередині інтервалу зміни швидкості основного потоку. Несингулярні хвилі, зовнішні по відношенню до інтервалу  $(\bar{u}_{\min}, \bar{u}_{\max})$ , у цій задачі відсутні. Як ми побачимо, вони постають у задачі про бароклінну нестійкість на  $\beta$  – площині.

Отже, найбільш швидко зростаючими хвилями в потоці з постійним вертикальним зсувом вітру в обмеженому шарі будуть хвилі, що не

залежать від поперечної до потоку горизонтальної координати (в силу теореми Сквайра) і є гребені, що чергуються, і улоговини з осями, перпендикулярними основному потоку. Чим менше зсув вітру, тим слабша нестійкість (менше показники зростання). При деякому малому зрушенні вітру нестійкість зникає, хоча її необхідна умова виконується.

Подивимося, як залежать від висоти і параметрів задання амплітудні функції як  $w'$ , а й інших збурень: складових швидкості  $u'$ ,  $v'$ , тиску і потенціальної температури:

$$v = \frac{w'f}{k^2(\bar{u} - c)}, u = -\frac{w}{ik}, \bar{\rho} = \frac{if^2w'}{k^3(\bar{u} - c)}, \quad (4.22)$$

$$\frac{\theta}{\bar{\theta}} = \frac{iN^2w}{gk(\bar{u} - c)} + \frac{if^2\bar{u}w'}{gk^3(\bar{u} - c)^2}. \quad (4.23)$$

При дійсних коефіцієнти рівняння щодо  $w$

$$w'' - \frac{2\bar{u}'w'}{\bar{u} - c} - \frac{k^2N^2}{f^2}w = 0 \quad (4.24)$$

дійсні, а значить і розв'язок,  $w$ , дійсний. Інші амплітудні функції будуть або чисто дійсними, або чисто уявними. Представимо будь-яке комплексне число у вигляді

$$a + bi = e^{i \arctg ba} \sqrt{a^2 + b^2} \quad (4.25)$$

Величина  $\sqrt{a^2 + b^2}$  називається модулем комплексного числа, а  $\arctg(b/a)$  – його аргументом. У чисто дійсного числа аргумент дорівнює нулю або  $\pi$  (для позитивних і негативних чисел відповідно), у чисто уявних  $\pi/2$  або  $3\pi/2$ .

Тому у нейтральних хвиль збурення  $u'$ ,  $P'$ ,  $\vartheta'$  будуть зсунуті по фазі щодо  $w'$  на  $\pi/2$ , але фази кожної компоненти будуть незалежні від  $z$ .

Якщо ж  $c$  комплексне, тоді у рівнянні можна розділити дійсну і уявну частини і знайти їх порізно. Розв'язок буде  $w(z) = w_r(z) + iw_i(z) = |w(z)|e^{i \arctg w_i w_r}$ .

Саме така фаза, що залежить від  $z$ , додається до показника експоненти нормальної моди. Тоді, крім того, зсуву фаз, який постійний по висоті і визначається коефіцієнтами в формулах для амплітудних функцій, ми отримаємо залежний від висоти зсув фаз збурень всіх величин. Цей зсув фаз визначає зміщення улоговин і гребенів у полях вертикальної швидкості щодо збурень температури і тиску, подібне до того, яке ми можемо спостерігати і на картах баричної топографії.

На рис. 4.8 показано зміну фаз та амплітуд бароклінно-нестійких хвиль по висоті.

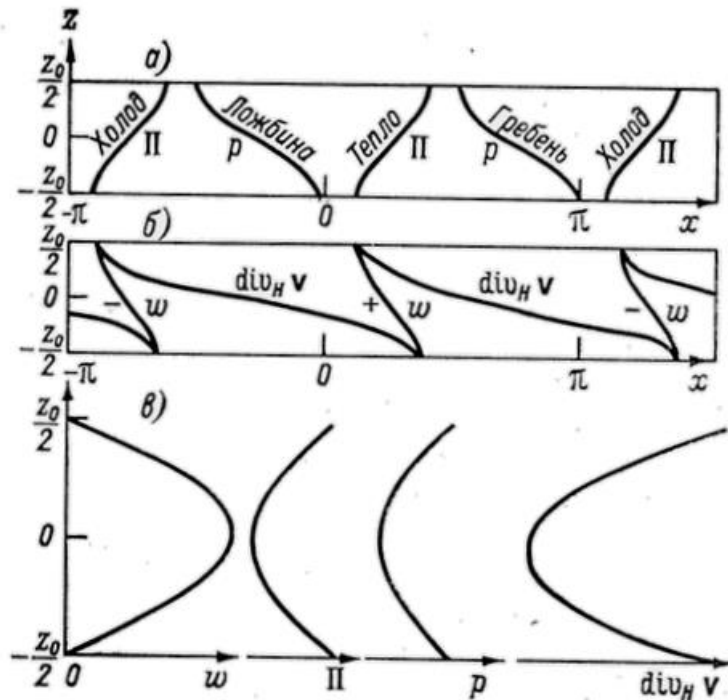


Рисунок 4.8 – Зміни фази бароклінно-нестійких збурень тиску ( $p$ ), ентропії ( $\Pi$ ), вертикальних рухів ( $w$ ) і дивергенції ( $div_H V$ ) в площині  $x, z$  (а,б) і розподіл їх амплітуд (абсолютних величин амплітудних функцій) з висотою (в) в горизонтальному шарі товщиною  $z_0$ .

Зокрема, фаза відхилень тиску від його значень у непорушному потоці та фаза відхилень ентропії  $\Pi$ :

$$\Pi = \int \frac{d\theta}{\theta} \quad (4.26)$$

розподілені таким чином, що мінімум тиску у землі (вісь улоговини) знаходиться дещо позаду гребеня тепла біля землі. З висотою вісь улоговини зміщується у бік мінімальних  $\Pi$ , так що на верхній межі улоговини тиску є холодною: вісь холоду проходить лише кілька позаду осі найменших  $\Pi$ . Так само гребінь тиску є холодним біля землі і теплим на верхній межі шару. Фаза вертикальних рухів змінюється по висоті таким чином, що максимальне сходження в нижньому шарі спостерігається у передній частині улоговини. На середньому рівні, де вертикальні рухи максимальні, вісь сходження розташовується на  $1/8$  довжини хвилі попереду осі висотної улоговини. Зазначимо також, що на





У роботі Іді отримано аналітичний розв'язок для двошарового потоку: нижній шар – тропосфера – менш статично стійкий, ніж верхній (стратосфера) і тягнеться до рухомого внутрішнього кордону (тропопаузи). Верхній шар стійкіший і має нескінченну протяжність. Ставиться умова згасання  $w'$  на землі та  $z \rightarrow \infty$ .

Відхилення розв'язку двошарової задачі від основного розв'язку для хвиль Іді полягають у тому, що нестійкі хвилі зміщуються з фазовою швидкістю, відмінною від швидкості вітру на середньому рівні в тропосфері, і ці відмінності залежать від стратифікації у стратосфері та від зсуву вітру. Рівень ведучого потоку тепер теж відрізняється від середини шару.

При зростанні статичної стійкості в стратосфері співвідношення для двошарової моделі прагнуть відповідних співвідношень для одношарової моделі з жорсткою верхньою межею. Якщо ж відношення чисел Річардсона у тропосфері та стратосфері близьке до одиниці, то збурення поступово проникають у верхній шар, де й загасають із висотою.

У двошарової моделі при стійкій стратосфері зберігається короткохвильове відсікання і є максимум показника зростання, але він менше, ніж одношарової моделі.

Розподіл фаз та амплітуд нестійких хвиль у двошаровій моделі характеризується сталістю по висоті фаз збурень у стратосфері, тоді як у тропосфері співвідношення фаз та їх зміни за висотою такі ж, як у одношаровій моделі.

Таким чином, при високій, у порівнянні з тропосферою, стійкості в стратосфері збурення зосереджуються в тропосфері і мало залежать від стратифікації у шарі, що вище лежать, так що їх поведінка в першому наближенні можна описати одношаровою моделлю.

Чудово, що за рівності чисел Річардсона в тропосфері та стратосфері нестійких збурень немає взагалі:  $c_i = 0$  скрізь. Таким чином, у нескінченному вертикалі шарі нестійких бароклінних хвиль не існує.

Для розвитку бароклінної нестійкості в тропосфері, таким чином, потрібна наявність верхньої межі бароклінного шару (або у вигляді жорсткої стінки, або у вигляді тропопаузи, що відокремлює бароклінний шар від стійкішої стратосфери).

Розглянуті моделі для бароклінної нестійкості  $f$  - площині є основними. Є велика кількість робіт, в яких отримано розв'язки для різних профілів вітру та температури, з урахуванням наявності прикордонного шару, негеострофічності та негідростатичності основного потоку та збурень. Отримані розв'язки таких задач, переважно чисельні, краще узгоджуються за структурою з атмосферними збуреннями. Однак представлені тут прості моделі є класичними: незважаючи на велику кількість припущень, що спрощують, вони охоплюють найбільш істотні

властивості бароклінно-нестійких збурень на стадії початкового зростання.

Зі сказаного укладаємо, що атмосферний циклогенез є не що інше, як прояв бароклінної нестійкості, Або, інакше кажучи, задача про бароклінну нестійкість є задачею про циклогенез.

На картах баричної топографії поля об'єктивного аналізу та прогностичні поля, отримані за допомогою чисельних моделей, зазвичай надаються даними на дискретних рівнях. Тому в період бурхливого розвитку теорії бароклінної нестійкості велика увага приділялася вирішенню задач про стійкість двох- та багаторівневих моделей повітряних течій. Зупинимось на найпростішій двошаровій моделі Філіпса (1954).

Розглядається зональний потік у обмеженій широтній смузі. У кожному шарі параметр статичної стійкості вважається постійним, різниця швидкостей вітру у двох шарах задана та постійна. У умовах вдається отримати дисперсійне співвідношення, з якого виводиться умова існування нестійких хвиль (комплексних фазових швидкостей). При однакових меридіональному та широтному розмірах збурень ця умова має вигляд

$$U_1 - U_3 > \sigma \cos \phi (\sin^2 \phi)^{-1}.$$

Тут  $U_1, U_3$  – швидкості зонального потоку відповідно на верхньому та нижньому рівнях (250 і 750 гПа відповідно),  $\phi$  – широта,  $\sigma = 0.124 C_p \Delta\theta / 2R\omega$  - параметр статичної стійкості ( $\Delta\theta = \theta_1 - \theta_3$ ),  $R$  – радіус Землі,  $\omega$  - кутова швидкість її обертання.

Критерій Філіпса зручний для застосування та дає хороші результати, незважаючи на грубість моделі, в якій він отриманий. З його допомогою найкраще виділяються ділянки поля, у яких розвиваються глибокі циклони. Зародження і початковий зростання неглибоких циклонів рідше відбуваються в ділянках виконання критерію Філіпса (приблизно в 50-60% випадків), тоді як циклони, що розвиваються в глибокі збурення, зароджуються і заглиблюються в областях, де критерій Філіпса перевищує критичне значення, 70-90% випадків. (Критичним значенням  $U_1 - U_3$  вважалося 10 м/с влітку і 20 м/с взимку. Глибокими вважалися циклони, в центрі яких тиск впав на 20 гПа і більше за період поглиблення.) Ці результати отримані були Е. Н. Скриптунової (1985).

На рисунку показана діаграма стійкості у двошаровій моделі, дещо відрізняється від моделі Філіпса (Haltiner, 1971). Тут оцінюється можливість зростання збурень у шарі від 1000 до 500 гПа. Як показник зростання, так і довжина хвилі відсікання з боку довгих хвиль ростуть із зростанням різниці швидкостей (термічного вітру) у зональному потоці.

Як було сказано вище, у моделі Іді є короткохвильове відсікання, але немає довгохвильового: всі хвилі до найдовших нестійкі, хоча їх

показники зростання малі в порівнянні з найнестійкішою хвилею. Поява довгохвильового відсікання ми розглянемо пізніше.

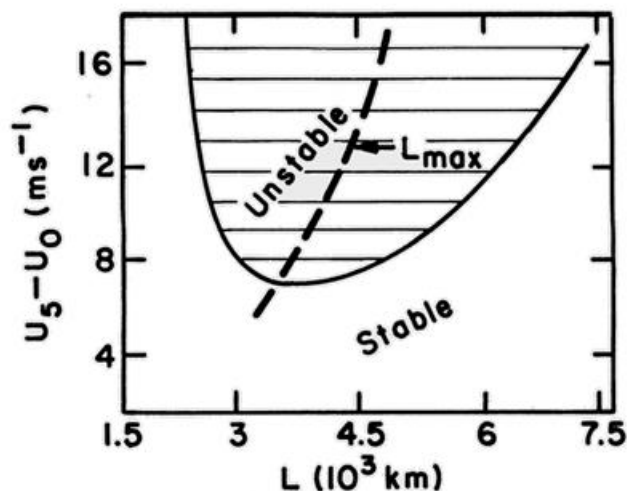


Рисунок 4.10 – Барокліні усталені режими як функції довжини хвилі ( $L$ ) і термічного вітру ( $U_s - U_0$ ) для дворівневої моделі.  $L_{max}$  – довжина хвилі в період максимальної інтенсивності зростання

З численних робіт з барокліної нестійкості на  $f$ -площині можна зробити такі висновки.

- показник зростання нестійких мод визначається вертикальним зсувом вітру і, отже, горизонтальним градієнтом температури;
- що більше вертикальний зсув вітру, то більше вписувалося показники зростання і тим більше довжина найбільш нестійкої хвилі;
- при вертикальних зрушеннях вітру, менших за деякий критичний, нестійкість відсутня;
- хвилі з довжиною, меншою за деякий мінімум (в умовах рисунка – близько 2000 км), стійкі;
- максимальні показники зростання відповідають хвиль довжиною 3-4 тис. км, що відповідає зональному хвильовому числу 7-8 на широті  $45^\circ$ .

### 4.3 Бароклінна нестійкість на $\beta$ – площині. Хвилі Чарні та Гріна

Задача для барокліної нестійкості, поставлене і частково вирішене Чарні (Charney, 1947), є більш складним, порівняно із задачею Іді: у ньому врахована залежність сили Коріоліса від широти в найпростішому (лінійному) варіанті, тобто  $\beta$  – ефект, і не приймається наближення Бусінеска, що означає повніший облік ефекту стисливості. Остання обставина веде до суттєвого ускладнення задачі. Навіщо це було зроблено?

Нагадаємо, що диференціювання рівняння статички дає співвідношення  $\frac{\Delta\rho}{\bar{\rho}^2} \frac{\partial\bar{P}}{\partial z} = -\frac{\Delta\theta}{\bar{\theta}} g + \frac{g\Delta P}{\bar{\rho}kR\bar{T}}$ .

Тут замість швидкості звуку, як писали вище, писатимемо  $C_s = \chi RT$ . Знайдемо відношення членів правої частини:

$$\frac{\Delta\theta}{\bar{\theta}} \frac{\bar{\rho}\chi R\bar{T}}{\Delta P} = \frac{\Delta\theta\bar{P}\chi R\bar{T}}{\bar{\theta}\bar{R}\bar{T}\Delta P} = \frac{\Delta\theta}{\bar{\theta}} \frac{\chi\bar{P}}{\Delta P} \quad (4.27)$$

Якщо розглядаються невеликі товщини шарів, то другий член нехтується порівняно з першим, і можна прийняти наближення Буссінеска. При великих товщинах шарів член з  $P$  виявляється великим, і це наближення стає некоректним, Чарні, бажаючи розглядати шари великої товщини, включив в розгляд член з  $P$ .

У задачі Іді, як ми бачили, наближення Буссінеска приймається, і при цьому розглядається навіть двошарова модель (тропосфера плюс стратосфера). Це не цілком коректно. Простіша, наближена модель Іді завдяки своїй простоті дозволяє отримати більш прозоре аналітичний розв'язок і при цьому побачити основні риси явища, які, як ми бачили, виявляються незважаючи на наближення Буссінеска, а значить, визначаються не ефектами стисливості, а наявністю бароклінності і сили Коріоліса.

Робота Чарні з'явилася раніше за роботу Іді, проте в ній не було отримано повний розв'язок, яке б задовольнило вчених. Тому Іді запропонував свою модель, нехай наближену порівняно з Чарні, але дуже наочну, що вперше показала, що бароклінно нестійкі хвилі мають основні властивості реальних атмосферних збурень синоптичного масштабу.

Подивимось, що нового дає врахування  $\beta$ -ефекту та стисливості повітря.

Запишемо рівняння моделі Чарні щодо збурень, лінеаризовані відносно основного потоку  $\bar{u}(z), \bar{P}(z, y), \bar{\theta}(z, y), \bar{\rho}(z, y)$ .

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial P'}{\partial x} + \ell v', \\ \frac{\partial v'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial v'}{\partial x} &= -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial P'}{\partial y} + \frac{\rho'}{\bar{\rho}^2} \frac{\partial \bar{P}}{\partial y} - \ell u', \\ 0 &= -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial P'}{\partial z} + \frac{\rho'}{\bar{\rho}^2} \frac{\partial \bar{P}}{\partial z}, \\ \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \rho'}{\partial x} + \bar{\rho} \left( \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial w'}{\partial z} \right) + w' \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial \theta'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \theta'}{\partial x} + v' \frac{\partial \theta'}{\partial y} + w' \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Перше рівняння Чарні в системі (4.28) відразу замінює умову геострофічності  $v'$ . Насправді це спрощення має місце і в моделі Іді, але там воно вводиться не на стадії запису рівнянь щодо збурень, а на стадії виведення формул для амплітудних функцій: вираз для  $v^{\wedge}$  він відповідним чином спрощує.

Рівняння нерозривності записано з урахуванням стисливості.

Збурення складових швидкості вважаються такими, що не залежать від  $y$ :

$$\{u', v', w'\} = \{u(z), v(z), w(z)\} e^{ik(x-ct)}. \quad (4.29)$$

Збурення тиску та густини залежать також і від  $y$ :

$$\{P', \rho'\} = \{P(z, y), \rho(z, y)\} e^{ik(x-ct)}. \quad (4.30)$$

Збурення потенціальної температури також повинні залежати від  $y$  силу рівняння стану.

Опускаючи складний висновок рівняння щодо  $w^{\wedge}$ , запишемо результативне рівняння моделі:

$$w'' + \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial z} - \frac{\bar{u}'}{\bar{u}-c} - \frac{\bar{u}'}{\bar{u}-c-\frac{\beta}{k^2}} \right) w' - \left[ \frac{N^2}{f^2} \left( k^2 - \frac{\beta}{\bar{u}-c} \right) + \frac{\bar{u}'}{\rho} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial z} \left( \frac{1}{\bar{u}-c} + \frac{1}{\bar{u}-c-\frac{\beta}{k^2}} \right) \right] w = 0. \quad (4.31)$$

Це рівняння перетворюється на рівняння моделі Іді при  $\beta = 0$  і  $\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial z} = 0$ .

Граничні умови: на нижній межі ставиться умова звернення  $W''$  в нуль, а умови верхній кордоні залежить від її виду.

У класичній роботі Чарні задача розв'язується для тропосфери, обмеженої зверху тропопаузою, що носить характер поверхні розриву першого порядку: формулюються умови безперервності  $u, v, w, P, T, \rho$  під час переходу через тропопаузу, а також умови на верхньому кордоні атмосфери

$$z \rightarrow \infty, \{\rho u, \rho v, \rho w\} \rightarrow 0.$$

Порівнюючи постановку задачі із задачею Релея, можна встановити, що для барокліної нестійкості мають місце теорема Сквайра та аналог теореми Релея: необхідна умова нестійкості має вигляд

$$\frac{\partial}{\partial y} (\bar{q}_g + \ell) = 0, \quad (4.32)$$

де

$$\bar{q}_g = \nabla^2 \bar{\psi} + \frac{f_0^2}{\bar{\rho}} \frac{\partial}{\partial z} \frac{\bar{\rho} \bar{\psi}}{N^2},$$

$$\frac{\partial}{\partial y} (\bar{q}_g + \ell) = \beta - \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} - \frac{\ell^2}{N^2} \left[ \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2} + \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial z} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right],$$

а  $\psi$  – це функція течії для основного потоку.

Величина  $\bar{q}_g$  називається відносним квазігеострофічним потенціальним вихором. Тут він записаний для загального випадку залежності швидкості незбуреного потоку від  $x$  і  $y$ .

У разі чисто бароклінного потоку (4.32) спрощується, а при лінійному профілі (модель Іді) та  $\beta = 0$  потенціальний вихор не залежить від  $y$  і, зачитає, (4.4) виконується тотожно.

Вираз (4.4) відомий як теорема Чарні-Стерна: необхідною умовою наявності нестійких мод є звернення в нуль та зміна знаку похідної квазігеострофічного потенціального вихору по поперечній до зонального потоку координаті.

У реальних атмосферних потоках дуже рідко реалізується умова барокліпної стійкості. Як правило, похідна квазігеострофічного потенціального вихору по широті змінює знак у межах смуги середніх широт кілька разів.

Барокліпна нестійкість, таким чином, є звичайною властивістю атмосфери.

Для барокліпного зонального потоку має місце також аналог теореми Говарда: всі комплексні власні значення, якщо вони існують, лежать усередині півкола, діаметр якого

$$D = \bar{u}_{\max} - \bar{u}_{\min} + \bar{Q}\beta, \quad (4.33)$$

де  $Q$  - додатна величина, що залежить від профілю швидкості.

Таким чином, інтервал, у якому можуть лежати фазові швидкості нестійких хвиль, дещо розширюється у бік  $\bar{u}_{\max}$ .

У рівнянні (4.3) у коефіцієнті при  $w'$  є величина

$$\frac{N^2}{\ell^2} \beta.$$

Ця величина відображає наявність відновлювальної сили, обумовленої зміною параметра Коріоліса по широті. Аналогічна відновлювальна сила є і в задачі про баротропну нестійкість. Легко уявити дію цієї сили, що

змушує частину коливатися відносно тієї широти, де вона перебувала в стані рівноваги.

Наприклад, якщо внаслідок будь-якого впливу частка змістилася на північ від вихідної широти, то приріст сили Коріоліса буде позитивним і відхилятиме її вправо (у північній півкулі) доти, доки не поверне в положення рівноваги, де приріст сили Коріоліса звернеться в нуль, але внаслідок інерції частка продовжуватиме зміщуватися в тому ж напрямку (тобто на південь), поки не буде загальмована негативним приростом сили Коріоліса, яке почне відхиляти її вліво, поки не поверне знову на північ.

Хвилі, що утворюються в такий спосіб, – це, як ми знаємо, хвилі типу Россбі. Ми їх отримували у баротропній задачі. Так, у шарі, що лежить, ми мали фазові швидкості баротропних хвиль Россбі

$$c = -\frac{\beta}{k^2}. \quad (4.34)$$

Такі хвилі біжать на захід. Залежно від довжини хвилі (від хвильового числа) вони можуть бути різні фазові швидкості. Якщо, наприклад, генерувалося (від обтікання хребта або від інших причин) якесь збурення загального виду, яке представляється у вигляді суми кількох гармонік, то ці гармонійні коливання поширюватимуться кожне зі своєю фазовою швидкістю (залежною від  $k$ ), і на віддаленні від джерела форма збурення через це змінюється. Така властивість хвиль називається дисперсією.

За наявності вітру, що залежить від координат  $z$  або  $y$ , хвилі Россбі також існують, але їх фазові швидкості та амплітудні функції не виражаються такими простими співвідношеннями, як у хвиль Россбі у середовищі або хвиль Гаурвіца (приватний випадок баротропних хвиль Россбі). У будь-якому разі хвилі типу Россбі на зональному потоці існують, якщо має місце  $\beta$  – ефект. При цьому якщо потік чисто баротропний, то і хвилі типу Россбі на цьому потоці є баротропними, а якщо він барокліний, то хвилі Россбі барокліні.

Звернемо увагу на те, що при  $N^2 = 0$  (байдужа стратифікація) сила, що відновлює, в рівнянні (2) пропадає, а з нею і хвилі Россбі. Якщо ж стратифікація нестійка ( $N^2 < 0$ ), то відповідний член у рівнянні (2) негативний, і замість хвиль виходить рух частки, що прискорюється, від положення рівноваги, тобто з'являються конвективно-нестійкі моди. Таким чином, в принципі задача про барокліну нестійкість містить і конвективну нестійкість.

У середніх широтах така нестійкість на синоптичних масштабах у реальних умовах не спостерігається.

**Нестійкі хвилі.** Задача на власні значення, що складається з рівняння (4.3) та відповідних граничних умов, набагато складніше за задачу Іді. У 1947 р. Чарні у своїй класичній роботі отримав лише результати для



несингулярних мод (типу Россбі) та оцінив структуру нестійких хвиль на околиці однієї з ділянок нейтральної кривої. Докладний аналіз задачі виконано пізніше Педлоскі (1964) та Куо (1973).

З приводу аналітичного розв'язку цієї задачі Педлоскі у своїй монографії пише:

«З деяким жалем... доводиться констатувати, що навіть невелике ускладнення задачі Іді, що робить її дещо реалістичнішою, потребує істотно складнішого і тоншого аналізу». Справді, у порівнянні з розв'язанням Іді (яке теж далеко не просте), отримання розв'язку задачі Чарні потребує великих зусиль. В результаті отримано, що в площині величин, пов'язаних з  $c_r$  і  $c_i$  (була проведена заміна змінних) графіки залежності фазових швидкостей і показників зростання мають вигляд

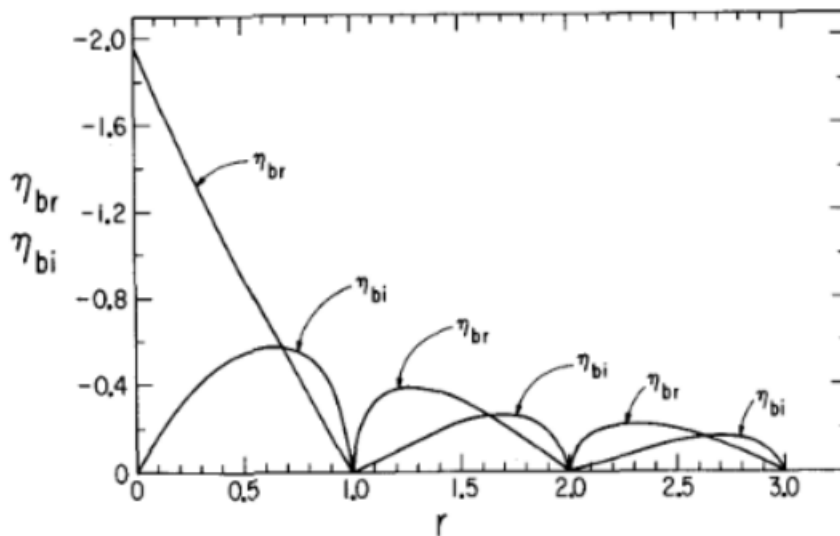


Рисунок 4.11 – Дійсна і уявна частини  $c$ , розраховані Куо

Тут по осі абсцис відкладено величину  $r = \frac{\frac{\beta N^2}{f^2 \bar{u}'} + \frac{1}{H_0}}{\left(\frac{1}{H_0^2} + \frac{4N^2 k^2}{f^2}\right)^{1/2}}$

Тут  $H_0 = \frac{RT}{g}$  – висота однорідної атмосфери.

Параметр  $r$  залежить, крім постійних  $\beta$ ,  $N^2$ ,  $f$ ,  $H_0$ , також від  $\bar{u}'$  хвильового числа  $k$ . Оскільки хвильове число стоїть у знаменнику, виходить, що величина  $r$  прямо пропорційна довжині хвилі.

Показник зростання та фазова швидкість тут представлені через величини  $\eta_{br}$ ,  $\eta_{bi}$ , які є дійсною та уявною частинами комплексної величини

$$\xi_0 = \eta_{br} + i\eta_{bi} = \left(-\frac{c}{\bar{u}'}\right) \left[ H_0^{-2} + \frac{4N^2 k^2}{f^2} \right]^{1/2}.$$

При цілих  $r$  нестійких мод немає, тому виникає кілька областей нестійкості. Перша їх, де показник зростання найбільший, - це аналог

області нестійкості у задачі Іді. Однак показник зростання найбільш нестійкої хвилі тут менше, ніж у задачі Іді, а рівень провідного потоку для неї лежить не на середньому рівні шару з постійним зсувом вітру, а поблизу нижньої межі, тобто її фазова швидкість ближче до мінімальної швидкості потоку.

Нормальні моди, що відповідають цій першій області нестійкості, називаються хвилями Чарні. Це найбільш швидко зростаючі і короткохвильові з нестійких хвиль моделі Чарні. Про більш довгі нестійкі хвилі див. нижче.

Амплітудна функція найбільш нестійкої хвилі для меридіональної (поперечної до потоку) складової швидкості має вигляд

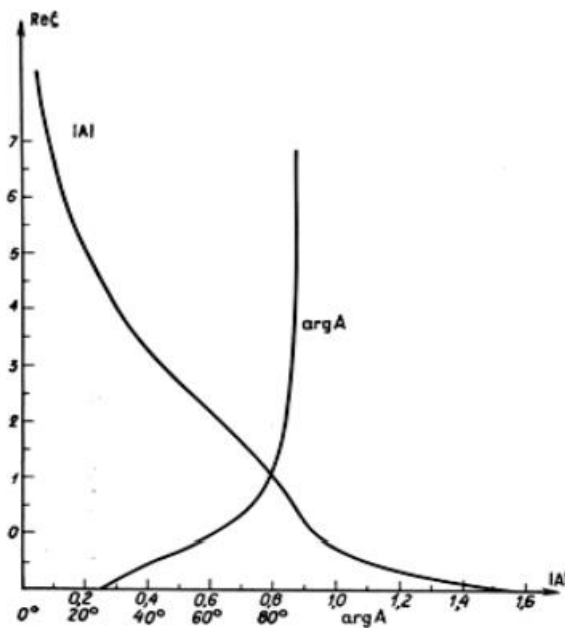


Рисунок 4.12 – Амплітуда  $A$  и фаза  $\arg A$  найбільш нестійкої моди при  $r = 0,5$

Загалом її вигляд аналогічний структурі хвилі Іді, у тому відношенні, що у землі її величина максимальна, але з висотою вона монотонно згасає, так, щоб задовольнити верхню граничну умову на нескінченності. Фаза хвилі росте з висотою, як і у двошаровій моделі Іді.

Вигляд залежностей власних чисел від  $r$  на певному з наведених рисунків викликає відчуття деякої нефізичності: сингулярні нейтральні хвилі при цілих  $r$ , що розділяють області нестійкості, мабуть, не мають аналогів у реальній атмосфері, а виникають у результаті якихось спрощень задачі. Що ж до хвиль Чарні, то вони відповідають синоптичним масштабам бароклинно нестійких збурень.

**Хвилі Гріна.** Розглянемо ще одну постановку задачі бароклинної нестійкості зонального потоку – модель Гріна (Green, 1964). Вона є у

формальному сенсі проміжної між моделями Іді та Чарні, тому що для випадку постійного вертикального зсуву вітру рівняння моделі збігається з рівнянням Чарні, а граничні умови ставляться такими, як у моделі Іді (на верхній жорсткій стінці або на рухомій тропопаузі).

За своїм фізичним змістом таке задача відповідає умовам розвитку збурень великих масштабів (довгих бароклинних хвиль), нестійкість яких і була вперше виявлена у цій моделі. Для таких збурень важливе значення набуває стисливість повітря.

У такій постановці задача включає, як і в двох раніше розглянутих моделях, по-перше, несингулярні зовнішні моди, що біжать проти потоку, аналог хвиль Россбі. По-друге, є нестійкі хвилі, спектр яких відрізняється від розв'язання задачі Чарні. Хоча рівняння при  $\bar{u}' = \text{const}$  однакові, але через різницю в граничних умовах виходять різні залежності  $c_i(\lambda)$ . Саме для цілих  $r$  теж виходять ненульові  $c_i$ , так що замість послідовних ізольованих областей нестійкості виходить одна область нестійкості, що об'єднує всі ці множинні області.

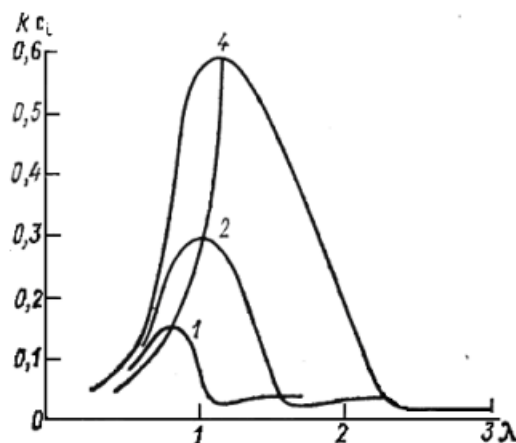


Рисунок 4.13 – Показники зростання нестійких хвиль в моделі Гріна при різних значеннях безрозмірного зсуву вітру  $u' = 1, 2, 4$ .

Тут по осі  $x$  інший масштаб, але в цілому діапазон довжин хвиль той же, що й у моделі Чарні. Нестійкі хвилі при  $r < 1$  – це хвилі Чарні, а довші називаються нестійкими хвилями Гріна. Структура їх амплітудних функцій і залежність фаз від висоти загалом аналогічна хвилям Іді. Так, максимум амплітудної функції  $v'$  знаходиться поблизу підстилаючої поверхні, фаза змінюється по висоті так, що виникає термічно пряма циркуляція та потенціальна енергія системи знижується.

Показники зростання нестійких хвиль Гріна менші, ніж хвиль Чарні. Здавалося б, на цій підставі ними можна було б знехтувати. Однак через великий діапазон довжин хвиль, який допускає постановка задач Гріна та Чарні, нехтувати ними не можна. Якщо у вихідному збуренні присутні

лише довгохвильові гармоніки, то збурення, що розвиваються, мають властивості хвиль Гріна.

Таким чином, у моделі Гріна є нейтральні несингулярні хвилі, що біжать на захід, і нестійкі хвилі, що біжать на схід. Ті та інші характеризуються більшими довжинами хвиль (зональні хвильові числа менше 7).

Отже, в бароклічних потоках може спостерігатися зростання збурень синоптичних масштабів і масштабів довгих хвиль, а також можуть існувати нейтральні несингулярні хвилі, що розвиваються під дією сили Коріоліса, що змінюється з широтою, яка грає роль відновлюючої сили.

Нестійкі хвилі синоптичних масштабів, фізичним аналогом яких у реальній атмосфері є улоговини та гребені, циклони та антициклони середніх широт, виявляються як у моделі з постійною поперек потоку силою Коріоліса, тобто. на  $f$  – площині (хвилі Іді), і у моделях на  $\beta$  – площині (хвилі Чарні). Ці хвилі рухаються потоком (на схід) з фазової швидкістю, рівної швидкості вітру лише на рівні провідного потоку, тобто. на середньому рівні тропосфери (хвилі Іді) або на нижчому рівні (хвилі Чарні). Фази хвиль у полях тиску, що становлять швидкості вітру та температури змінюються з висотою; є також постійне зрушення фаз однієї величини щодо іншої. Так, у землі передня частина баричної улоговини асоціюється з гребенем тепла і висхідними рухами. На середньому рівні тепле повітря піднімається, а холодне опускається. У верхній частині шару улоговини стає холодною, а гребінь – теплим. Завдяки такій структурі хвиль відбувається зниження потенціальної енергії шару (зменшення горизонтальних контрастів температури) і цей рахунок відбувається зростання збурень.

У моделі Іді є короткохвильове відсікання нестійкості, але всі довгі хвилі нестійкі, хоча їх показники зростання невеликі. У моделі Чарні також є нестійкість довгих хвиль, хоча і у вигляді кількох окремих областей зі зменшуваними показниками зростання. Короткохвильове відсікання в моделі Чарні відсутнє. Нарешті, у моделі Гріна всі хвилі, навіть найдовші, нестійкі, причому нестійкі довгі хвилі (хвилі Гріна) відповідають довгим хвиль, що зростають, в реальній атмосфері середніх широт.

З аналізу цих моделей можна зробити висновок, що бароклічна нестійкість є простою властивістю атмосфери. Крім того, можна зробити висновок, що вже в найбільш простій (щодо) моделі на  $f$  – площині всі основні властивості бароклічно-нестійких хвиль виявляються і якісно узгоджуються зі спостереженнями. Це означає, що бароклічна нестійкість визначається наявністю обертання Землі та горизонтальними контрастами температури (вертикальним зсувом вітру). Інші фактори –  $\beta$ -ефект, стисливість – певною мірою змінюють властивості нестійкості, але відіграють другорядну роль.

Крім зростаючих (нестійких) хвиль, у моделях на  $\beta$  – площині є зовнішні моди типу Россбі. Ці хвилі існують як у баротропних, так і в

бароклінних потоках і біжать на захід проти потоку. Вони не споживають енергії основного потоку, і амплітуди збурень швидкості вітру цих хвилях максимальні поблизу нижнього рівня. У бароклінних потоках хвилі Россбі існують лише за сталої стратифікації основного потоку.

Якщо від безперервного профілю швидкості як функції висоти перейти до дискретного розгляду, тобто задавати швидкості і стратифікацію температури пошарово постійними, то задача про стійкість часом дозволяє отримати дисперсійне співвідношення і знайти спектр власних значень у явному вигляді. Так, у двошарових моделях (Філіпс, Халтинер) є як короткохвильове, так і довгохвильове відсікання нестійкості, добре локалізований максимум нестійкості та необхідні умови існування нестійких хвиль.

#### 4.4 Комбінована баротропно-бароклінна нестійкість

Задача про нестійкість потоку з поперечним і вертикальним зсувами швидкостей більш реалістична, але й складніша, ніж задача про суто баротропну або бароклінну нестійкість.

У найпростішому випадку потік вважається зональним. У разі адіабатичного нев'язкого руху в припущеннях квазігідростатичності і Бусінеска, система рівнянь гідродинаміки в цьому випадку набуває вигляду, відомого як примітивні («повні») рівняння. Запишемо їх у безрозмірному вигляді, причому в рівняннях з'явиться число Россбі ( $Ro = U/fL$ ):

$$\begin{aligned}
 Ro \frac{du}{dt} &= -\frac{\partial \Phi}{\partial x} + fv \\
 Ro \frac{dv}{dt} &= -\frac{\partial \Phi}{\partial y} - fu \\
 \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial z} \Phi - \frac{\theta'}{\varepsilon \bar{\theta}} &= 0, \\
 \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial}{\partial z} (\bar{\rho} w) &= 0, \\
 Ro \frac{d}{dt} \frac{\theta'}{\varepsilon \bar{\theta}} + w \frac{d\theta}{dz} &= 0.
 \end{aligned} \tag{4.35}$$

де  $\varepsilon$  – малий параметр,  $\Phi$  – функція течії:

$$\varepsilon = \frac{\rho'}{\bar{\rho}} = \frac{\theta'}{\bar{\theta}} \approx 10^{-2}, \tag{4.36}$$

$$\Phi = \frac{P'}{f_0 UL \{\bar{\rho}\}}. \tag{4.37}$$

Систему примітивних рівнянь у разі зонального потоку, на який накладені малі збурення, можна лінеаризувати, представивши всі величини у вигляді рядів за ступенями числа Россбі, яке для рухів синоптичного масштабу  $\epsilon$ , як ми бачили раніше, величиною близько 10<sup>-1</sup> або менше:

$$\begin{aligned} u &= \bar{u} + u' = u_0 + \text{Ro}u_1 + \dots, \\ v &= v' = v_0 + \text{Ro}v_1 + \dots, \\ w &= w' = \text{Ro}w_1 + \text{Ro}^2w_2 + \dots, \\ \theta' &= \theta_0 + \text{Ro}\theta_1 + \dots, \\ P' &= P_0 + \text{Ro}P_1 + \dots \end{aligned} \quad (4.38)$$

Підставляючи ці розкладання в систему рівнянь (1) та збираючи члени нульового порядку, отримуємо

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{\partial \Phi_0}{\partial x} + v_0, \\ 0 &= -\frac{\partial \Phi_0}{\partial y} - u_0, \\ \frac{\partial \Phi_0}{\partial z} &= \frac{\theta_0}{\epsilon \bar{\theta}}, \\ \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \quad (4.39)$$

Таким чином, потік нульового порядку по  $\text{Ro}$ , або основний потік нашої задача, є геострофічним та гідростатичним:

$$\begin{aligned} v_0 &= \frac{\partial \Phi_0}{\partial x}, \\ u_0 &= -\frac{\partial \Phi_0}{\partial y}. \end{aligned} \quad (4.40)$$

Збираючи тепер члени першого порядку з  $\text{Ro}$ , отримуємо

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_0}{\partial t} + u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial u_0}{\partial y} &= -\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} - \beta y v_0 - v_1, \\ \frac{\partial v_0}{\partial t} + u_0 \frac{\partial v_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial v_0}{\partial y} &= -\frac{\partial \Phi_1}{\partial y} + \beta y u_0 + u_1, \\ \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} &= \frac{\theta_1}{\epsilon \bar{\theta}} - \frac{1}{\bar{\theta}} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} \Phi_1, \\ \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial}{\partial z} (\bar{\rho} w_1) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial z} \frac{\theta_0}{\epsilon \bar{\theta}} + u_0 \frac{\partial}{\partial x} \frac{\theta_0}{\epsilon \bar{\theta}} + v_0 \frac{\partial}{\partial y} \frac{\theta_0}{\epsilon \bar{\theta}} + w_1 \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \quad (4.41)$$

Тут параметр  $\beta$  – безрозмірний, тому вираз для безрозмірного параметра Коріоліса має вигляд  $f = 1 + \beta R\omega$ .

З цих рівнянь, диференціюючи перше з них по  $y$ , друге по  $x$  і віднімаючи, отримуємо рівняння для квазігеострофічного відносного вихору

$$\zeta_0 = \frac{\partial v_0}{\partial x} - \frac{\partial u_0}{\partial y} = \nabla^2 \Phi_0, \quad (4.42)$$

у вигляді

$$\frac{\partial \zeta_0}{\partial t} + u_0 \frac{\partial \zeta_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial \zeta_0}{\partial y} + \beta v_0 = \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial}{\partial z} (\bar{\rho} w_1), \quad (4.43)$$

За допомогою останнього рівняння (4.43) (щодо  $\theta_0$ ) виключаємо  $w_1$ . Отримуємо

$$\frac{\partial q_g}{\partial t} + u_0 \frac{\partial q_g}{\partial x} + v_0 \left( \frac{\partial q_g}{\partial y} + \beta \right) = 0. \quad (4.44)$$

Тут  $q_g$  – квазігеострофічний відносний потенціальний вихор, а  $N_6^2$  – безрозмірна частота Брента - Вайсяля (Brunt – Väisälä):

$$q_g = \nabla^2 \Phi_0 + \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\bar{\rho}}{N_6^2} \frac{\partial \Phi_0}{\partial z} \right), \quad (4.45)$$

$$N_6^2 = \frac{g}{\bar{\theta}} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} \frac{H}{f_0^2 L^2}, \quad (4.46)$$

У розмірному вигляді квазігеострофічний відносний потенціальний вихор

$$q_g = \nabla^2 \psi + \frac{f_0}{\bar{\rho}} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\bar{\rho}}{N^2} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right), \quad (4.47)$$

де  $N^2 = \frac{g}{\bar{\theta}} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z}$ ,  $\psi = \frac{p'}{f_0 \bar{\rho}}$  – функція течії,  $\bar{u} = u_0 = -\frac{\partial \psi}{\partial y}$ .

Таким чином, ми отримали рівняння для квазігеострофічного відносного потенціального вихору. Оскільки у нашому наближенні  $\beta$  – це похідна сили Коріоліса по  $y$ , а потік зональний, то останнє рівняння можна записати як

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + u_0 \frac{\partial}{\partial x} + v_0 \frac{\partial}{\partial y}\right)(q_g + \ell) = 0, \quad (4.48)$$

або

$$\frac{d}{dt}(q_g + \ell) = 0. \quad (4.49)$$

Таким чином, абсолютний квазігеострофічний потенціальний вихор  $q_g + \ell$  є інваріантом системи рівнянь (4.50).

Система примітивних рівнянь (1) теж має інваріант, який дещо відрізняється від  $q_g$ . Це так званий абсолютний потенціальний вихор Ертеля:

$$q_E = \frac{1}{\bar{\rho}}(f\vec{k} + \nabla \times \vec{V})\nabla\theta,$$

де  $\vec{k}$  – орт по вертикальній осі,  $\vec{V}\{u, v, w\}$  – вектор швидкості вітру,  $\nabla = i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z}$  – оператор градієнта.

Величина  $q_E$  є таким чином інваріантом адіабатичних нев'язких рухів у наближенні Буссінеска. Величина абсолютного потенціального вихору Ертеля в індивідуальній частинці може змінюватись у випадках порушення умови адіабатичності (наявності приток тепла), наявності суттєвої в'язкості (наприклад, у прикордонному шарі) або суттєвих небусінескових ефектів стисливості. В інших випадках вона може вважатися постійною.

Тепер уявімо збурення у вигляді нормальних мод з амплітудними функціями, що залежать від  $y, z$ . В результаті вийде рівняння, що є узагальнення раніше розглянутих задач про стійкість. Ми не будемо його розглядати, зупинимось тільки на деяких властивостях задачі, що складається з цього рівняння та граничних умов по вертикалі та на горизонтальних межах широтної смуги.

У цьому є всі три класу своїх значень: нестійкі несингулярні хвилі типу Россбі, нестійкі і нейтральні несингулярні хвилі. Геометричне місце останніх двох класів визначається теоремою про півколо, яке формально виглядає так само, як і для хвиль Чарні. Конкретні значення фазових швидкостей нестійких хвиль визначаються конкретними профілями швидкості та температури в основному потоці, що залежать від  $z, y$ .

Існує велика кількість публікацій, у яких розв'язок знайдено для цілого ряду профілів, переважно чисельно, але в окремих випадках і аналітично: наприклад, для таких умов, коли один із видів нестійкості відіграє малу роль у порівнянні з іншим. Наприклад, така задача про вплив



слабкої бароклінної нестійкості на властивості баротропно-нестійких хвиль або, навпаки, вплив слабкої баротропної нестійкості на бароклінну.

Остання задача цікавить у зв'язку з вивченням перенесення властивостей бароклінними хвилями проти градієнта («негативна в'язкість») в течіях з малим горизонтальним зсувом при різних типах вертикального розподілу швидкості. У таких задачах отримано, що напрямок потоку кількості руху залежить від масштабу з горизонтальним зсувом вітру. Загалом задача такого типу вирішуються з метою виявлення будь-яких особливостей природних процесів. Для цього основний потік визначається відповідно до спостережуваного або до початку цих процесів, або в середньому за період їх розвитку.

Треба пам'ятати, що середньорічні поля – баротропно стійкі, але у конкретних ситуаціях й у окремих областях може бути баротропна нестійкість. Одночасно майже завжди має місце і бароклінна нестійкість, причому інтервали довжин баротропно та бароклінно нестійких хвиль різні.

Особливий інтерес представляє задача про стійкість тривимірного потоку, що має вигляд суми зонального потоку та хвилі Россбі. Вона вивчається як можливий механізм розбудови систем загальної циркуляції атмосфери та, з іншого боку, як причина циклогенезу синоптичних масштабів за умов розвинених меридіональних рухів. Початок цього напрямку досліджень покладено роботою Лоренца (Lorenz) 1972 р. Роботи цього напрямку показали, що можливості втрати стійкості розширюються за наявності великомасштабних хвиль, порівняно з чисто зональним потоком, і що райони максимальної нестійкості знаходяться на підвітряних сторонах висотних улоговин у їх північних частинах. Райони переважного циклогенезу доцільно визначати шляхом локального використання критеріїв бароклінної нестійкості (наприклад, критерію Філіпса).

Зазначений напрямок досліджень тісно пов'язаний з моделюванням загальної циркуляції атмосфери та чисельним прогнозом погоди. Однак ці останні задачі виходять далеко за межі лінійних задач про стійкість. У реальних потоках збурення мають цілком кінцеву, а чи не нескінченно малу амплітуду.

**Нелінійні ефекти: якісна характеристика.** Розглянемо можливі зміни нестійких збурень у разі зростання їх амплітуди.

Нехай, відповідно до лінійної теорії, збурення має вигляд нормальної моди  $i$ , будучи нестійким, зростає за амплітудою як  $e^{\omega_i t}$ . Всі ефекти взаємодій між збуреннями та основним потоком, як і взаємодії збурень між собою, описуються нелінійними членами рівнянь руху та припливу тепла. У рівнянні руху це (у векторній формі)

$$(\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V}$$

Якщо підставити в цей вираз  $\vec{V}\{\bar{u} + u', v', w'\} = \vec{V} + \vec{v}'$ , де  $V$  - основний потік,  $v'$  – збурення, і зібрати члени першого порядку, тобто такі, в які  $v'$  входило б у першому ступені (як ми завжди чинимо при лінеаризації), то вийде

$$(\vec{V} \cdot \nabla)\vec{V} \approx (\vec{V} \cdot \nabla)\vec{v}' + (\vec{v}' \cdot \nabla)\vec{V} \approx \left\{ \bar{u} \frac{\partial u'}{\partial x} + w' \frac{\partial \bar{u}}{\partial z}, \bar{u} \frac{\partial v'}{\partial x}, \bar{u} \frac{\partial w'}{\partial x} \right\}, \quad (4.50)$$

Це ті члени, які ми враховували у лінійних задачах. В результаті їх розв'язання ми знаходили нестійкі хвилі, амплітуда яких експоненційно зростає в часі, Система гребінь-улоговина або циклон – антициклон, яка є нестійкою хвилею, повинна, згідно з лінійною теорією, розвиватися в часі таким чином, що амплітуди всіх величин у гребені та улоговині однаково зростають з показником зростання  $\omega i$ , Тоді як просторова структура цих хвиль з часом не змінюється, вона залишається такою, як ми бачили, наприклад, у задачі Іді:

$$v = \frac{w' f}{k^2(\bar{u} - c)}, \quad u = -\frac{w}{ik}, \quad \frac{P}{\bar{\rho}} = \frac{if^2 w'}{k^3(\bar{u} - c)}, \quad (4.51)$$

$$\frac{\theta}{\bar{\theta}} = \frac{iN^2 w}{gk(\bar{u} - c)} + \frac{if^2 \bar{u} w'}{gk^3(\bar{u} - c)^2}$$

Однак з часом зростаючі збурення перестають бути меншими, ніж характеристики основного потоку, так що наближення (4.51) стане непридатним. Відкинуті при його виведенні величини

$$u' \frac{\partial u'}{\partial x}, \dots, w' \frac{\partial w'}{\partial z}, u' \frac{\partial \theta'}{\partial x}, \dots, w' \frac{\partial \theta'}{\partial z},$$

які були в початковий момент набагато меншими, ніж  $\bar{u} \frac{\partial u'}{\partial x}$  та інші збережені в (3) члени, – тепер уже не зневажливі. Виникає необхідність врахування

цих (нелінійних з  $u', v', \dots$ ) членів. Їх фізичний сенс полягає в тому, що вони описують взаємодію та взаємний вплив збурень, тоді як у лінійній задачі враховується лише вплив основного потоку на збурення. Крім того, нелінійні члени описують, як ми зараз побачимо, та зворотний вплив збурень на основний потік.

У лінійній задачі ми вважаємо збурення малими, навіть «нескінченно малими», infinitesimal або інфінітезимальні. Це суто математичне поняття, що означає, що навіть якщо розв'язок виявляються зростаючими, ми все ж таки вважаємо їх рівняннями лінійної теорії, що задовольняють, і на цій

підставі визначаємо їх властивості. Однак з погляду фізики ми повинні усвідомлювати те, що після розв'язання лінійної задачі, якщо ми хочемо простежити подальшу еволюцію збурень, від припущення інфінітезимальності треба відмовитися. Натомість, щоб полегшити собі аналіз, доцільно перейти до уявлення про «малі, але кінцеві» (small, but finite) збурення, які спочатку задовольняли лінійній задачі, але згодом перестають їй задовольняти. В рамках наближення про малих

$$A = \frac{u'_{\text{хар}}}{\bar{u}_{\text{хар}}}, \quad (4.52)$$

який слід як функцію часу. Амплітудні функції лінійної задачі (наприклад, задачі Іді) запишемо як добуток  $A$  і безрозмірної функції порядку одиниці, а збурення представимо у вигляді рядів за степенями  $A$ , аналогічно наведеним вище розкладанням за степенями  $Ro$ , - зокрема

$$w' = \sum_{n=1}^{n=\infty} A^n w^{(n)}(x, z, t)$$

причому  $w^{(1)}$  буде розв'язком лінійної задачі:

$$w^{(1)} = w(z)e^{ik(x-ct)} = w(z)e^{i\phi} e^{\omega_i t} \quad (4.53)$$

Тут  $\phi$  – фаза хвилі,  $\omega_i = kc_i$  – показник зростання.

Згідно з формулою Ейлера,

$$e^{i\phi} = \cos\phi + i\sin\phi, \quad (4.54)$$

Якщо підставити (5) в систему рівнянь руху та припливу тепла і зібрати члени з  $A^1$ , то вийдуть рівняння лінійної задачі, а якщо зібрати члени з  $A^2$ , то отримаємо неоднорідну систему, у лівих частинах рівнянь якої стоятимуть функції типу

$$w^{(2)}, u^{(2)}, \dots, \quad (4.55)$$

причому оператори будуть лінійними. У правій частині стоятимуть величини, відомі з розв'язання лінійної задачі, у комбінаціях виду

$$u^{(1)} \frac{\partial u^{(1)}}{\partial x}, \dots, w^{(1)} \frac{\partial u^{(1)}}{\partial z}, \dots \quad (4.56)$$

Але, як ми поклали вище,

$$\begin{aligned}
 w^{(1)} &= w(z)e^{i\phi}e^{\omega_i t} = w(z)e^{\omega_i t}(\cos\phi + i\sin\phi), \\
 u^{(1)} &= u(z)e^{\omega_i t}(\cos\phi + i\sin\phi), \\
 &\dots\dots
 \end{aligned}
 \tag{4.57}$$

Якщо ми запишемо тепер вирази типу

$$u^{(1)} \frac{\partial u^{(1)}}{\partial x}, \dots\dots$$

то в цих виразах з'явиться множник

$$e^{2\omega_i t}$$

а також множники типу

$$\begin{aligned}
 &\sin\phi\cos\phi \\
 &\sin^2\phi - \cos^2\phi, \\
 &\sin^2\phi + \cos^2\phi.
 \end{aligned}
 \tag{4.58}$$

Досліджуючи умови появи цих множників, треба врахувати, що амплітудні функції лінійної задачі, як ми бачили раніше, не всі синфазні (наприклад, дійсними). Вони зсунуті по фазі одне щодо одного. Перше і друге вирази (6) пропорційні, відповідно,  $\sin 2\phi$ ,  $\cos 2\phi$ , тоді як  $\sin^2\phi + \cos^2\phi = 1$ . Тобто, з'являється негармонійний член, який не залежить від  $\phi$ .

Таким чином, у рішенні для  $n = 2$  з'являються старші гармоніки (з удвічі меншими довжиною хвилі та періодом) і, крім того, у цьому рішенні будуть утримуватися неперіодичні складові. Це означає, що виникне додаткова (вторинна) неперіодична течія, яка є результатом впливу збурень на основний потік. Виниклі старші гармоніки деформуватимуть основну хвилю.

Ми показали таким чином, що зі зростанням збурень змінюється їхня структура. Змінюється і основний потік, що віддає енергію збуренням.

Визначимо, які зміни форми хвилі викликають старші гармоніки з подвоєним хвильовим числом в полях збурень тиску і температури.

Без висновку вкажемо, що друга гармоніка в полі тиску зсунута відносно першої на  $\pi/4$ , а гармоніки ентропії П (а отже, і потенціальної температури) у момент  $\phi = 0$  синфазні (П(2) та П(1)). Крім того, хвиля П зсунута щодо хвилі Р на  $\pi/2$ .

Підсумувавши обидві гармоніки, отримуємо, що зміни форми хвилі в полі тиску виражаються в тому, що гребінь (або антициклон) стає ширшим і плоскішим, а улоговина (або циклон) – більш вузькою та глибшою. Такий результат виходить через зсув фаз між першою і другою гармоніками.

На рисунку по осі абсцис відкладена фаза  $\phi$ , яка за фіксованих  $t, z$  може розглядатися як координата  $x$  (по потоку). Тут взято  $z = 0$ , що означає середній рівень (рівень провідного потоку) задачі Іді, а момент  $t$  відповідає 5 дБ від початку зростання найбільш нестійкої хвилі.

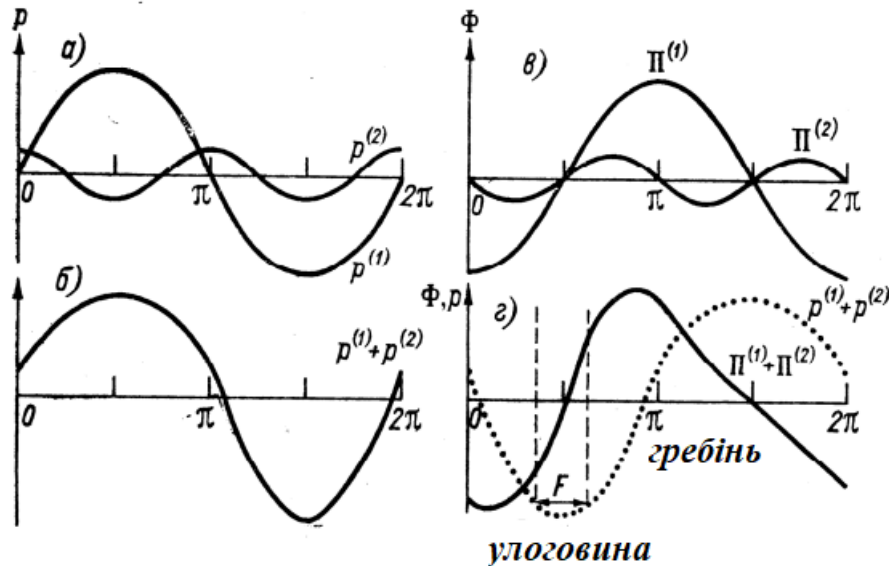


Рисунок 4.14 – Схема зміни форми бароклінної хвилі, що зростає, в полях тиску і температури внаслідок накладення другої гармоніки.  $p^{(1)}, \Pi^{(1)}$  – первинна хвиля, яка надається лінійною теорією,  $p^{(2)}, \Pi^{(2)}$  – друга гармоніка

Поле відхилень температури, як ми бачили при аналізі моделі Іді, зсунуто фазою щодо відхилень тиску, і ця різниця фаз залежить від висоти. Але на середньому рівні вона дорівнює  $\pi/2$ . Друга гармоніка збурень температури накладається на першу таким чином, що саме в області баричної улоговини виникає зона збільшених градієнтів температури вздовж осі  $x$  (або осі  $\phi$ ), - фронтальна зона, показана літерою  $F$ . У гребені, навпаки, відбувається фронтоліз.

Прості схеми, наведені рис. 4.14, демонструють сутність основних нелінійних ефектів (другого порядку  $A$ ) у «одномірному» представленні. Розподіл цих ефектів у горизонтальній площині та по вертикалі, що залежить від часу, також можна проаналізувати в рамках наближення малих, але кінцевих амплітуд. Цей метод, що сходиться до роботи Л. Д. Ландау 1944 і розвинений далі Стюартом і Ватсоном, ґрунтується, крім розкладання за параметром амплітуди, ще на деяких припущеннях про залежність амплітуди і частоти хвилі від часу, що дозволяють послідовно (для  $n = 2, 3, \dots$ ) визначати амплітудні функції та нелінійні поправки до показника зростання та частоти хвилі. Такі розв'язки показують, що на пізніших стадіях зростання нестійких хвиль, коли необхідно враховувати третю гармоніку, структура збурень зазнає змін,

Таким чином, на стадії нелінійного розвитку в бароклінно-нестійкій хвилі відбувається ціла низка процесів, характерних для реальних циклонів та антициклонів: поглиблення областей низького тиску та «розтікання» областей високого, фронтогенез у циклонах і фронтоліз в антициклонах, зменшення нахилу просторових осей баричних центрів часом витіснення теплого повітря вгору. Всі ці процеси присутні вже у квазігеострофічній моделі. Це означає, що причиною зазначених процесів еволюції бароклінно-нестійких збурень є не що інше, як нелінійний обмін або, що те саме, адвективні зміни в полях вітру (тиску) і температури.

На закінчення наведемо результати чисельного розв'язання повністю нелінійної задачі про еволюцію бароклінно- та баротропно-нестійких хвиль (рис. 4.15).

Повністю розвинені нелінійні режими нестійкості вивчаються в даний час головним чином методом чисельного моделювання, проте багато принципово важливих результатів було отримано (у другій половині ХХ століття) методом лабораторного моделювання в кільцевих каналах, що обертаються, внутрішня і зовнішня стінки яких мають різну температуру, а також контейнерами, що обертаються навколо осі циліндра. Рідина в нерівномірно нагрівають судинах, що обертаються, стає бароклінно нестійкою, коли досягається певний критичний горизонтальний градієнт температури, що залежить від швидкості обертання.

Надалі, залежно від чисел Россбі та різниці температур стінок, виявляється три основні нелінійні режими:

1. Режим стаціонарних хвиль. У потоці формуються гребені та улоговини, осі яких орієнтовані меридіонально або під кутом до меридіана, і такі збурення зберігаються тривалий час, причому їхня амплітуда, форма і довжина хвилі не змінюються.
2. Режим Vascillations. Російською цей термін перекладається як «васціляції», саме це слово перекладається, зокрема, як «мерехтіння». Це також регулярний режим, проте гребені та улоговини зазнають повільних періодичних змін у часі: це або зміни амплітуди хвиль (amplitude vascillations), або зміни орієнтації гребенів і улоговин – поворот їх осей вперед і назад при невеликій одночасної зміні амплітуди (form vascillations), або, нарешті, періодичне зміна хвильового числа. Період мерехтіння не менше ніж на порядок перевищує період хвилі.
3. Режим нерегулярних бароклінних хвиль чи геострофічної турбулентності. Елементи геострофической турбулентності – це вихори, які передають свою кінетичну енергію через нелінійні взаємодії рухам інших масштабів.

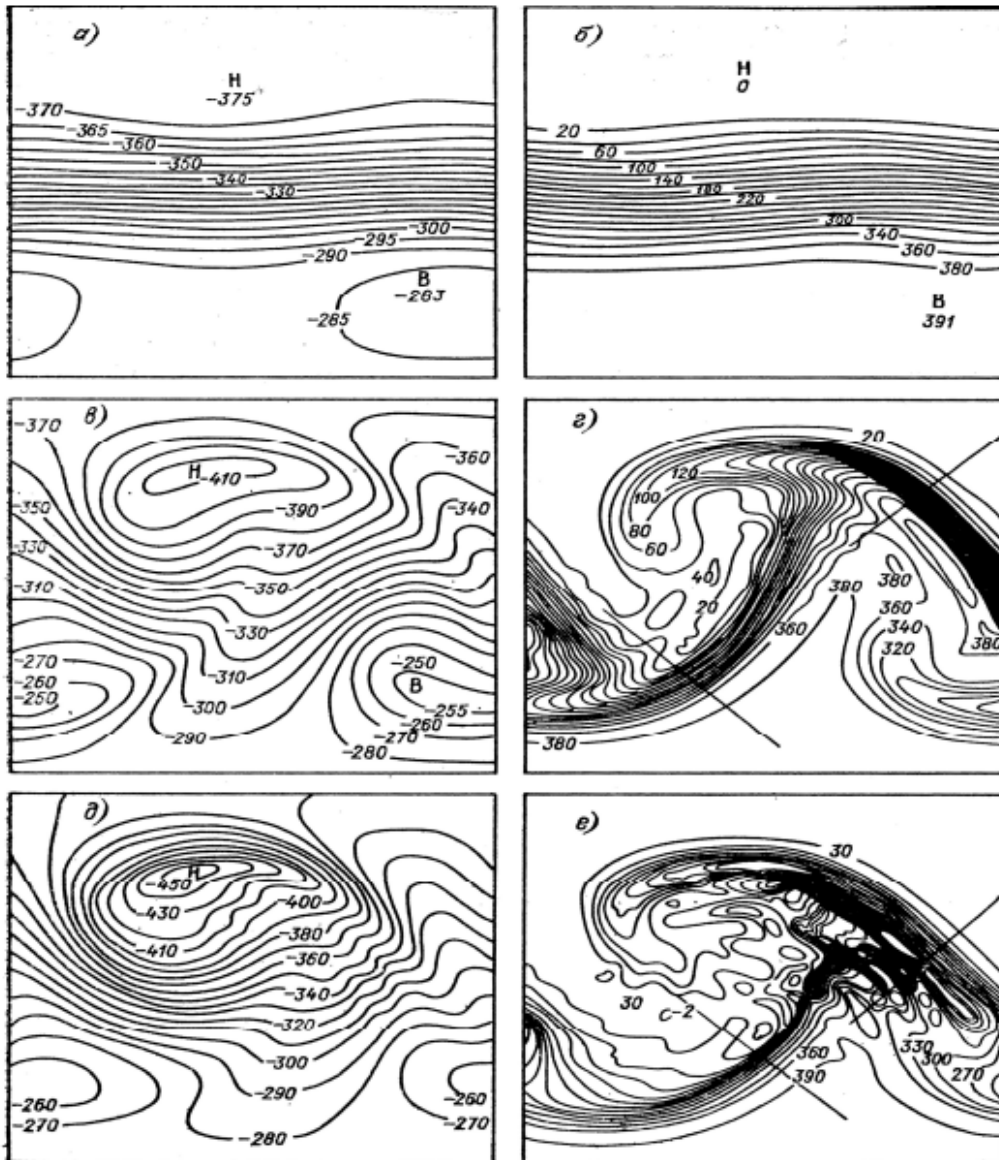


Рисунок 4.15 – Поле тиску на нижньому рівні (а, в, д) і плавучості  $\theta'/\theta$  (б, г, е) в бароклінно- і баротропно-нестійкій хвилі з часом подвоєння 27 год.: а, б – початкове поле ( $t = 0$ ), різниця тиску В – Н = 21 гПа; в, г – квазігеострофічний розв’язок,  $t = 144$  ч, В – Н = 21 гПа; д, е – розв’язок повних рівнянь,  $t = 144$  ч, В – Н = 45 гПа

Регулярні режими стаціонарних хвиль і мерехтіння знаходять свої аналоги в атмосферних процесах планетарного масштабу, тобто в системі рухів загальної циркуляції атмосфери, тоді як режим геострофічної турбулентності більш характерний для синоптичних масштабів, для циклонів та антициклонів середніх широт.

#### 4.5 Конвективна нестійкість у шарі, що перебуває в спокої. Гравітаційні хвилі

При великих числах Россбі силою Кориоліса можна знехтувати. В основному потоці, що вважається нев'язким і спочиваючим, температура залежатиме від довільним чином. Якщо  $\epsilon$  в'язкість (і температуропровідність), то профіль швидкості в основному потоці слід вважати лінійним, тобто вертикальний градієнт температури буде постійним. Тиск також залежить лише від  $z$ .

Представляючи збурення у вигляді нормальних мод

$$S' = S(z)e^{i(kx+ly+\omega t)}, \quad (4.59)$$

не повторюючи процедури лінеаризації, запишемо результуюче рівняння щодо амплітудної функції вертикальної складової швидкості у випадку:

$$\omega^2 \left[ \frac{d^2 w}{dz^2} - (k^2 + l^2)w \right] = N^2 w (k^2 + l^2), \quad (4.60)$$

Якщо частота Брента-Вяйсяля стала, то в цьому рівнянні коефіцієнти постійні, і розв'язок буде

$$w = e^{imz}, \quad (4.61)$$

і тоді

$$i\omega = \left[ -\frac{N^2(k^2 + l^2)}{k^2 + l^2 + m^2} \right]^{1/2}, \quad (4.62)$$

Це рівняння алгебри - дисперсійне співвідношення - дозволяє знаходити  $\omega$  як функцію частоти Брента-Вяйсяля і хвильових чисел. Якщо  $m$  підібрати так, щоб задовольнялися граничні умови, то з цього співвідношення можна знайти власні значення при відомих параметрах задачі – хвильових числах і  $N_2$ .

Без висновку запишемо також аналогічне дисперсійне співвідношення для в'язкої задачі при числі Прандтля, що дорівнює 1, і в наближенні Бусінеска:

$$i\omega = - \left[ \frac{\mu_1}{\mu_2} (k^2 + l^2) + a^{-2} m^2 \right] \pm \sqrt{\frac{\text{Ra}}{a^4} \frac{k^2 + l^2}{k^2 + l^2 + a^{-2} m^2}}. \quad (4.63)$$



Тут  $a = H/L$  – коефіцієнт анізотропії,  $Ra$  – число Релея, що є основним параметром конвективної нестійкості:

$$Ra = -\frac{g}{\bar{\theta}} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} \frac{H^4}{\mu_2^2} = N^2 \frac{H^4}{\mu_2^2}. \quad (4.64)$$

Зростання збурень, що асоціюється з позитивними дійсними  $i\omega$ , можливе у нев'язкому середовищі лише за нестійкої стратифікації,  $N^2 < 0$ , а в'язкому середовищі – при  $Ra > Ra_{кр}$ . Критичне значення  $Ra$  відповідає межі стійкості,  $i\omega = 0$ . Уявна частина  $i\omega$  в обох задачах дорівнює нулю: конвективні осередки в шарі, що лежить, не мають фізичної фазової швидкості.

Це найпростіший випадок т. зв. впорядкованої конвекції, званої також осередковою циркуляцією та полюлярною конвекцією.

У вираз для  $i\omega$  хвильові числа входять лише як комбінації  $k^2 + l^2$ . Це означає, що показники зростання однакові у збурень, мають однакове значення цієї комбінації, незалежно від співвідношення конкретних значень хвильових чисел по осях координат. Наприклад, паралельні вали ( $k = 0$  або  $l = 0$ ) і квадратні осередки ( $k = l$ ) при одному і тому ж  $k^2 + l^2$  мають однакові показники зростання, і, отже, не можна вказати переважну форму конвекції в шарі, що лежить. Це т. зв. принцип невизначеності Релея.

При стійкій стратифікації ( $N^2 > 0$ ) можливі рухи типу внутрішніх гравітаційних хвиль, тобто коливань частинок біля положення рівноваги, яким відповідають комплексні значення  $i\omega$ , уявна частина яких

$$(i\omega)_i = \left[ \frac{N^2(k^2 + l^2)}{k^2 + l^2 + m^2} \right]^{1/2}, \quad (4.65)$$

описує фізичну частоту, а дійсна

$$(i\omega)_r = -[\mu_1(k^2 + l^2) + \mu_2 m^2], \quad (4.66)$$

характеризує швидкість загасання коливань під впливом в'язкості. Зокрема, при  $m = 0$ , що відповідає нескінченно великій довжині хвилі по вертикалі (нескінченна товщина шару) частота ВГВ без в'язкості дорівнює

$$\omega = N, \quad (4.67)$$

Таким чином, частота Брента-Вайсяля є частота внутрішніх гравітаційних хвиль в нев'язкому шарі нескінченної товщини.

**Конвективна нестійкість плоскопаралельного потоку зі зсувом швидкості. Нестійкість Кельвіна – Гельмгольца.** Якщо є середній вітер зі зсувом швидкості, то замість наведених вище рівнянь отримуємо у невимушеному випадку т. зв. рівняння Тейлора – Гольдштейна

$$(\omega + k\bar{u})^2[D^2 - (k^2 + l^2)] - k(\omega + k\bar{u})\bar{u}'' + (k^2 + l^2)N^2w = 0, \quad (4.68)$$

яке за байдужої стратифікації перетворюється на рівняння Релея, а в'язкому випадку – у т. зв. рівняння Оппа-Зоммерфельда

$$(\omega + k\bar{u})^2[D^2 - (k^2 + l^2)]w - k(\omega + k\bar{u})\bar{u}''w = -i\mu[D^2 - (k^2 + l^2)]^2w. \quad (4.69)$$

При нестійкій стратифікації переважаючою формою конвекції стають вали, витягнуті за вітром. Вони характерні для шарів із горизонтальним градієнтом температури (фронтальні зони та зони значної адвекції холоду або тепла). Часто їх можна спостерігати у тилівій частині циклону.

При стійкої стратифікації рівняння Тейлора – Гольдштейна має як нестійкі розв'язки (хвилі Кельвіна – Гельмгольца), і розв'язки типу внутрішніх гравітаційних хвиль (нейтральні несингулярні). Відповідно до теореми Майлса (Miles, 1961), необхідною умовою нестійкості є наявність у потоці точки, в якій число Річардсона менше критичного значення  $\frac{1}{4}$ :

$$Ri = \frac{N^2}{\bar{u}} < \frac{1}{4}, \quad (4.70)$$

При числах  $Ri$ , що перевищують критичні, існують нейтральні несингулярні гравітаційні хвилі, що біжать як потоком, так і проти потоку.

Нестійкість Кельвіна - Гельмгольца виникає при великих зсувах вітру, наприклад, у струменевих течіях.

У нелінійному режимі, тобто на стадії зростання амплітуд, нестійкі за лінійною теорією хвилі можуть або продовжувати і далі зростати по амплітуді, або уповільнити своє зростання і вийти на режим стаціонарних хвиль. Можуть спостерігатися всі три раніше розглянуті нами нелінійні режими – стаціонарні хвилі (конвективні осередки), мерехтіння і нерегулярний режим, що веде до турбулізації потоку.

Режим нелінійної нестійкості найхарактерніший для нестійкості Кельвіна – Гельмгольца, режим стаціонарних хвиль – для впорядкованої конвекції. Проте й у разі конвекції, особливо у прикордонному шарі, за сильної нестійкості може розвиватися т. зв. термічна турбулентність. Вибір режиму залежить від того, наскільки великі запаси енергії в основному потоці, яка може бути реалізована збуреннями. У разі конвективної нестійкості це потенціальна енергія вертикальної стратифікації – зменшення потенціальної температури з висотою, внаслідок чого сила

плавучості є дестабілізуючою. У разі нестійкості Кельвіна – Гельмгольца сила плавучості є стабілізуючою,

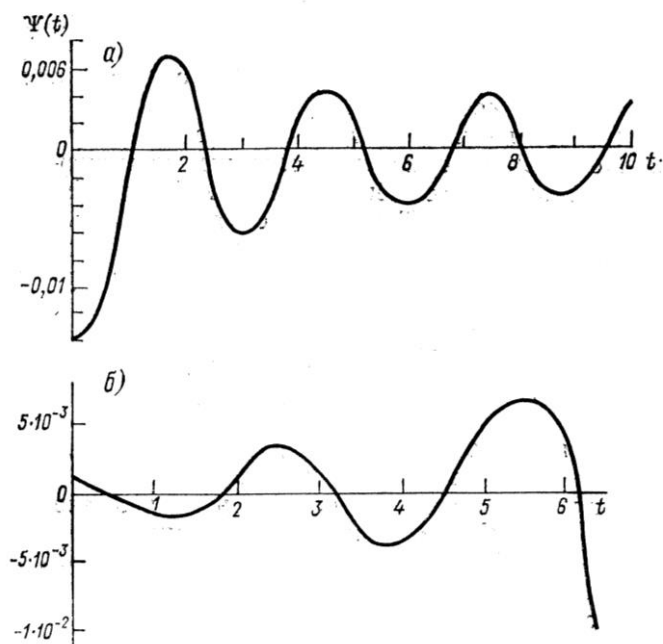


Рисунок 4.16 – Функція течії  $\Psi(t)$  за  $z = 0$ . (а) закритичну рівновагу; (б) закритична нестійкість.

Нестійкі хвилі Кельвіна – Гельмгольца у процесі нелінійного зростання призводять до утворення турбулентних шарів і плям у стійко стратифікованих шарах з великими зсувами вітру (т.зв. турбулентність у ясному небі). Турбулентні плями у стійкій вільній атмосфері можуть і під впливом внутрішніх гравітаційних хвиль великої амплітуди. І тут розвивається «вторинна нестійкість».

При поширенні внутрішніх хвиль у неоднорідному середовищі вони можуть зростати по амплітуді або набувати зсуву фаз, внаслідок чого на їх гребенях може виникнути зона  $Ri < 1/4$  або навіть зона  $N^2 < 0$  (конвективної нестійкості). У такій зоні локальної нестійкості, за рахунок зростання дрібномасштабних збурень, може розвиватися турбулентність, до якої буде передаватись частина енергії внутрішньої хвилі. Такий механізм, що обмежує зростання амплітуд хвиль і що призводить до утворення «вкраплених» в ламінарний потік турбулентних плям, називають вторинною нестійкістю (конвективної або Кельвіна – Гельмгольца). Амплітуда, коли він на гребені хвилі утворюється граничне для нестійкості значення параметра  $N^2$  чи  $Ri$ , називається критичною амплітудою чи амплітудою насичення. Наявність механізму вторинної нестійкості як однієї з причин виникнення вкраплених у потік турбулентних зон обумовлює можливість появи турбулентності у ясному небі за практично будь-якої стратифікації температури та вітру. Проте «первинна»

нестійкість Кельвіна – Гельмгольца має більше значення з погляду авіаційного прогнозу, оскільки зазвичай призводить до розвитку більш великих турбулізованих шарів, тоді як вторинна нестійкість породжує невеликі турбулентні плями в квазиламінарному потоці.

Конвективна нестійкість на стадії нелінійного зростання утворює стаціонарні осередки головним чином тих випадках, коли нестійкі шари мають невелику вертикальну потужність і запаси енергії нестійкості в них невеликі. Якщо ж нестійкість спостерігається у потужних шарах, то нелінійний розвиток нестійких збурень відбувається інакше. У реальній атмосфері поза фронтальними зонами розвиваються поля купових хмар, у яких потім відбувається «поїдання» більшими хмарами навколишніх дрібних хмар (режим типу «мерехтіння хвильового числа»). Утворюються купово-дощові одноосередкові хмари, з яких випадають опади. У конвективних шпальтах, зокрема у передніх зонах, спостерігається той самий процес зростання окремих хмар з допомогою оточення. Утворюються великі конвективні утворення (мезомасштабні конвективні системи) або групи (кластери) С<sub>b</sub>, розділені безхмарними проміжками. Оскільки для атмосферної конвекції характерний добовий хід (увечері вона слабшає), то час, відпущений для нелінійного зростання, обмежений. Однак при сильній конвективній нестійкості і при наявності загального сходження, як це має місце в циклонічних областях і фронтальних зонах, додається змушуючий ефект, що посилює зростання конвективних хмар.

У монографії С. М. Шметера «Термодинаміка та фізика конвективних хмар» наводяться дані про зміни структури полів купових хмар протягом дня: вранці хмари розподілені більш-менш рівномірно, при великій кількості хмар середніх розмірів. Після полудня великі хмари, що розвиваються, часто оточені великою кількістю дрібних хмар, утворюючи групи. Лінійні розміри таких груп чи скупчень – кластерів – коливаються від кількох кілометрів до сотень кілометрів. Освіта великих кластерів – характерна особливість стадії максимального розвитку грядової конвекції на фронтах та лініях шквалів. Дрібні групи утворюються в післяполуденний годинник у внутрішньомасових полях конвективних хмар. Діаметр центральної хмари – близько 1.5 км, навколишніх дрібних хмар – сотні метрів. Сусідні групи розділені безхмарними проміжками та розташовуються на відстані кількох кілометрів одна від одної. У випадках найбільш інтенсивної конвекції (на атмосферних фронтах, у зонах конвергенції вітру) формуються МКС, що являють собою групи з кількох потужних купо-дощових хмар, вершини яких покриті загальною перистою «шапкою». З такими МКС пов'язані найінтенсивніші і тривалі зливи в середніх широтах. У тропіках це основна форма опадоутворювальної хмарності. З такими МКС пов'язані найінтенсивніші і тривалі зливи в середніх широтах. У тропіках це основна форма опадоутворювальної хмарності. З такими МКС пов'язані найінтенсивніші і тривалі зливи в

середніх широтах. У тропіках це основна форма опадоутворювальної хмарності.

На матеріалах радіолокаційних спостережень у Молдавії А.М. Старостін показав, що грозові та градові хмари виникають та розвиваються на гранях полігональних осередкових структур з характерними розмірами 30 – 40 км. Уздовж цих граней відбувається їх зміщення, а вершинах багатокутників – злиття двох хмар, чи поділ хмари на частини. (Аналогічний процес укрупнення осередків спостерігається в лабораторних установках з шаром рідини в посудині з перегрітою нижньою межею.) При цьому цікаво, що висоти верхніх меж хмар зазнають квазіперіодичних коливань.

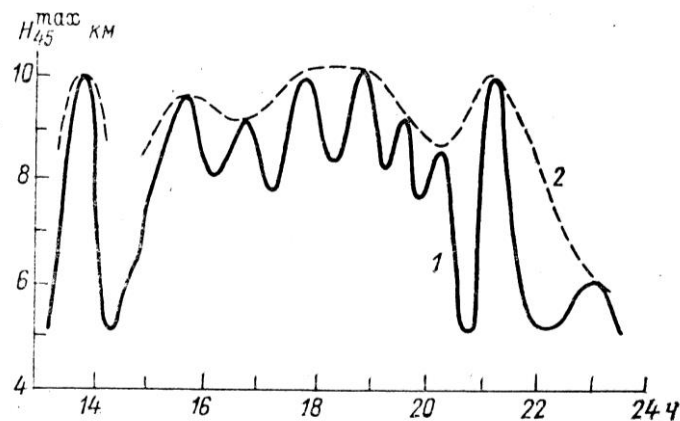


Рисунок 4.17 – Залежність від часу висоти ізоповерхні радіоеха інтенсивністю 45 дБз в межах області огляду метеорологічного радіолокатора (1) і огибаюча коливань 45 дБз (2).

На рис. 4.17 показано характерну зміну в часі висоти радіоеха заданої інтенсивності від потужної хмари в зоні огляду радіолокатора. Розглядалися також зміни висоти радіоех від всіх конкретних хмар у межах певного хмарного скупчення. В обох випадках спостерігалася та сама квазіперіодичність, причому зсув фаз практично був відсутній у межах зони спостережень. Щодо найбільш потужних хмар у зоні огляду наявність квазіперіодичних змін відзначено у 90% випадків. У 76% випадків період коливань становив 1 год $\pm$  15 хв, довші періоди зустрічалися у 10% випадків. На рисунку період модуляцій можна оцінити як 3 години. Коливання висоти верхньої межі відчувають не тільки найбільші хмари, але і весь хмарний ансамбль принаймні в радіусі 100 км.

У граничному шарі атмосфери при сильному перегріві поверхні, що підстилає, розвивається режим термічної турбулентності, особливо при наявності вищележачого стійкого затримуючого шару (наприклад, інверсія осідання в антициклоні). Розвиток конвекції в таких умовах в ранкові та

денні години проходить стадії осередків та окремих терміків (струмів, що піднімаються, або «бульбашок»), а при подальшому прогріві – етап інтенсивної взаємодії конвективних елементів, що обумовлює перемішування повітря. У результаті розвивається «перемішаний шар» зі стратифікацією, близькою до байдужої. Не лише потенціальна температура, а й вітер у цьому шарі мало міняється з висотою. Наявність такого шару враховується у деяких способах прогнозу конвективних явищ методом частки.

**Характеристики конвективної нестійкості.** Наявність конвективної нестійкості в атмосфері, глибина нестійких шарів, запаси енергії конвективної нестійкості оцінюються за результатами радіозондування, а у випадках, коли йдеться про оцінки цих характеристик на значній території – за результатами об'єктивного аналізу. Прогностичні значення визначаються за даними чисельного прогнозу. У всіх випадках для таких оцінок використовуються дані про температуру та вологість у землі та на ізобаричних поверхнях.

З цією метою існують спеціальні діаграми, у яких у координатах температура – тиск нанесені криві, відповідні сухим і вологим адіабатам, т. е. графіки зміни температури частинок при адіабатичному підйомі, за відсутності і за наявності насичення водяної пари. У Росії її використовують т. зв. аерологічна діаграма в англійській літературі – skew-T – log P diagram (plot).

Основними величинами, що характеризують конвективну нестійкість, є:

- рівень перетину кривої стратифікації атмосфери з кривою стану частинки, що піднімається з деякого рівня. У цей рівень зазвичай називається рівнем конвекції, в англійській літературі – Level of neutral buoyancy, LNB (рівень нейтральної плавучості). Вважається, що це оцінка верхньої межі конвективних хмар. З урахуванням сказаного вище вважатимуться, що це якась наближена середня оцінка висоти верхньої межі. Інша назва цього рівня – Equilibrium level (рівноважний рівень). Це рівень, на якому температура частинки, що адіабатично піднімається від землі (з нижнього 500-м шару), стає рівною температурі навколишнього повітря і, таким чином, сила плавучості перетворюється на нуль). Підйом частки відбувається по сухій адіабаті до рівня конденсації, а вище за нього – по вологій адіабаті.

- Доступна потенціальна енергія конвекції (convective available potential energy) для частки, що піднімається з рівня  $P_i$ :

$$CAPE_i = \int_{P_{LNB}}^{P_i} R_d (T_{\rho P} - T_{\rho a}) d \ln p, \quad (4.71)$$

де  $R_d$  - постійна газова сухого повітря,  $T_\rho$  - «щільна температура» (density temperature):  $T_\rho = T \frac{1+r/\varepsilon}{1+r_T}$  ( $T$  – температура,  $r$  – відношення суміші водяної пари,  $r_T = r + r_e + r_i$  – «повне» відношення суміші ( $r_e$  і  $r_i$  - відношення суміші для водяних крапель та крижаних кристалів),  $\varepsilon = R_d/R_v = 0.622$  ( $R_v$  - газова постійна для водяної пари),  $P_i$  – тиск на рівні  $i$ ,  $PLNB$  – тиск на рівні нульової плавучості,  $T_\rho$ ,  $T_{\rho a}$  – щільнісні температури на рівні  $p$  у частинці, що піднімається, і в навколишньому повітрі, відповідно. Щільна температура - це температура хмарного повітря, що має ту ж щільність і тиск, що і це сухе повітря. (Щодо вологого ненасиченого повітря  $T_\rho$  дорівнює віртуальній температурі.) «Доступна потенціальна енергія» (Дж/кг) - це та частина повної потенціальної енергії, яка може виділитися і перетворитися на кінетичну енергію в процесі розв'язання нестійкості. CAPE – величина, аналогічна прийнятому у Росії терміну «енергія нестійкості», але визначається в даному випадку не через звичайну температуру, а через щільну (як це робиться в монографії Emanuel KA, Atmospheric convection, Oxford Univ. Press, 1994, 580 pp.) . У деяких роботах використовується вираз для CAPE і через нормальну температуру, а оцінка через щільну (віртуальну) температуру називається не CAPE, а CAPV. У практиці використовуються обидві оцінки.

- Енергія конвективного гальмування (convective inhibition) для частки, що піднімається з рівня  $P_i$ :

$$CIN = \int_{P_{LFC}}^{P_i} R_d (T_{\rho p} - T_{\rho a}) d \ln p, \quad (4.72)$$

Тут  $PLFC$  – тиск на рівні вільної конвекції (LFC – Level of free convection), тобто на рівні, до якого треба адіабатично підняти частинку від землі (спочатку по сухій адіабаті, а потім вище рівня конденсації, по вологій адіабаті), щоб її крива підйому перетнула криву стратифікації: починаючи з рівня вільної конвекції, частка набуває позитивної плавучості.

Аналогічно  $CAP$ ,  $CIN$  часом розраховується не за віртуальною, а за звичайною температурою. Ця величина є мірою гальмування частки, яка піднімається (наприклад, внаслідок динамічного вимушування, у зонах поперечних циркуляцій на фронтах) у стійкому шарі: яку енергію треба витратити, щоб підняти частинку рівня, з якого вона вже зможе підніматися під дією сили плавучості. Ця енергія витрачається працювати проти негативної сили плавучості.

- Висота рівня зародження низхідного потоку у хмарі. Ця величина була введена співробітниками Високогірного геофізичного інституту (Нальчик), які розробляли методи прогнозу грозових та градових процесів.

Вона характеризує здатність купово-дощової хмари генерувати сильні низхідні потоки.

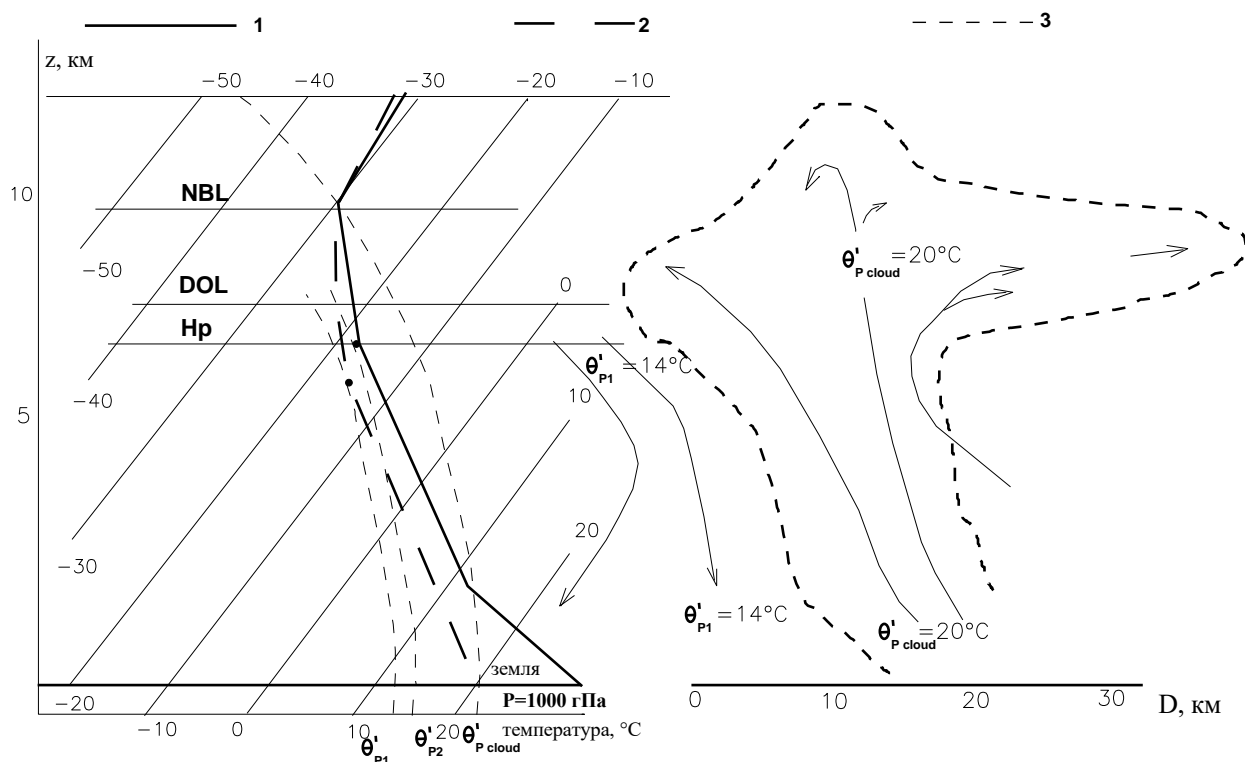


Рисунок 4.18 – Схема визначення висоти рівня зародження низхідного потоку в купчасто-дощовій хмарі: 1, 2 - крива стратифікації температури повітря і температури змоченого термометра, відповідно, 3 - вологі адиабати, LNB - висота рівня нульової плавучості,  $H_p$  - верхня межа потенціального, DOL - висота рівня зародження низхідного потоку, DOL -  $H_p$  - шар, з якого можливе адиабатичне опускання, якщо в ньому висихають краплі дощу [20]

Рівень зародження низхідного потоку (ми його назвали, за аналогією з іншими величинами, англійською downdraft origination level, *DOL*) – це верхня межа шару, в якому частинки з негативною плавучістю можуть опускатися до землі з позитивним прискоренням. Рівень *DOL* визначається як верхній рівень перетину вологої адиабати, що стосується кривої стратифікації температури (так, що вся крива стратифікації лежить праворуч від цієї вологої адиабати) з кривою стратифікації температури змоченого термометра. Оскільки температура змоченого термометра консервативна щодо дощу, що випаровується, то при висиханні крапель, що випадають з хмари, повітря на рівні *DOL* при своєму опусканні ніде не виявиться тепліше оточення. При певній висоті рівня *DOL* та виконанні ще



низки критеріїв, у хмарі виникають умови для утворення граду. Деталей цього методу ми не розглядатимемо. Подібних методів прогнозу конвекції існує багато, вони зазвичай отримані емпірично на матеріалах спостережень у конкретному районі та прив'язані до певної схеми прогнозу синоптичного положення та полів температури, вологості та вітру (від синоптичних оцінок до чисельних моделей) і тому є обмеженими як у географічному, так і у інших відносинах. Вони, проте, знаходять практичне застосування у районах, котрим розроблені. вологості та вітру (від синоптичних оцінок до чисельних моделей) і тому є обмеженими як у географічному, так і в інших відношеннях. Вони, проте, знаходять практичне застосування у районах, котрим розроблені. вологості та вітру (від синоптичних оцінок до чисельних моделей) і тому є обмеженими як у географічному, так і в інших відношеннях. Вони, проте, знаходять практичне застосування у районах, котрим розроблені.

Найбільш радикальний шлях прогнозування інтенсивної конвекції – прямий опис у межах чисельних моделей. Цей напрямок інтенсивно розвивається у провідних світових прогностичних центрах з розвитком негідростатичних моделей атмосфери з високою просторовою роздільною здатністю. Сучасні чисельні моделі у принципі можуть у явному вигляді моделювати МКС, із якими пов'язані найнебезпечніші конвективні явища. Однак одна лише висока роздільна здатність, навіть разом з відмовою від наближення гідростатики та гарною фізикою, не забезпечує успішного прогнозу конвективних явищ: для цього потрібні вихідні дані з відповідним просторовим дозволом, а це в нашій країні є слабким місцем будь-якого чисельного моделювання. Крім того, оскільки моделі з таким дозволом та фізичним наповненням є, як правило, регіональними, а чи не глобальними, їх успішної роботи потрібні дані спостережень з високим тимчасовим дозволом, щоб забезпечити граничні умови потрібної точності. Ця умова не виконується поки не тільки в нас, але навіть і в Західній Європі, де просторова щільність станцій, що спостерігають, на порядок і більше перевищує російську. Тому в даний час немає підстав сподіватися на успіхи прямого чисельного моделювання конвекції навіть за допомогою регіональних чисельних моделей світового класу, що зараз встановлюються. У умовах перелічені вище характеристики конвективної нестійкості зберігають своє практичне значення. де просторова щільність спостерігаючих станцій на порядок і перевищує російську. Тому в даний час немає підстав сподіватися на успіхи прямого чисельного моделювання конвекції навіть за допомогою регіональних чисельних моделей світового класу, що зараз встановлюються. У умовах перелічені вище характеристики конвективної нестійкості зберігають своє практичне значення. де просторова щільність спостерігаючих станцій на порядок і перевищує російську. Тому в даний час немає підстав сподіватися на успіхи прямого чисельного моделювання конвекції навіть за допомогою

регіональних чисельних моделей світового класу, що зараз встановлюються. У умовах перелічені вище характеристики конвективної нестійкості зберігають своє практичне значення.

У нашому відділі ще 1991 р. розроблено програму розрахунку висоти рівня конвекції (*LNB*) за даними об'єктивного аналізу та чисельного прогнозу у вузлах регулярної сітки (у разі вид сітки немає значення). На той час існувала мережа метеорологічних радіолокаторів (нехай не найкращих), і склалися за термінами радіозондування збірні карти р/л даних на європейській частині СРСР, у тому числі висоти верхньої межі хмар. Ці карти були доступні в нашому архіві, і ми з О.М. Скриптунової вручну склали архів даних р/з висот хмар по квадратах сітки об'єктивного аналізу, а потім підібрали варіант методу частки, що забезпечував найкращу згоду з р/л спостереженнями. Ця програма досі оперативно використовується для побудови карт особливих явищ для авіації. Розрахунки здійснюються по всій північній півкулі з кроком 1.25 град. Таким варіантом методу частки виявився метод Лебедевої, із введенням перемішаного шару, товщина якого була отримана автором методу за матеріалами спостережень над середньою смугою ЕТС. Насправді, залежність від часу в межах конвективного сезону не дуже сильна. У терміни 00 та 12 ВСВ розраховуються поля *LNB* діагностичні (за об'єктивним аналізом) та прогностичні на 24 та 36 год на основі вихідних даних спектральної оперативної моделі. Результати можна бачити на базі SEL1, поля H87NO00Z (аналіз), H87 NO24Z, H87NO36Z. Окремо зараз вважаються в ті ж терміни поля конвекції на середніх рівнях за результатами напівлагранжової глобальної моделі з тим самим кроком, вони записуються в ту саму базу, імена полів відрізняються тим, що замість Н у їхній назві стоїть G. У основу заносяться лише значення *LNB*, відповідні потужності хмари над рівнем конденсації (приймається за нижню межу хмари) понад 2 км. Дрібна конвекція (хмари малої вертикальної потужності) нехтується як така, що не має значення для авіації. Величини CAPE, CIN, DOL ми також розраховували, чи є відповідні програми. Але використовуємо тільки CAPE, тому що спеціальним дослідженням показано (у дипломній роботі студента МДУ), що *LNB* краще корелює з опадами, ніж CAPE. Інші величини ми поки що не використовуємо. Але використовуємо тільки CAPE, тому що спеціальним дослідженням показано (у дипломній роботі студента МДУ), що *LNB* краще корелює з опадами, ніж CAPE. Інші величини ми поки що не використовуємо. Але використовуємо тільки CAPE, тому що спеціальним дослідженням показано (у дипломній роботі студента МДУ), що *LNB* краще корелює з опадами, ніж CAPE. Інші величини ми поки що не використовуємо.

Конвективну нестійкість можна як ще один, крім фронтального, механізм вимушення вертикальних рухів. Дійсно, якщо є конвективно-

нестійкий шар, то частка, якимось чином зсунута з рівноваги, буде рухатися в тому ж напрямку з прискоренням. У разі висхідних рухів виникнуть хмари, а потім і опади. Ми у своєму аналізі ввели на розгляд коефіцієнт реалізації конвективної нестійкості, що показує, як часто у квадратах сітки з конвективною нестійкістю випадають опади. Цей коефіцієнт виявився більшим у фронтальних зонах, ніж поза ними, і отриману різницю можна розглядати як оцінку стимулюючого ефекту фронтальних зон як тригерів конвекції. Інша введена нами характеристика – коефіцієнт генерації конвективної нестійкості – визначається як відношення числа вузлів з конвективною нестійкістю до загальної кількості вузлів сітки у будь-якій області. Так, у передніх зонах (зонах зі значеннями переднього параметра  $> 20$ ) коефіцієнт генерації більше, ніж за їх, що можна розглядати як оцінку інтенсивності генерації конвективної нестійкості у передніх зонах. За даними ОА за 6 років по європейській Росії ми отримали, наприклад, що у весняний сезон 45.5% всіх вузлів із стійкою стратифікацією відносяться до однорідних повітряних мас ( $F < 5$ ), і тут же виявлено 26.4% вузлів із нестійкою стратифікацією. Зі зростанням  $F$  збільшується відсоток нестійких стратифікацій та зменшується відсоток стійких. Таким чином, динамічне (фронтальне) вимушування постає як генератор конвективної нестійкості. При цьому нестійкість у глибоких шарах (більше 8 км) частіше буває вимушеною, ніж нестійкість у дрібніших шарах. На дуже різких фронтах конвективна нестійкість виявляється у середньому кожному третьому вузлі сітки взимку й у кожному другому – в інші сезони.

З іншого боку, повторюваність опадів всіх градацій явно більше за нестійкої стратифікації, ніж за стійкої. Так, при  $F < 5$  опади  $> 1$  мм/12 год спостерігаються у 2.5% випадків стійкої та 11.7% випадків нестійкої стратифікації, а при  $F$  від 20 до 25 та від 60 до 65 – відповідно у 7.9 та 23.8 та у 17.2 та 51.4% випадків опадів.

Якщо ж говорити про коефіцієнт реалізації конвективної нестійкості, то (без деталізації по градаціях опадів) цей коефіцієнт становить 31.1% при  $F < 5$  і 64.3% при  $F > 150$ . Тобто чим сильніше динамічне (фронтальне) вимушення вертикальних рухів, тим краще реалізується конвективна нестійкість.

Таким чином, конвективне вимушення вертикальних рухів та опадів відіграє роль, порівнянну з динамічним вимушенням у фронтальних зонах. При цьому конвективна нестійкість, будучи більш дрібномасштабним явищем у порівнянні з бароклінічними зонами фронтів, відчуває їх вплив як генератора та тригера конвективної нестійкості. Кожен із видів вимушення є сам собою значним предиктором опадів, особливо сильних: фронтальний параметр є значним предиктором у всі сезони (особливо взимку), а висота рівня нульової плавучості – у всі сезони, крім зими (коли повторюваність нестійкої стратифікації невисока).

#### 4.6 Контрольні запитання

1. Яка рідина називається баротропною (бароклінною)?
2. Який рух є квазігеострофічним (бездивергентним, гідростатичним)?
3. Що таке метод лінеаризації?
4. Що таке функція течії?
5. При яких умовах і обмеженнях рівняння завихреності отримуємо дисперсійне співвідношення для баритропних хвиль Россбі?
6. При яких умовах і обмеженнях рівняння завихреності отримуємо дисперсійне співвідношення для хвиль Гаурвіца?
7. Яка довжина хвиль Россбі (хвиль Гаурвіца)? До яких хвиль в атмосфері відносяться ці хвилі?
8. Які хвилі є баротропно нестійкими (баротропно стійкими)?
9. Перелічить фундаментальні поняття теорії нестійкості.
10. Наведіть відмінності течій Куетта і Пуазейля.
11. Чим відрізняється течія Пуазейля від струменевої течії?
12. Формулювання теореми Сквайра (теореми Говарда).
13. В чому полягає наближення Буссінеска?
14. Фізичний сенс частоти Вайсяля-Брента.
15. Фізичний сенс числа Річардсона.
16. Для повітряного потоку з якими властивостями можна використовувати число Річардсона (число Рейнольдса)?
17. Що таке  $\ell$  -площина ( $\beta$  – площина)?
18. Які хвилі називають хвилями Іді? Їх властивості.
19. За яких умов в атмосфері виникають хвилі Іді?
20. За яких умов в атмосфері виникають хвилі Гріна і Чарні?
21. Який вихор називають квазігеострофічним потенціальним?
22. Які хвилі називають гравітаційними?
23. За яких умов в атмосфері виникає нестійкість Кельвіна-Гельмгольца?
24. При яких числах Річардсона в атмосфері наявні несингулярні гравітаційні хвилі?
25. Які особливості мають процеси з негативною в'язкістю?
26. Які ефекти можна однести до нелінійних? Як описуються нелінійні ефекти?
27. Які три нелінійні режими можна виділити в залежності від чисел Россбі і різниці температур?
28. При яких числах Россбі можна знехтувати силою Коріоліса?
29. Надайте фізичний сенс числа Релея?
30. Яку нестійкість називають конвективною?

## 5 Нестійкість і атмосферна турбулентність

Відомо, що всі течії рідин і газів в геофізичній гідродинаміці розділяються на два типи - ламінарні і турбулентні.

Ламінарні течії характеризуються тим, що траєкторії окремих частинок повторюють один одну. Зафіксувавши поведінку одного елементарного об'єму, ми можемо судити про поведінку потоку загалом. Гідродинамічні параметри ламінарного потоку плавно міняються в просторі і у часі. Опис ламінарних потоків здійснюється за допомогою рівнянь гідротермодинаміки для в'язкої рідини, викладених у розд. 2.

В турбулентному потоці гідродинамічні величини змінюються в просторі і у часі надто нерегулярно. Траєкторії окремих частинок носять хаотичний характер, перетинаються один з одним і по поведінці окремих частинок ми не можемо судити про поведінку потоці загалом. Траєкторію кожної частинки можна розрахувати, як і в ламінарному потоку, за допомогою рівнянь гідродинаміки. Однак цей розрахунок повинен бути здійснений для нескінченно великого набору елементарних об'ємів. Абсолютно ясно, що такий шлях опису руху рідини є нереальним і для турбулентних потоків необхідно розробити свої способи розрахунку просторово-часового розподілу їх характеристик, засновані на теорії випадкових функцій і процесів.

Виявляється, що більшість течій, які зустрічаються в природі, є турбулентними. Якісно турбулентні течії відрізняються тим, що їх термо- і гідродинамічні характеристики (вектор швидкості, тиск, температура, густина, концентрація домішки і ін.) зазнають хаотичних коливань, які створюються наявністю численних вихорів різних масштабів. Потрібно зазначити, що на відміну від ламінарного потоку у Фур'є-компонент турбулентних термо- і гідродинамічних полів відсутні однозначні дисперсійні співвідношення між частотами і хвильовими векторами, які широко використовувались, наприклад, в теорії мілкої води.

Тут ми будемо розглядати основні закономірності геофізичної турбулентності. Геофізичною будемо називати турбулентність в природних течіях земної атмосфери, Світового океану, морях, ріках, озерах і т.д., яка формується в стратифікованому обертовому бароклінному середовищі.

Для отримання характеристик геофізичної турбулентності передусім необхідно розглянути умови переходу від ламінарної до турбулентної течії. З цією метою використовуємо теорію стійкості руху рідини по відношенню до малих збурень, розроблену Л.Д.Ландау.

### 5.1 Теорія Ландау

Для будь-якої задачі про рух в'язкої рідини в заданих стаціонарних умовах повинен існувати точний стаціонарний розв'язок рівнянь

гідродинаміки. Однак при цьому не кожний точний розв'язок рівнянь руху може реально здійснюватися в природі. Для реальних природних течій повинна виконуватися ще умова стійкості. Неминуче виникаючі в потоці рідини малі збурення повинні затухати з часом, В іншому випадку, якщо ці збурення ростуть з часом, то рух нестійко і фактично в природі існувати не може. Для опису стійкості стаціонарного руху в'язкої рідини скористаємось наступною схемою. На досліджуване стаціонарне розв'язання з розподілом швидкості  $\vec{V}_0(\vec{r})$  накладається нестаціонарне мале збурення  $\vec{V}_1(\vec{r}, t)$ , яке повинно бути визначено таким чином, щоб результуючий рух  $\vec{V}_0 + \vec{V}_1$  задовольняв рівняння руху.

Якщо підставити швидкість і тиск

$$\vec{V}(\vec{r}, t) = \vec{V}_0(\vec{r}) + \vec{V}_1(\vec{r}, t), \quad (5.1)$$

$$p(\vec{r}, t) = p_0(\vec{r}) + p_1(\vec{r}, t) \quad (5.2)$$

в рівняння Нав'є-Стокса і нерозривності для нестисливої рідини, то одержимо рівняння для визначення величин  $\vec{V}_0, p_0, \vec{V}_1, p_1$

$$(\vec{V}_0 \nabla) \vec{V} = -\frac{\nabla p_0}{\rho} + \nu \nabla^2 \vec{V}_0 + 2\vec{\omega} \times \vec{V}_0 + \vec{g}, \quad (5.3)$$

$$\operatorname{div} \vec{V}_0 = 0. \quad (5.4)$$

$$\frac{\partial \vec{V}_1}{\partial t} + (\vec{V}_0 \nabla) \vec{V}_1 + (\vec{V}_1 \nabla) \vec{V}_0 = -\frac{\nabla p_1}{\rho} + \nu \nabla^2 \vec{V}_1 + 2\vec{\omega} \times \vec{V}_1, \quad (5.5)$$

$$\operatorname{div} \vec{V}_1 = 0. \quad (5.6)$$

Дійсно, якщо скласти (5.3) і (5.5), (5.4) і (5.6), то дістанемо рівняння Нав'є-Стокса і нерозривності для величин  $\vec{V}$  і  $p$ . Підкреслимо, що в рівнянні (5.5) опущені малі квадратичні члени.

Вектор  $\vec{V}_1$  задовольняє систему лінійних однорідних диференціальних рівнянь з коефіцієнтами, які є функціями тільки координат. Загальний розв'язок таких рівнянь може бути представлений у вигляді суми частних розв'язків, в яких  $\vec{V}_1$  залежить від часу за допомогою множників типу  $e^{-i\sigma t}$ . Самі частоти  $\sigma$  визначаються із рівняння (5.5), як це робилось, наприклад, в теорії мілкої води. Ці частоти, взагалі, комплексні і якщо серед них є такі, уявна частина яких додатна, то множник  $e^{-i\sigma t}$  буде необмежено зростати з часом. Дійсно, нехай

$$\sigma = \alpha + i\beta.$$

Тоді  $e^{-i(\alpha+i\beta)t} = e^{-i\alpha t} \cdot e^{\beta t}$  і при  $\beta > 0$  величина  $e^{\beta t}$  при  $t \rightarrow \infty$  необмежено зростає. Іншими словами, такі збурення, якщо виникли в потоці,

зростатимуть і рух буде нестійким по відношенню до них. В реальних умовах існують лише стійкі рухи, для яких необхідно, щоб у всіх можливих частот  $\sigma$  уявна частина була від'ємною. Тоді виникаючі збурення будуть експоненціально затухати з часом.

Такий шлях математичного дослідження стійкості є складним. Тому для вивчення стійкості течії в теорії Ландау залучаються фізичні міркування, які дозволяють отримати умови стійкості більш простим шляхом.

Очевидно, що стійкість течії залежить від її характеристик, до яких відносяться швидкість потоку  $V$ , його в'язкість  $\nu$  і лінійний розмір області  $l$ , в якій розглядається рух.

З вказаних трьох величин можна отримати єдину безрозмірну комбінацію, яка визначає характер руху

$$Re = \frac{Vl}{\nu}. \quad (5.7)$$

Ця величина називається числом Рейнольдса.

Неважко показати, що число  $Re$  є відношенням порядків зміни кінетичної енергії  $\frac{d}{dt} \left( \frac{V^2}{2} \right)$ , яка йде на розвиток збурення, до роботи сили в'язкості  $\left( \nu \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right)$ , що перешкоджає його розвитку.

Природно припустити (і це підтверджується експериментальними даними), що при малих числах Рейнольдса рух стійкий. В міру збільшення  $Re$  в кінець кінцем досягається його критичне значення ( $Re_{кр}$ ), починаючи з якого рух стає нестійким. Критичне значення числа Рейнольдса не є універсальним і для кожного типу руху існує своє  $Re_{кр}$ . Розглянемо характер нестационарного руху, який встановлюється внаслідок нестійкості течії при великих числах Рейнольдса.

Як впливає з аналізу рівняння (5.5), в потоці повинні існувати частоти, у яких уявна частина повинна бути від'ємною. Тому в виразі (5.7)  $\beta < 0$  при  $Re < Re_{кр}$ , при  $Re = Re_{кр}$   $\beta = 0$  і при  $Re > Re_{кр}$   $\beta > 0$ .

Функція  $\vec{V}_1$ , відповідна частоті  $\sigma$ , має вигляд

$$\vec{V}_1 = A(t) \vec{f}(x, y, z), \quad (5.8)$$

де  $A$ - комплексна амплітуда

$$A(t) = const \cdot e^{\beta t} e^{-i\sigma t}. \quad (5.9)$$

Вираз (5.9) справедливий лише для короткого проміжку часу після моменту зриву стаціонарного режиму. Отже, необхідно запропонувати інший спосіб обчислення амплітуди нестационарного руху, оскільки з фізичних міркувань ясно, що вона повинна прямувати до деякої кінцевої межі. Спосіб визначення виразу для амплітуди формулюється таким чином.

Передусім розглянемо зміну квадрата модуля амплітуди. В цьому випадку ми позбуваємося періодичного множника  $e^{-i\omega t}$ . Далі продиференціюємо  $|A(t)|^2$  по  $t$

$$\frac{d}{dt}|A|^2 = 2\beta|A|^2, \quad (5.10)$$

Або

$$\frac{dy}{dt} = 2\beta y, \quad (5.11)$$

де  $y = |A|^2$ .

Отримане рівняння (5.11) є лінійним відносно  $y$  і, як вказувалося раніше, описує поведінку амплітуди лише протягом короткого часу після моменту зриву стаціонарного режиму.

Природно, що при збільшенні  $t$  повинні відігравати істотну роль в поведінці амплітуди з часом нелінійні члени, які з'являться в правій частині рівнянь (5.10) або (5.11). Оскільки  $|A|^2 = AA^*$ , де  $A^*$  - комплексно спряжений вираз для  $A(t)$ , то праву частину рівняння (5.10) можна розглядати як перший член розкладання. Тоді другий член розкладання буде мати вигляд  $AA^*A$  або  $A^*AA^*$ , третій -  $AAA^*A^*$ . Другий і подальший члени розкладання і будуть нелінійними добавками до правої частини (5.10). Їх роль зростає в міру збільшення інтервалу часу. Однак, як видно з виразу для другого члена, він є періодичним (зберігається множник  $e^{i\omega t}$ ). Тому, якщо якимось чином позбутися періодичності, іншими словами від другого члена розкладання, то рівняння (5.11) може бути приведено до вигляду

$$\frac{dy}{dt} = 2\beta y - \delta y^2. \quad (5.12)$$

Щоб позбутися періодичності, виконаємо операцію осереднення. Як період осереднення виберемо часовий інтервал  $T$  з умови



$$\frac{1}{\beta} \gg T \gg \frac{2\pi}{\alpha}, \quad (5.13)$$

де  $\frac{1}{\beta}$  - характерний час зміни модуля амплітуди, а  $\frac{2\pi}{\alpha}$  період періодичного коливання  $e^{-i\alpha t}$ . Оскільки  $A(t)$  представлена добутком  $|A(t)|$  і періодичного множника, то протягом періоду  $T$  модуль амплітуди змінюється мало, а періодичний множник багаторазово змінює знак. За рахунок осереднення наблизимо його до нуля, і отримаємо:

$$\frac{d|A|^2}{dt} = 2\beta|A|^2 - \delta|A|^4. \quad (5.14)$$

Тут  $\delta$  - додатна або від'ємна константа (стала Ландау). Якщо розглянути динаміку руху рідини, коли  $Re$  стає більшим від критичного, то при  $\delta > 0$  на фоні основного потоку скільки завгодно малі збурення вперше стають нестійкими. Такий рух описується рівнянням (5.14), в якому виникає явна нелінійність. Оскільки  $T \ll 1/\beta$ , осереднення істотно не змінює ліву і праву частини рівняння (5.14) через малість зміни  $|A(t)|$  протягом періоду осереднення. Тобто в рівнянні (5.14) знак осереднення можна опустити.

Тоді розв'язок (5.14) має вигляд:

$$|A|^{-2} = \frac{\delta}{2\beta} + const \cdot e^{-2\beta t}. \quad (5.15)$$

При  $t \rightarrow \infty$   $|A|^2 = \frac{2\beta}{\delta}$ , і  $|A|^2$  асимптотично прямує до кінцевої величини.

Як вказувалося вище, уявна частина ( $\beta$ ) комплексної частоти змінює знак при переході  $Re$  через  $Re_{кр}$ . Можна припустити, що  $\beta \sim (Re - Re_{кр})$ , тоді

$$|A| \sim (Re - Re_{кр})^{1/2} \quad (5.16)$$

Все сказане вище стосувалося випадку  $\delta > 0$ .

При  $\delta < 0$  і  $Re = Re_{кр}$  амплітуда збурення стрибком зростає до кінцевого значення. В цьому випадку в деякому інтервалі  $Re_{кр}' < Re < Re_{кр}$  рух стійкий по відношенню до нескінченно малих збурень і нестійкий до збурень кінцевої амплітуди, але при  $t \rightarrow \infty$  також наближається до обмежених значень модуля амплітуди.

Отже, в результаті нестійкості до малих збурень виникає нестационарний рух, який може бути представлений у вигляді накладення на стационарний рух зі швидкістю  $v_0(\vec{r})$  періодичного руху  $V_1(\vec{r}, t)$  з малою, але кінцевою, амплітудою, яка росте в міру збільшення  $Re$ .

Розподіл швидкостей має вигляд:

$$\vec{V}_1 = \vec{f}(\vec{r}) \cdot e^{-i(\alpha t + \gamma)} \quad (5.17)$$

Якщо замість часу користуватися як змінною фазою  $\varphi = \alpha t + \gamma$ , то  $\gamma$  - початкова фаза ( $t=0$ ).

Таким чином,  $\vec{V}(\vec{r}, t)$  є періодична функція від  $\varphi$  з періодом  $2\pi$ . Проте в періодичній функції  $\vec{V}(\vec{r}, t)$  нам відома лише абсолютна величина амплітуди, але невідома фаза  $\varphi$ , яка залежить від випадкових умов, що визначають початкову фазу.

Періодичний рух, що вивчається, не визначається однозначно заданими стаціонарними зовнішніми умовами, в яких він відбувається. Одна з величин (початкова фаза) залишається довільною. Отже, якщо при  $Re \leq Re_{кр}$  рух не має ступенів свободи, то при  $Re > Re_{кр}$  з'являється спочатку один ступінь свободи. При цьому якщо нас цікавить розмір збурень, які в першу чергу втрачають стійкість, то слід ввести локальне число  $Re_\alpha = \frac{l_\alpha U}{\nu}$ ,  $l_\alpha = U \cdot T_\alpha = \frac{U}{\alpha}$ . Отже, чим більше  $l_\alpha$ , тим раніше  $Re_\alpha > Re_{кр}$  і виникає нестійкість. При цьому під  $U$  ми будемо розуміти швидкість стаціонарного руху, на який накладаються збурення масштабу  $l_\alpha$ .

Таким чином, в першу чергу в потоці “виживають” (виходять на періодичний режим і не затухають) низькочастотні (значення  $\alpha$  мале) коливання, накладені на стаціонарний рух. Загалом же ми отримуємо суму стаціонарного і періодичного рішень. Отже, рух стає періодичним з модулем амплітуди, який однозначно визначається числом Рейнольдса, і з невизначеною фазою (тобто має один ступінь свободи).

Якщо тепер в якості основного руху взяти періодичний, то точно так же можна показати, що в ньому виникає частота, для якої уявна частина  $\beta_1 > 0$ . В результаті виникає квазіперіодичний рух з двома довільними фазами, при цьому  $\alpha_1 > \alpha$  і  $l_1 < l$ . Такий чином, з'являються більш високочастотні коливання меншого масштабу. Отже, при великих числах Рейнольдса в потоці є цілий спектр періодичних коливань з різними частотами і невизначеними фазами. Рух набуває складного і нерегулярного характеру з великим числом ступенів свободи. Такий рух називається турбулентним. При великих  $t$  виникає розвинений турбулентний рух, який є суперпозицією хвильових рухів різних частот і масштабів.

Отже, основні висновки з теорії Ландау можна сформулювати таким чином. В реальних умовах, де завжди спостерігаються випадкові неконтрольовані початкові збурення при числі Рейнольдса, більшому від критичного, можливо існування турбулентного руху. Для встановлення його закономірностей необхідно користуватись осередненими значеннями гідродинамічних величин. При цьому необхідно щоб часовий інтервал

осереднення відповідав певним критеріям. У подальшому процедура осереднення була істотно уточнена. Однак, поки нас цікавить лише загальний висновок щодо необхідності переходу до осереднених значень і використання методів математичного опису випадкових полів і процесів.

## 5.2 Основні закономірності розвинутого турбулентного потоку

Розглянемо, наслідуючи Ландау, закономірності турбулентного розвинутого потоку. Внаслідок операції осереднення, як впливає з теорії Ландау, нерегулярність зміни у часі і просторі згладжується і середні величини є плавною функцією часу і координат. Різниця  $\vec{U}' = \vec{U} - \bar{\vec{U}}$  між істинною і середньою швидкістю, яка виявляє характерну для турбулентного руху (ТР) нерегулярну зміну, будемо називати пульсаційною частиною швидкості.

Розглянемо детальніше характер нерегулярного пульсаційного руху, який накладається на середній потік. Цей рух можна розглядати як результат накладення турбулентних вихорів різних масштабів.

При цьому під вихором ми будемо розуміти рух, який характеризується певною частотою і просторовим розміром. При зростанні числа  $Re$  спочатку виникають крупномасштабні пульсації, оскільки для них насамперед виконується умова  $Re > Re_{кр}$ . Чим менше розмір вихору, тим пізніше зумовлені ним пульсації виникають в потоці. При дуже великих числах  $Re$  в турбулентному потоці існують вихори з масштабами від самих великих до самих малих. Основну роль в розвинутому турбулентному потоці відіграють крупномасштабні вихори, розмір яких має порядок величини характерних довжин, порівнянних з розмірами області, в якій відбувається турбулентний рух.

Позначимо через  $L$  порядок величини основного (найбільшого) масштабу ТР. Крупномасштабні вихори цього розміру мають найбільші ампліти. Їх швидкість по порядку величини порівнянна із зміною *ди середньої* швидкості на відстані  $l$  (*підкреслимо*, що мова йде про зміну швидкості, а не про саму швидкість, яка може бути різною в різних системах відліку). Частоти цих крупномасштабних пульсацій порівнянні з  $\Omega = l / U$ , де  $U$  - середня швидкість потоку. Дійсно, частота визначає період повторюваності картини пульсаційного руху, що спостерігається з нерухомої індивідуальної системи відліку, відносно якої вся ця картина рухається разом з рідиною зі швидкістю  $U$ . Тоді  $\Omega$  - частоти зміни цієї картини в індивідуальній системі відліку.

Дрібномасштабні пульсації, відповідні великим частотам, беруть участь в ТР зі значно меншими амплітудами. Їх можна розглядати як дрібну детальну структуру, яка накладається на основні крупномасштабні рухи. У дрібномасштабних пульсаціях міститься мала частка кінетичної енергії. Тому підходом, що широко використовується при дослідженні

турбулентної структури, є моделювання великих вихорів зі стохастичним врахуванням дрібномасштабних.

Розглянемо закономірності просторової і часової зміни пульсаційної швидкості. На великих відстанях, сумірних з  $L$ , зміна пульсаційної швидкості визначається крупномасштабними вихорами і тому порівнянна з  $\delta U$ , тобто із зміною середньої швидкості на відстанях, порівнянних з розміром великих вихорів. На малих відстанях вона визначається дрібномасштабними вихорами і тому мала в порівнянні з  $\delta U$  (однак велика в порівнянні із зміною середньої швидкості на вказаній малій відстані, відповідній розміру дрібномасштабних вихорів). Якщо стежити за зміною пульсаційної швидкості з часом в даній точці простору, то на інтервалах часу малих в порівнянні з  $L/U$  пульсаційна швидкість зазнає малих змін, протягом же великих інтервалів пульсаційна швидкість змінюється на величину, порівнянну з  $\delta U$ . Для аналізу динаміки турбулентних вихорів необхідно ввести пульсаційне число  $Re_\lambda = V_\lambda \cdot \lambda / \nu$ , де  $V_\lambda$  - швидкість турбулентних вихорів,  $\lambda$  - їх просторовий розмір,  $\nu$  - кінематичний коефіцієнт молекулярної в'язкості. Природно, чим менше просторовий розмір руху, тим менше  $Re$ . Крупномасштабним вихорам відповідають великі  $Re$ , але великі  $Re$  одночасно відповідають малим величинам в'язкості  $\nu$ . З цього виходить, що динаміка великих вихорів не залежить від в'язкості рідини, отже, на цих просторових розмірах не відбувається помітна дисипація кінетичної енергії. Остання відбувається в дрібномасштабних вихорах, не істотних з точки зору загальної картини руху. Наведемо міркування, висловлене Річардсоном (1922р.) щодо фізичного механізму турбулентного перемішування при великому числі  $Re$ . Розвинена турбулентність представляє собою ієрархію вихорів (тобто збурень або неоднорідностей) різних порядків, в яких вихори даного порядку виникають за рахунок втрати стійкості більш великих вихорів попереднього порядку, запозичають у них енергію. В свою чергу, втрачаючи стійкість, вони передають її більш дрібним вихорам, які ними ж породжуються. (Порядок кінематичної енергії, яка передається і яку можна оцінити із аналізу енергетики турбулентного вихору, дорівнює  $V_\lambda^3 / \lambda$ ). Виникає своєрідний "каскадний процес", при якому енергія осередненого руху послідовно передається рухам все більш і більш дрібних розмірів, аж до рухів мінімального розміру. Рухи мінімального розміру є стійкими, оскільки характеризуються досить малим числом  $Re_\lambda$ .

У них в'язкість відіграє істотну роль, відбувається помітна дисипація кінетичної енергії в теплову.

Природно, що для підтримки стаціонарного стану процесу необхідна наявність зовнішніх джерел енергії, які безперервно передають її основному крупномасштабному руху.

Оскільки в'язкість рідини істотна лише для дрібномасштабних пульсацій, верхній масштаб яких ми позначимо через  $\lambda_0$ , то для всіх пульсацій  $\lambda \gg \lambda_0$  величини, що характеризують турбулентний потік, не повинні мінятися при варіації  $\nu$  і постійних зовнішніх умовах. Тоді зовнішніми характеристиками ТР будуть  $\rho$ ,  $l$ ,  $\delta U$ . Нехай  $\varepsilon$  - середня кількість енергії, яка дисипується за одиницю часу. Природно, що ця енергія дістається з крупномасштабних рухів. За допомогою каскадного механізму вона передається вихорам, за рахунок яких відбувається дисипація. Тому дисипація внаслідок сказаного буде визначатись переліченими зовнішніми параметрами. Тоді з теорії подібності і аналізу розмірностей отримаємо

$$\varepsilon \cong (\delta U)^3 / l. \quad (5.18)$$

оскільки ефекти турбулентного руху адекватні в'язкісним (наприклад, ефекти згладжування і гальмування), по аналогії можна ввести кінематичний коефіцієнт турбулентної в'язкості  $\nu_T$ , який на відміну від кінематичної в'язкості  $\nu$ , буде залежати від кінематичних характеристик потоку, зокрема, від перепаду швидкостей і характерного просторового розміру.

З теорії подібності і аналізу розмірностей отримуємо

$$\nu_T \cong (\delta U) \cdot l. \quad (5.19)$$

Неважко бачити, що  $\nu_T / \nu \approx Re / Re_{кр}$ , т.т. це відношення зростає з ростом  $Re$ , що відповідає фізиці процесу турбулентного перемішування. Можна показати, що вираз для дисипації ідентичний співвідношенню для ламінарного потоку, однак ламінарна дисипація визначається по похідних від істинної швидкості по координатах, а турбулентна в'язкість пов'язує дисипацію з градієнтом  $\delta U / l$  середньої швидкості

$$\varepsilon \cong \nu_T (\delta U / l)^2. \quad (5.20)$$

Ще одна характеристика може бути визначена для розвиненого турбулентного потоку з міркувань подібності і розмірностей - зміна тиску на характерному масштабі ТР

$$\delta p \cong \rho \cdot (\delta U)^2. \quad (5.21)$$

Досі ми розглядали турбулентний потік загалом, не виділяючи яких-небудь вихорів. Вже на цьому шляху був отриманий ряд цікавих висновків,

які можна доповнити, якщо розглянути "особливу" дрібномасштабну турбулентність. Розглянемо властивості розвиненої турбулентності, зумовлені вихорами розмірів  $\lambda$ , які малі в порівнянні із розміром  $l$  і великі в порівнянні з розмірами вихорів  $\lambda_0$ , що визначають величину дисипації (локальна властивість турбулентного потоку). Природно вихори з такими розмірами  $l \gg \lambda \gg \lambda_0$  мають властивості однорідності і ізотропії. Кажучи про локальні властивості ТР, ми маємо на увазі відносний рух елементарних об'ємів, а не рух всієї ділянки загалом, який пов'язаний з рухом більш великих масштабів.

Розглянемо висновки теорії локально-однорідної і локально-ізотропної турбулентності, отримані Колмогоровим і Обуховим.

Для вихорів розмірів  $\lambda \ll l$  величини  $l$  і  $\delta U$  не впливають на локальні властивості розвиненої турбулентності. Оскільки  $\lambda \gg \lambda_0$ , то параметри в'язкості також не можуть бути визначальними. Із перелічених раніше визначальних параметрів залишилась густина  $\rho$ . Однак ця величина є термодинамічною характеристикою. Залишається зробити висновок, що для цих вихорів визначальним процесом є приплив енергії від більш великих вихорів і передача енергії більш дрібним, де відбувається процес дисипації. Отже, в умовах рівноваги величина дисипації хоч і формується на масштабах, порівнянних з  $\lambda_0$ , але впливає істотним чином на весь діапазон хвильових чисел, відповідний вихорам всіх розмірів. У діапазоні хвильових чисел можна виділити "інерційний інтервал", як ділянку енергетичного спектра, на якій кількість енергії, що передається від великих вихорів до більш дрібних, дорівнює кількості кінетичної енергії, яка дисипує її в теплову в процесі безперервного подрібнення вихорів. На цьому інтервалі немає внутрішніх джерел і стоків енергії.

Визначимо порядок величини  $V_\lambda$  зміни швидкості ТР на відстані порядку  $\lambda$ . Вона повинна визначатися лише величиною дисипації  $\varepsilon$  і самою відстанню  $\lambda$ . Тому з теорії подібності можна отримати

$$V_\lambda = (\varepsilon \cdot \lambda)^{1/3} \quad (5.22)$$

Цю величину можна розглядати як оцінку порядку швидкості турбулентних вихорів масштабу  $\lambda$ . До виразу для  $V_\lambda$  можна також прийти із виразу для  $\varepsilon$  на вказаних масштабах.

Дійсно

$$\varepsilon \cong v_T \left( \frac{V_\lambda}{\lambda} \right)^2 \cong \frac{V_\lambda^3}{\lambda}, \quad (5.23)$$

$$(v_T \cong V_\lambda \lambda).$$

Звідки

$$V_\lambda \cong (\varepsilon \cdot \lambda)^{1/3}. \quad (5.24)$$

Зміна швидкості на протязі малої відстані пропорційна кореню кубічному з цієї відстані (закон Колмогорова-Обухова). Цей закон можна також представити в спектральній формі. Введемо замість масштабів відповідні хвильові числа пульсацій  $k \cong 1/\lambda$ . Нехай  $E(k)dk$  є кінетична енергія одиниці маси, яка міститься в пульсаціях зі значеннями  $k$  в даному інтервалі  $dk$ . Функція  $E(k)$  має розмірність  $L^3/\tau^2$ . З  $\varepsilon$  і  $k$  маємо  $E(k) \cong \varepsilon^{2/3} k^{-5/3}$ . Підкреслимо, що  $V_\lambda^2$  визначає порядок енергії, яка міститься в пульсаціях з всіма розмірами порядку і менше заданого масштабу  $\lambda$ . Тоді

$$\int_{\infty}^k E(k)dk = \frac{\varepsilon^{2/3}}{k^{2/3}} = (\varepsilon\lambda)^{2/3} = V_\lambda^2. \quad (5.25)$$

Розподіл енергії по частотному інтервалу можна дістати заміною  $k \cong \omega / U$  при  $E(k) = UE(\omega)$ . Тоді, підставивши у вираз для  $E(k)$  значення  $k$  через  $\omega$ , отримаємо

$$E(\omega) \cong \varepsilon^{2/3} \cdot \omega^{-5/3} U^{2/3}. \quad (5.26)$$

(Закон "мінус п'яти третин").

Нарешті визначимо величину  $\lambda_0$ . Складемо локальне число

$$Re_\lambda = \frac{\lambda \cdot V_\lambda}{\nu} = \frac{\delta U \cdot \lambda^{4/3}}{\nu \cdot l^{1/3}} = Re \cdot \left(\frac{\lambda}{l}\right)^{4/3}. \quad (5.27)$$

Порядок величини  $\lambda_0$  визначається тим, що для вказаного розміру повинно виконуватись співвідношення  $Re_\lambda = 1.0$ .

Звідси

$$\lambda_0 = l / Re^{3/4} = \frac{\nu^{3/4}}{\left(\frac{\delta U}{l}\right)^{1/4}} \cong \left(\frac{\nu^3}{\varepsilon}\right)^{1/4}. \quad (5.28)$$

Аналогічне вираз виходить із теорії розмірностей.

Таким чином, ми сформулювали основні закономірності розвиненого турбулентного потоку.

### 5.3 Осереднення гідродинамічних характеристик турбулентного потоку

Нагадаємо, що турбулентними ми будемо називати течії, для яких існує статистичний ансамбль аналогічних течій, який характеризується певними розподілами імовірності для значень всіляких гідродинамічних полів. Для такої течії існує теоретико-імовірностне середнє. На практиці використовується осереднення за часом або простором і передбачається ергодична теорема, яка виконується. Крім того, експериментальні дані показують, що в реальних турбулентних течіях мінімальні розміри і періоди турбулентних неоднорідностей є на декілька порядків перевершуючими розміри і періоди молекулярних рухів. На відстанях, порівнянних з розмірами мінімальних неоднорідностей, і протягом проміжків часу, порівнянних з мінімальними періодами пульсацій, всі гідродинамічні поля змінюються плавно і можуть бути описані функціями, що диференціюються. Тому опис ТР за допомогою диференціальних рівнянь гідромеханіки є обґрунтованим. Завдяки тому, що індивідуальні реалізації задовольняють певні диференціальні рівняння, статистичні характеристики виявляються пов'язаними цілим рядом співвідношень, вельми важливих для теорії турбулентності. Найпростіші зв'язки такого роду були встановлені ще Рейнольдсом за допомогою осереднення рівнянь гідродинаміки нестисливої рідини. Для цього необхідно здійснити операцію осереднення для рівнянь Нав'є-Стокса і отримати рівняння для осереднених величин. Однак тут з'являться другі моменти  $\overline{u_i \cdot u_j} = \overline{u_i} \cdot \overline{u_j} + \overline{u_i' \cdot u_j'}$ , і система стає незамкненою. Природно спробувати замкнути її, доповнивши рівняння гідродинаміки рівняннями для других моментів пульсацій.

Перейдемо до основної операції, яка використовується при описі турбулентного руху - до осереднення. Турбулентні течії представляють собою нелінійні механічні системи з великим числом ступенів свободи. Зміна в часі будь-якої фізичної величини описується функціями, які містять багато компонент Фур'є, тобто мають дуже складний характер. В цих умовах практично безнадійно намагатися описати поведінку одного окремого елементарного об'єму. Навіть будучи проведеним, цей опис був би мало інформативним, оскільки він є випадковим і не характерним для потоку в цілому. Єдино можливим в теорії турбулентності представляється статистичний опис, що спирається на вивчення статистичних закономірностей, властивих великим сукупностям однотипних об'єктів. При цьому необхідно визначити статистичні закономірності полів у всі моменти часу. Майбутні значення гідродинамічних полів будуть визначатися рівняннями гідродинаміки і їх початковими значеннями. Однак в турбулентних течіях ці значення будуть істотно залежати від малих неконтрольованих збурень в початкових і крайових умовах.



Розподіли величин в просторі і у часі будуть мати такий складний характер, що точні їх визначення марні. У турбулентному потоці представляє інтерес лише розподіл імовірності для відповідних гідродинамічних полів, а не самі точні характеристики цих полів.

Тому можна сформулювати наступну задачу: по заданому в початковий момент розподілу імовірностей значень п'яти незалежних гідродинамічних величин ( $u, v, w, p, T$ ) необхідно визначити розподіл імовірностей значень тих же гідродинамічних параметрів у всі подальші моменти часу. Ця задача надзвичайно складна. Тому в її найпростішому варіанті необхідно розв'язати дві більш окремі задачі: визначення середніх величин і статистичних моментів.

Передусім сформулюємо правила осереднення. Найбільш фізично обгрунтованим є теоретико-імовірностне осереднення, значення якого полягає в тому, що замість розгляду однієї турбулентної течії ми переходимо до статистичної сукупності аналогічних течій, які задаються набором фіксованих зовнішніх умов. Наприклад для швидкості і температури на рівні 2 м потрібно розглядати характеристики динамічного і термічного впливу підстилаючої поверхні і характер стратифікації як зовнішні умови. У цьому випадку необхідно знати функцію густини імовірності, тобто всі значення, для яких  $p(u) \neq 0$ . Якщо  $u_i(x, t)$  є "представником" сукупності течій при заданих зовнішніх умовах, то факт існування густини імовірності  $p(u)$  можна записати у вигляді  $p[u < u_i(t, x) < u + du] = p(u) du$ . Тоді теоретико-імовірностне середнє значення виражається  $\overline{u_i(x, t)} = \int_{-\infty}^{\infty} u \cdot p(u) \cdot du$ . Тут мова йшла про часові ряди гідродинамічної величини, яка досліджується. При переході до простору виникає N-мірна щільність імовірності. Природно, в атмосфері кожному полю метеорологічних величин відповідає своя система багатомірних густин імовірності, а також спільні густини імовірності значень одного з полів в будь-яких заданих N1 точках простору-часу, другого поля в N2 точках, і т.д. Тому наведене визначення середньої величини практично неприйнятне. На практиці користуються осередненням вигляду

$$\overline{f(x_1, x_2, x_3, t)} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1 - \zeta_1, x_2 - \zeta_2, x_3 - \zeta_3, t - \tau) \cdot \omega(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \tau) d\zeta_1 d\zeta_2 d\zeta_3 d\tau, \quad (5.29)$$

де  $\omega$  - вагова функція, для якої

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \omega d\zeta_1 d\zeta_2 d\zeta_3 d\tau = 1 \quad (5.30)$$

Від її вигляду залежать величини середніх.  
Покладемо

$$\omega(\vec{\zeta}, \tau) = \omega(\vec{\zeta})\delta(\tau) \text{ або } \omega(\vec{\zeta}, \tau) = \omega(\tau)\delta(\vec{\zeta}) \quad (5.31)$$

де  $\delta(\vec{\zeta})$  и  $\delta(\tau)$  – функції Дірака, а  $\omega(\vec{\zeta})$ ,  $\omega(\tau)$  - аналітичні функції, відмінні від нуля в межах заданого паралелепіпеда або відрізка часу (частіше всього постійні). Це осереднення може бути проведене по простору або за часом. Вибір цих функцій повинен задовольняти природні вимоги, щоб перехід до осереднених величин не приводив до значного ускладнення рівнянь. Для цього необхідно вимагати

$$\begin{aligned} 1) \quad \overline{f + g} &= \overline{f} + \overline{g} \\ 2) \quad \overline{af} &= a\overline{f} \\ 3) \quad \overline{a} &= a \quad (a = \text{const}) \\ 4) \quad \frac{\partial \overline{f}}{\partial s} &= \overline{\frac{\partial f}{\partial s}} \\ 5) \quad \overline{fg} &= \overline{f} \overline{g} \end{aligned} \quad (5.32)$$

Висновки:

$$\begin{aligned} \overline{\overline{f}} &= \overline{f}; \quad \overline{f'} = \overline{f - f} = 0; \\ \overline{\overline{fg}} &= \overline{f} \overline{g}; \\ \overline{\overline{fg'}} &= \overline{f} \overline{g'} = 0. \end{aligned}$$

Всі правила осереднення (5.4), крім п'ятого, виконуються при будь-якій функції осереднення (5.1). Тільки для п'ятого правила потрібно, щоб період осереднення задовольняв вимоги Ландау, тобто був набагато меншим від періоду турбулентних пульсацій і набагато більшим від періоду осередненого руху.

При теоретико-імовірнісному осередненні всі правила виконуються автоматично. Теоретико-імовірнісні середні є фізично обґрунтованими. Тому, якби вдалося отримати умови, коли їх можна було б замінити середніми за часом або по простору, це мало б величезне прикладне значення. Доказано, що, якщо виконуються умови стаціонарності і однорідності, т.т. теоретико-імовірнісне середнє  $\overline{u(t)} = U$  при  $T \rightarrow \infty$ , то для збіжності випадкових величин  $\overline{u_T(t)}$  к U, т.т.

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \left| \overline{u_T} - U \right|^2 = 0, \text{ необхідно и достатньо, щоб}$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T b_{uu}(\tau) d\tau = 0, \quad (5.33)$$

$$\text{де } b_{uu}(\tau) = \overline{[u(t+\tau) - U][u(t) - U]} \quad (5.34)$$

Оскільки кореляційну функцію  $b_{uu}(\tau)$  пульсацій гідродинамічного поля турбулентної течії в геофізичних застосуваннях практично завжди можна вважати прямою до нуля при  $\tau \rightarrow \infty$ , то в випадку сталих турбулентних течій теоретико-імовірнісні середні можуть бути визначені шляхом осереднення по достатньо великому інтервалу часу. При цьому середні за кінцевий час  $T$ , протягом якого процес можна вважати стаціонарним, вже досить близькі до граничних значень при  $T \rightarrow \infty$ . В атмосфері, наприклад, миттєві значення гідродинамічних величин ведуть себе таким чином, що відповідні випадкові функції  $\overline{u_r}(t)$  можна вважати стаціонарними і незалежними від часу при виборі періоду осереднення порядку десятків хвилин (точніше порядку 1 години).

Покажемо, як розраховується період осереднення.

Розглянемо як приклад осереднення модуля швидкості вітру поблизу поверхні Землі, де розподіл кінетичної енергії турбулентності за часовими періодами має два максимуми::

- 1) синоптичний з частотою 0,01 цикл/година, або 100 годин,
- 2) дрібномасштабний з частотою 80 цикл/година, або 1/80 години = 45 с.

Між ними знаходиться широкий мінімум спектральної густини. Якщо передбачити, що максимуми вносять найбільший внесок в формування поля вітру, то залежність модуля швидкості від часу можна представити у вигляді

$$v(t) = A_1 \sin \omega_1 t + A_2 \sin \omega_2 t. \quad (5.35)$$

Тоді

$$\overline{v} = A_1 \frac{\sin(\omega_1 \cdot t) \cdot \sin(\omega_1 \cdot T/2)}{\omega_1 \cdot T/2} + A_2 \frac{\sin(\omega_2 \cdot t) \cdot \sin(\omega_2 \cdot T/2)}{\omega_2 \cdot T/2} \quad (5.36)$$

Якщо вибрати  $T$  з умови

$$\omega_1 T \ll 1; \quad \omega_2 T \gg 1;$$

$$\text{то } \overline{v}(t) = A_1 \cdot \sin \omega_1 t. \quad (5.37)$$

і не залежить від періоду осереднення. Приймем, що

$$\omega_1 T = 1/(\omega_2 T); \quad (5.38)$$

Звідки

$$T = \frac{1}{\sqrt{\omega_1 \omega_2}} \approx 1 \text{ час} \quad (5.39)$$

Такий період узгоджується з експериментальними даними.

#### 5.4 Рівняння гідротермодинаміки для турбулентного потоку

Як вказувалося раніше, для турбулентної течії виконуються основні закони збереження і диференціальні рівняння, їх що описують. Однак отримані із розв'язання цих рівнянь індивідуальні поля метеовеличин носять випадковий характер. Тому для опису турбулентного потоку користуються осередненими величинами і пульсаціями (відхиленнями миттєвих величин від середніх). Можна передбачити, що осереднені величини плавно міняються в просторі і у часі, не зазнають різких стрибків, а пульсації характеризуються великою мінливістю в просторі і у часі.

Перейдемо до оцінки середніх величин. При цьому будемо виходити з рівнянь для в'язкої рідини. Виконаємо осереднення рівнянь гідротермодинаміки.

Рівняння руху для в'язкого середовища, які виражають закон збереження імпульсу, в компактній формі з застосуванням підсумовування по індексу  $\alpha$ , записуються у вигляді

$$\frac{\partial \rho v_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\rho v_i v_\alpha) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + 2\rho(\omega_j v_k - \omega_k v_j) - \rho g \delta_{i3} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left( \rho v \frac{\partial v_i}{\partial x_\alpha} \right) \quad (5.40)$$

Нагадаємо, що  $i=1,2,3$  і відноситься до зональної, меридіональної та вертикальної складових швидкості,  $j=i+1$ ,  $k=i+2$ . Якщо  $j>3$  і  $k>3$ , то з них віднімається трійка,

$$\delta_{i3} = \begin{cases} 1, i = 3, \\ 0, i \neq 3. \end{cases}$$

Застосуємо до вказаного рівняння операцію осереднення

$$\frac{\partial \overline{\rho v_i}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\overline{\rho v_i v_\alpha}) = -\frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} + 2(\omega_j \overline{v_k \rho} - \omega_k \overline{v_j \rho}) - \overline{\rho} g \delta_{i3} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left( \overline{\rho v \frac{\partial v_i}{\partial x_\alpha}} \right) \quad (5.41)$$

Розглянемо наближення Рейнольдса, згідно з яким густина не корелює з кінематичними характеристиками потоку, так що

$$\begin{aligned} \overline{\rho v_i} &= \overline{\rho} \cdot \overline{v_i}, \\ \overline{\rho v_i v_j} &= \overline{\rho} \cdot \overline{v_i v_j} + \overline{\rho' \cdot (v_i v_j)'} = \overline{\rho} \cdot \overline{v_i v_j} \end{aligned} \quad (5.42)$$

Відомо, що осереднення лінійних членів не змінює їх вигляду, тільки в цих членах замість миттєвих будуть стояти осереднені значення гідродинамічних параметрів. Осереднення нелінійних членів дає

$$\overline{v_i v_j} = \overline{v_i} \cdot \overline{v_j} + \overline{v_i' \cdot v_j'}. \quad (5.43)$$

Тоді отримаємо

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overline{\rho v_i}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\overline{\rho v_i v_\alpha} + \overline{\rho' \cdot v_\alpha' v_i'}) &= -\frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} + 2\overline{\rho} (\omega_j \overline{v_k} - \omega_k \overline{v_j}) - \\ -\overline{\rho} g \delta_{i3} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left( \overline{\rho v \frac{\partial v_i}{\partial x_\alpha}} \right). \end{aligned} \quad (5.44)$$

Рівняння (5.44) називається рівнянням Рейнольдса.

Осереднюємо рівняння нерозривності

$$\frac{\partial \overline{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\overline{\rho v_\alpha}) = 0. \quad (5.45)$$

Врахуємо (5.44), тоді

$$\frac{\partial \overline{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\overline{\rho} \cdot \overline{v_i}) = 0 \quad (5.46)$$

Помножимо (5.46) на  $\overline{v_i}$  і віднімемо з рівнянь Рейнольдса. Дістанемо

$$\frac{\partial \overline{\rho v_i}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\overline{\rho v_i v_\alpha}) = -\frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} + 2\overline{\rho} (\omega_j \overline{v_k} - \omega_k \overline{v_j}) - g \delta_{i3} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left( \overline{\rho v \frac{\partial v_i}{\partial x_\alpha}} - \overline{v_\alpha' v_i'} \right) \quad (5.47)$$

Виписані рівняння пов'язують зміни у часі і просторі осереднених величин і виражають закон збереження імпульсу для турбулентного потоку. Ці рівняння мають той же вигляд, що і рівняння Нав'є-Стокса, але

в них замість миттєвих фігурують осереднені величини і з'являються додаткові невідомі функції

$$\tau_{ij} = -\bar{\rho} \cdot \overline{v'_i v'_j}. \quad (5.48)$$

З'ясуємо їх значення. Розглянемо середнє значення щільності потоку імпульсу

$$\overline{\rho v_i v_j + p \delta_{ij} - \sigma_{ij}} = \bar{\rho} \bar{v}_i \bar{v}_j + \bar{p} \delta_{ij} - (\bar{\sigma}_{ij} - \bar{\rho} \cdot \overline{v'_i v'_j}) = \bar{\rho} \bar{v}_i \bar{v}_j + \bar{p} \delta_{ij} - (\bar{\sigma}_{ij} + \tau_{ij}). \quad (5.49)$$

де  $\bar{\sigma}_{ij} = \mu \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j}$ .

Введемо поняття: густина середнього імпульсу  $\bar{\rho} \cdot \bar{v}_i$ , густина пульсаційного імпульсу  $\bar{\rho}' v'$  та густина їх потоків  $\bar{\rho} \bar{v}_i \bar{v}_j, \bar{\rho} \cdot \overline{v'_i v'_j}$ . Тоді середнє значення густини потоку сумарного імпульсу представляється у вигляді суми перенесення середнього імпульсу осередненим рухом, середнього тиску, в'язких напружень і середнього перенесення пульсаційного імпульсу пульсаційним рухом. Останній чинник описує передачу імпульсу від одних об'ємів рідини до інших, яка викликається турбулентним перемішуванням. Знак "мінус" в  $\tau_{ij}$  необхідний для того, щоб для тензора загальної в'язкості стояла сума в'язких і турбулентних напружень. Таким чином виникають додаткові напруження, які характеризують турбулентний обмін.

Для фізичної інтерпретації додаткових членів, які з'являються в рівняннях Рейнольдса, уявимо собі довільний рухомий в турбулентному середовищі об'єм, що складається з набору елементарних об'ємів. Кожний елементарний об'єм рухається зі своєю миттєвою швидкістю. Середня швидкість довільного об'єму визначається середньозваженою швидкістю руху елементарних об'ємів в даний момент часу. Траєкторії руху цих об'ємів, які по суті є турбулентними вихорами, носять хаотичний характер і безперервно перетинають крайову поверхню вибраного довільного об'єму. У результаті, якщо розглянути два моменти часу, то набори турбулентних вихорів, створюючих вибраний довільний об'єм, будуть різними у вказані моменти часу. Отже, середні швидкості також будуть різними. Таким чином без зовнішніх впливів сталася зміна середньої швидкості з часом, причиною якої може бути додатковий приплив імпульсу, зумовлений турбулентним перемішуванням. Це і є фізичний механізм формування турбулентного припливу імпульсу. З іншого боку вказаний механізм можна трактувати як дію додаткових сил на крайовій поверхні виділеного об'єму - турбулентних напружень. Рівнодіюча цих сил є додатковою силою турбулентної в'язкості, необхідною для опису зміни

середньої швидкості рухомого повітряного об'єму. Таким чином у разі турбулентного потоку в порівнянні з ламінарним додався додатковий приплив імпульсу за рахунок турбулентних пульсацій, що і спричиняє зміну середньої швидкості.

Для зручності подальших викладень введемо поняття повної похідної за часом в турбулентному потоці

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \bar{v}_\alpha \frac{\partial f}{\partial x_\alpha} \quad (5.50)$$

$$\frac{D\bar{\rho v}_i}{Dt} = \bar{\rho v}_i \frac{\partial \bar{v}_\alpha}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial \tau_{i\alpha}}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \bar{\rho F}_i. \quad (5.51)$$

Тут  $\bar{F}_i$  сума сил Коріоліса, молекулярної в'язкості і тяжіння, діючих на одиницю маси. Ще раз підкреслимо, що  $\tau_{ij}$  - кількість руху  $i$ -го компонента пульсаційного імпульсу, яка переноситься  $j$ -тим компонентом пульсаційної швидкості через одиничний майданчик за одиницю часу.

Тензор турбулентних напружень складається з  $\tau_{ij}$  ( $i \neq j$ ) – дотичних напружень, які визначають деформацію зсуву,  $\tau_{ij}$  ( $i = j$ ) – нормальних напружень, визначаючих додатковий тиск

$$\tau_{ij} = \begin{vmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{vmatrix}. \quad (5.52)$$

Осереднюємо рівняння припливу тепла в адіабатичному наближенні

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (v_\alpha \theta) = \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left( \chi_\theta \frac{\partial \theta}{\partial x_\alpha} \right), \quad (5.53)$$

$$\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\bar{v}_\alpha \bar{\theta} + \overline{v'_\alpha \theta'}) = \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left( \chi_\theta \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_\alpha} \right). \quad (5.54)$$

Введемо величину турбулентного потоку тепла:

$$Q_i = c_p \cdot \bar{\rho} \cdot \overline{\theta' v'_i}. \quad (5.55)$$

Осереднюємо рівняння перенесення будь-якої домішки:

$$\frac{\partial \bar{q}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\bar{v}_\alpha \bar{q} + \overline{v'_\alpha q'}) = \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left( \chi_q \frac{\partial \bar{q}}{\partial x_\alpha} \right). \quad (5.56)$$

Тут  $\chi_\theta$  і  $\chi_q$  - коефіцієнти молекулярної провідності для температури і домішки а,  $E_i = \bar{\rho} \cdot \overline{q'v'_i}$  - турбулентний потік домішки в рідині.

Таким чином, записана система рівнянь гідротермодинаміки для турбулентної оберткової рідини, яка на відміну від системи для ламінарного потоку виявилась незамкненою. У системі для турбулентного середовища з'явилися нові невідомі функції просторових координат і часу - турбулентні напруження, потік тепла і домішки, зокрема, водяної пари або солі.

Оскільки додаткові невідомі функції представляють собою центральні моменти другого порядку, то при побудові еволюційних рівнянь для них природно скористатись загальним правилом побудови рівнянь для моментів. Продемонструємо його на другому центральному моменті  $\bar{\rho} \overline{v'_i v'_j}$ .

Спочатку отримаємо співвідношення для величин  $\frac{\partial}{\partial t} \rho v_i v_j$  з урахуванням виразу:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho v_i v_j = v_j \frac{\partial \rho v_i}{\partial t} + v_i \frac{\partial \rho v_j}{\partial t}. \quad (5.57)$$

Підставимо замість похідних за часом їх вирази з рівнянь Нав'є-Стокса і отримаємо

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho v_i v_j}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} [\rho v_i v_j v_\alpha + (p v_i \delta_{j\alpha} + p v_j \delta_{i\alpha}) - (v_j \sigma_{i\alpha} + v_i \sigma_{j\alpha})] = \\ = \rho v_i F_j + \rho v_j F_i + p \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) - \left( \sigma_{i\alpha} \frac{\partial v_i}{\partial x_\alpha} + \sigma_{j\alpha} \frac{\partial v_j}{\partial x_\alpha} \right). \end{aligned} \quad (5.58)$$

Аналогічно

$$\frac{\partial \bar{\rho} \bar{v}_i \bar{v}_j}{\partial t} = \bar{v}_i \frac{\partial \bar{\rho} \bar{v}_j}{\partial t} + \bar{v}_j \frac{\partial \bar{\rho} \bar{v}_i}{\partial t}.$$

Скористаємося рівняннями Рейнольдса і дістанемо

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\rho} \bar{v}_i \bar{v}_j}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left[ (\bar{\rho} \bar{v}_i \bar{v}_j \bar{v}_\alpha + \bar{\rho} \overline{v'_i v'_\alpha} \cdot \bar{v}_j + \bar{\rho} \overline{v'_j v'_\alpha} \cdot \bar{v}_i) + (\bar{p} \bar{v}_i \delta_{j\alpha} + \bar{p} \bar{v}_j \delta_{i\alpha}) - (\bar{\sigma}_{j\alpha} \bar{v}_i + \bar{\sigma}_{i\alpha} \bar{v}_j) \right] = \\ = (\bar{\rho} \bar{v}_i \bar{F}_j + \bar{\rho} \bar{v}_j \bar{F}_i) + \bar{p} \left( \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} \right) - \left( \bar{\sigma}_{i\alpha} \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_\alpha} + \bar{\sigma}_{j\alpha} \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_\alpha} \right) + \left( \overline{\rho v'_i v'_\alpha} \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_\alpha} + \overline{\rho v'_j v'_\alpha} \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_\alpha} \right) \end{aligned} \quad (5.59)$$

Тут

$$\bar{F}_i = 2\omega_j \bar{v}_k - 2\omega_k \bar{v}_j - g\delta_{i3}.$$



Нарешті, якщо з рівнянь Нав'є-Стокса відняти рівняння Рейнольдса, дістанемо рівняння руху для пульсацій швидкості

$$\frac{\partial \bar{\rho} v'_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left[ \bar{\rho} v'_i v'_\alpha + \bar{\rho} \bar{v}_\alpha v'_i + \rho v'_i v'_\alpha - \overline{\rho v'_i v'_\alpha} + p' \delta_{i\alpha} - \sigma'_{i\alpha} \right] = \bar{\rho} F'_i. \quad (5.60)$$

Тут використане співвідношення

$$\rho v_i - \bar{\rho} \bar{v}_i = \bar{\rho} \cdot v'_i + \rho' \cdot v'_i \approx \bar{\rho} \cdot v'_i, \quad (\rho' / \bar{\rho} \ll 1)$$

і введено позначення

$$F'_i = 2\omega_j v'_k - 2\omega_k v'_j - \rho' g \delta_{i3} / \bar{\rho}.$$

Далі з урахуванням рівняння нерозривності складемо комбінацію

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{\rho} v'_i v'_j = v'_j \frac{\partial \bar{\rho} v'_i}{\partial t} + v'_i \frac{\partial \bar{\rho} v'_j}{\partial t}.$$

Для отримання правої частини цієї рівності використаємо рівняння (5.60). Осереднюємо отриманий вираз:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \overline{\bar{\rho} v'_i v'_j}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left[ \overline{\bar{\rho} v'_i v'_j v'_\alpha} + \overline{\bar{\rho} v'_i v'_j \bar{v}_\alpha} + \left( \overline{p' v'_i \delta_{j\alpha}} + \overline{p' v'_j \delta_{i\alpha}} \right) - \left( \overline{\sigma'_{j\alpha} v'_i} + \overline{\sigma'_{i\alpha} v'_j} \right) \right] = \\ & = \left( \overline{\bar{\rho} v'_i F'_j} + \overline{\bar{\rho} v'_j F'_i} \right) + p' \left( \frac{\partial v'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v'_j}{\partial x_i} \right) - \left( \overline{\sigma'_{i\alpha} \frac{\partial v'_j}{\partial x_\alpha}} + \overline{\sigma'_{j\alpha} \frac{\partial v'_i}{\partial x_\alpha}} \right) + \left( \overline{\bar{\rho} v'_i v'_\alpha} \frac{\partial v'_j}{\partial x_\alpha} + \overline{\bar{\rho} v'_j v'_\alpha} \frac{\partial v'_i}{\partial x_\alpha} \right) \end{aligned} \quad (5.61)$$

Розпишемо вираз для роботи сили Кориоліса

$$\bar{v}_i (\omega_{j+1} \bar{v}_{j+2} - \omega_{j+2} \bar{v}_{j+1}) - \bar{v}_j (\omega_{i+1} \bar{v}_{i+2} - \omega_{i+2} \bar{v}_{i+1})$$

і пересвідчимося, що при  $i=j$  робота сили Кориоліса рівна нулю.

Рівняння для других моментів є еволюційними рівняннями, тобто вони пов'язують локальну похідну за часом від других моментів з просторовим розподілом комбінацій других моментів з іншими гідродинамічними характеристиками. Ці комбінації включають перенесення впорядкованим рухом, роботу сил --тиску, турбулентних і молекулярних напружень, роботу зовнішніх масових сил, перерозподіл

других моментів між їх компонентами за рахунок сил тиску і молекулярної в'язкості, перерозподіл других моментів для осередненого і пульсаційного рухів.

Відмітимо, що аналіз рівняння (5.61) показує, що вирішити тільки з його допомогою проблему замикання неможливо, оскільки воно крім середньої швидкості  $\bar{v}_i$  і напруження Рейнольдса  $\overline{\rho v'_i v'_j}$  містить ряд нових невідомих: треті центральні моменти  $\overline{\rho v'_i v'_j v'_\alpha}$ , другі моменти пульсацій швидкості і її просторових похідних, які входять у вираз  $\overline{v'_i \sigma'_{j\alpha}}$  і  $\sigma'_{j\alpha} \frac{\partial v'_i}{\partial x_\alpha}$ , взаємні другі моменти пульсацій швидкості і тиску виду  $\overline{p' v'_i}$ ,  $p' \frac{\partial v'_i}{\partial x_j}$ .

Таким чином, рівняння Рейнольдса і рівняння для турбулентних напружень знов не утворюють замкненої системи. Якщо спробувати доповнити цю систему рівнянь для третіх моментів  $\frac{\partial}{\partial t} (\overline{\rho v'_i v'_j v'_k})$ , то в ці рівняння увійдуть інші додаткові невідомі функції (наприклад, четверті центральні моменти  $\overline{\rho v'_i v'_j v'_k v'_m}$  і треті моменти типу  $\overline{p' v'_i v'_k}$  та ін.), і різниця між числом невідомих і числом рівнянь стане ще більше. Отже, складання рівнянь для вищих моментів не дозволяє отримати замкнену систему рівнянь, яка описує турбулентний рух.

Тому рівняння (5.58), (5.59) і (5.60) використовуються як проміжні при отриманні рівнянь для миттєвих, осереднених і турбулентних значень кінетичної енергії вигляду

$$E = \frac{1}{2} \rho v_\beta v_\beta, \quad E_s = \frac{1}{2} \bar{\rho} \bar{v}_\beta \bar{v}_\beta, \quad E_t = \frac{1}{2} \bar{\rho} \overline{v'_\beta v'_\beta} \quad (5.62)$$

(по  $\beta$  виконується підсумовування).

Випишемо рівняння балансу для вказаних видів кінетичної енергії:

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} [E v_\alpha + p v_\alpha - v_\beta \sigma_{\beta\alpha}] = \rho g v_\beta \delta_{\beta 3} - \rho \varepsilon, \quad (5.63)$$

$$\rho \varepsilon = \frac{\mu}{2} \cdot \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)^2$$

$$\frac{\partial E_s}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} [E_s \bar{v}_\alpha + \overline{\rho v'_\alpha v'_\beta} \bar{v}_\beta + \bar{p} \bar{v}_\alpha - \bar{v}_\beta \bar{\sigma}_{\alpha\beta}] = -\bar{\rho} \bar{v}_\alpha g \delta_{\alpha 3} + \overline{\rho v'_\alpha v'_\beta} \frac{\partial \bar{v}_\beta}{\partial x_\alpha} - \bar{\rho} \varepsilon_s, \quad (5.64)$$

$$\bar{\rho} \varepsilon_s = \frac{\mu}{2} \cdot \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \left( \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} \right)^2$$

$$\frac{\partial E_t}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left[ E_t \bar{v}_\alpha + \frac{1}{2} \overline{\rho v'_\alpha v'_\beta v'_\beta} + \overline{p' v'_\alpha} - \overline{v'_\beta \sigma'_{\alpha\beta}} \right] = -\overline{\rho'_\alpha v'_\alpha} g \delta_{\alpha 3} - \overline{\rho v'_\alpha v'_\beta} \frac{\partial \bar{v}_\beta}{\partial x_\alpha} - \bar{\rho} \varepsilon_t \quad (5.65)$$

$$\bar{\rho} \varepsilon_t = \frac{\mu}{2} \cdot \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \overline{\left( \frac{\partial v'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v'_j}{\partial x_i} \right)^2}$$

В рівняння балансу входять основні енергетичні фактори: перенесення енергії (1), робота сили тиску (2), робота сил молекулярної в'язкості (3), робота сили тяжіння (4) і дисипація кінетичної енергії в тепло (5), робота сил турбулентних напружень (6), перерозподіл осередненої і турбулентної кінетичної енергії (7).

Спробуємо підійти до проблеми замикання шляхом використання рівнянь балансу. Природно у цьому випадку нас буде цікавити рівняння для кінетичної енергії турбулентних вихорів. Проаналізуємо члени (6) і (7) в цьому рівнянні. Член (6) можна представити у вигляді  $\overline{v'_i E'_i}$  і відповідно інтерпретувати як осереднене перенесення турбулентної кінетичної енергії самими турбулентними вихорами. Член (7) виражає взаємний перехід кінетичної енергії осередненого руху в енергію турбулентних вихорів. Цей висновок виходить із зіставлення рівнянь балансу для вказаних двох видів енергії, в яких фігурують члени (7), але з протилежними знаками.

Повне урахування стисливості (без обмеження про відсутність кореляції між  $\rho$  и  $v_i$ ) вносить істотні зміни в рівняння руху і енергії. По-перше, середня густина імпульсу одиниці об'єму виявляється рівною  $\overline{\rho v_i} = \bar{\rho} \cdot \bar{v}_i + \overline{\rho' \cdot v'_i}$ , де  $\bar{\rho} \cdot \bar{v}_i$  - імпульс осередненого руху, а  $\overline{\rho' \cdot v'_i}$  - імпульс пульсаційного руху. Тоді осереднена величина кінетичної енергії одиниці об'єму  $\bar{E} = \frac{1}{2} \overline{\rho v_\beta v_\beta}$  дорівнює

$$\begin{aligned} \bar{E} &= E_s + E_{st} + E_{t1} + E_{t2} \\ (E_s &= \frac{1}{2} \bar{\rho} \bar{v}_\beta \bar{v}_\beta, E_{st} = \frac{1}{2} \overline{\rho v'_\beta \bar{v}_\beta} = \frac{1}{2} \overline{\rho' v'_\beta \bar{v}_\beta}, E_{t1} = \frac{1}{2} \overline{\rho v'_\beta v'_\beta}, E_{t2} = \frac{1}{2} \overline{\rho' v'_\beta v'_\beta} \quad (5.66) \\ E_{t1} + E_{t2} &= E_{tc}) \end{aligned}$$

При виведенні рівнянь для всіх видів кінетичної енергії скористаємось найбільш повними рівняннями руху

$$\frac{\partial \rho v_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} [\rho v_i v_\alpha + p \delta_{i\alpha} - \sigma_{i\alpha}] = \rho F_i, \quad (5.67)$$

де  $F_i$  - сума всіх масових сил. Осереднюючи рівняння нерозривності і руху, отримаємо

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\bar{\rho} \bar{v}_\alpha + \overline{\rho' v'_\alpha}) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} \bar{v}_i + \overline{\rho' v'_i}) + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\bar{\rho} \bar{v}_i \bar{v}_\alpha + \overline{\rho' v'_\alpha \cdot \bar{v}_i} + \overline{\rho' v'_i \cdot \bar{v}_\alpha} + \overline{\rho v'_\alpha v'_\alpha} + \overline{\rho v'_\alpha v'_i} + \overline{p \delta_{i\alpha}} - \bar{\sigma}_{i\alpha}) &= \\ = \bar{\rho} \bar{F}_i + \overline{\rho' F'_i}. \end{aligned} \quad (5.68)$$

Дістанемо рівняння для  $\frac{\partial \bar{\rho} v_i}{\partial t}$  із рівняння Нав'є-Стокса і осередненого рівняння нерозривності, осереднимо його і віднімемо з рівняння для  $\frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} \bar{v}_i + \overline{\rho' v'_i})$ .

Тоді

$$\frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} \bar{v}_i) + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\bar{\rho} \bar{v}_i \bar{v}_\alpha + \overline{\rho' v'_i v'_\alpha} + \overline{p \delta_{i\alpha}} - \bar{\sigma}_{i\alpha}) = \bar{\rho} \bar{F}_i + \varphi_i \quad (5.69)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\overline{\rho' v'_i}) + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\overline{\rho' v'_\alpha \cdot \bar{v}_i} + \overline{\rho' v'_i \cdot \bar{v}_\alpha} + \overline{\rho' v'_i v'_\alpha}) = \overline{\rho' F'_i} - \varphi_i \quad (5.70)$$

$$\varphi_i = \overline{v'_i \cdot \frac{\partial \bar{\rho} v'_\alpha}{\partial x_\alpha}} - \overline{v'_i \cdot \frac{\partial \rho' v'_\alpha}{\partial x_\alpha}} + \left( \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} - \bar{\rho} \cdot \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} \right) - \left( \frac{\partial \bar{\sigma}_{i\alpha}}{\partial x_\alpha} - \bar{\rho} \cdot \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_{i\alpha}}{\partial x_\alpha} \right) \quad (5.71)$$

Тут  $\varphi_i$  описують обмін імпульсом між осередненим і пульсаційним рухами. Рівняння для трьох видів кінетичної енергії наберуть вигляду

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_s}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left[ E_s \bar{v}_\alpha + \frac{1}{2} \overline{\rho v'_\alpha v'_\beta v'_\beta} + \overline{p v_\alpha} - \overline{v_\beta \sigma_{\alpha\beta}} \right] &= \overline{\rho v_\alpha F_\alpha} - \bar{\rho} \varepsilon_s + \bar{p} \frac{\partial \bar{v}_\alpha}{\partial x_\alpha} + \\ + \left( \overline{v_\alpha \bar{\varphi}_\alpha} + \frac{1}{2} \overline{v_\beta v_\beta} \frac{\partial \overline{\rho' v'_\alpha}}{\partial x_\alpha} + \overline{\rho v'_\alpha v'_\beta} \frac{\partial \bar{v}_\beta}{\partial x_\alpha} \right), \end{aligned} \quad (5.72)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_{ic}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left[ E_{ic} \bar{v}_\alpha + \frac{1}{2} \overline{\rho v'_\alpha v'_\beta v'_\beta} + \overline{p' v'_\alpha} - \overline{v'_\beta \sigma'_{\alpha\beta}} \right] &= \overline{\rho v'_\alpha F_\alpha} + \overline{\rho v'_\alpha F'_\alpha} - \bar{\rho} \varepsilon_i + \\ \overline{\rho' \frac{\partial v'_\alpha}{\partial x_\alpha}} - \overline{\rho v'_\alpha} \frac{D v_\alpha}{Dt} - \overline{\rho v'_\alpha v'_\beta} \frac{\partial \bar{v}_\beta}{\partial x_\alpha}, \end{aligned} \quad (5.73)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_{st}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left[ E_{st} \bar{v}_\alpha + \overline{\rho' v'_\alpha v'_\beta \cdot \bar{v}_\beta} + \frac{1}{2} \overline{\rho v'_\alpha \cdot \bar{v}_\beta v_\beta} \right] &= \overline{v_\alpha \rho' F'_\alpha} - \\ - \left[ \overline{v_\alpha \bar{\varphi}_\alpha} + \frac{1}{2} \overline{v_\beta v_\beta} \frac{\partial \overline{\rho v'_\alpha}}{\partial x_\alpha} \right] + \left[ \overline{\rho v'_\alpha} \frac{D v_\alpha}{Dt} + \overline{\rho' v'_\alpha v'_\beta} \frac{\partial \bar{v}_\beta}{\partial x_\alpha} \right]. \end{aligned} \quad (5.74)$$

Звернемо увагу на велику кількість нових членів. Обмін кінетичною енергією турбулентних вихорів здійснюється між  $Est$  і  $Es$ ;  $Etc$  і  $Est$ , тобто

виникла додаткова гілка обміну енергією. Найважливіша відмінність загального рівняння для  $E_t$  полягає в появі доданку

$$B = \overline{\rho v'_\alpha} \left( g \delta_{i3} + \frac{D \bar{v}_\alpha}{Dt} \right) \quad \text{оскільки} \quad \bar{F}_\alpha = -g \delta_{\alpha 3} \quad (5.75)$$

Перший член доданку в дужках фігурує у всіх енергетичних рівняннях, а другий - з'являється тільки для стисливої рідини. Оскільки  $g \gg \frac{D \bar{v}_\alpha}{Dt}$ , то

$$B = -\overline{\rho v'_3} \cdot g \quad (5.76)$$

На закінчення зіставимо співвідношення для  $E_t$  і  $E_{tc}$ :

$$E_{tc} = \frac{1}{2} \left[ \overline{(\bar{\rho} + \rho') \cdot v'_\alpha v'_\alpha} \right] = \frac{1}{2} \bar{\rho} \left( 1 + \frac{\rho'}{\bar{\rho}} \right) \cdot \overline{v'_\alpha v'_\alpha}, \quad (5.77)$$

$$E_t = \frac{1}{2} \overline{\rho v'_\alpha v'_\alpha}$$

Тому що  $\frac{\rho'}{\bar{\rho}} \ll 1$ , то  $E_{tc} \approx E_t$ .

Таким чином, рівняння для  $E_t$  з високим ступенем точності апроксимує рівняння для  $E_{tc}$ . Як що ввести інтенсивність турбулентності  $b = E_t / \bar{\rho}$  і підставити у вираз для  $E_t$ , то дістанемо

$$\frac{Db}{Dt} = -\overline{v'_\alpha v'_\beta} \frac{\partial \bar{v}_\beta}{\partial x_\alpha} - \varepsilon_t + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left[ -\frac{1}{2} \overline{v'_\alpha v'_\beta v'_\beta} - \frac{\overline{p' v'_\alpha}}{\bar{\rho}} + \frac{\overline{v'_\beta \sigma'_{\alpha\beta}}}{\bar{\rho}} \right] - \frac{g}{\bar{\rho}} \overline{v'_\alpha \rho'} \cdot \delta_{\alpha 3} \quad (5.78)$$

Зміна з часом інтенсивності турбулентності одиниці маси, яка рухається з швидкістю осередненого руху  $\bar{v}_i$  визначається взаємним переходом кінетичної енергії середнього руху в кінетичну енергію турбулентних вихорів, дисипацією турбулентної кінетичної енергії (ТКЕ), переносом пульсаційним рухом ТКЕ, роботою пульсацій сил тиску, в'язкості і плавучості.

Експериментальні дані показують, що величина

$$-\frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left[ \frac{\overline{p' v'_\alpha}}{\bar{\rho}} + \frac{\overline{v'_\beta \sigma'_{\alpha\beta}}}{\bar{\rho}} \right] \cong -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left[ \overline{p' v'_\alpha} + \overline{v'_\beta \sigma'_{\alpha\beta}} \right] \quad (5.79)$$

мала в порівнянні з переносом пульсаційним рухом  $\frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \overline{v'_\alpha v'_\beta v'_\beta} \right)$ .

Звідси:

$$\frac{Db}{Dt} = -\overline{v'_\alpha v'_\beta} \frac{\partial \bar{v}_\beta}{\partial x_\alpha} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \overline{v'_\alpha v'_\beta v'_\beta} - \frac{g}{\rho} \overline{v'_\alpha \rho'} \cdot \delta_{\alpha 3} - \varepsilon_t. \quad (5.80)$$

Як буде показано далі, це рівняння широко використовується в проблемі замикання.

### 5.5 "К-теорія" турбулентності і проблеми замикання

Теорія замикання рівнянь гідротермодинаміки турбулентного потоку заснована на аналізі фізичного механізму його формування. В ній узагальнені фізичні міркування і експериментальні дані, згідно з якими параметри турбулентного потоку повинні бути пов'язані з характеристиками просторової неоднорідності осередненого руху.

Розглянемо два можливих випадки генерації і згасання турбулентних вихорів. У першому випадку джерелом турбулентної енергії є осереднений потік і величина

$$A = -\overline{v'_\alpha v'_\beta} \frac{\partial \bar{v}_\beta}{\partial x_\alpha} > 0 \quad (5.81)$$

Дійсно в цьому випадку в рівнянні балансу кінетичної енергії для осередненого руху величина  $A$  входить зі знаком "мінус" і кінетична енергія середнього руху зменшується. Другий варіант  $A < 0$ . Тоді енергія турбулентних вихорів передається осередненому руху.

Розглянемо випадок, коли середній рух "живить" турбулентні вихори. Якщо осереднений рух рідини має характер руху твердого тіла (тобто не супроводжується ніякими деформаціями рідких частинок), то рейнольдсові напруження, діючі на будь-який виділений об'єм рідини, направлені по нормалі до стінок виділеного об'єму. Це означає, що тензор  $\overline{\rho v'_i v'_j}$  є ізотропним, тобто  $\overline{\rho v'_i v'_j} = c \delta_{ij}$ , де

$$c = \frac{1}{3} \overline{\rho v'_\alpha v'_\alpha} = \frac{2}{3} \bar{\rho} b \quad (5.82)$$

Отже, турбулентна енергія  $E_t$  в певному значенні аналогічна тиску.

Якщо ж в осередненому русі має місце переміщення частинок відносно одна одної, то напруження  $\tau_{ij} = -\overline{\rho v'_i v'_j}$  повинні залежати від похідних середньої швидкості по координатах.

Дійсно, якщо частинка повітря зберігає середню швидкість первинного положення, звідки вона прийшла, то в кінцевій точці траєкторії пульсації виникають лише в тому випадку, якщо в ній середня швидкість відмінна від швидкості в початковій точці. Отже, спостерігається просторова неоднорідність параметрів осередненого руху. В першому наближенні будемо урахувувати лише перші похідні середньої швидкості як кількості оцінки просторової неоднорідності і вважати зв'язок  $\tau_{ij}$  з  $\partial \bar{v}_i / \partial x_j$  лінійним. Оскільки напруження  $\tau_{ij} = -\overline{\rho v'_i v'_j}$  - симетричний тензор, то їх залежність від просторових похідних також повинна носити тензорний характер. Величини  $\tau_{ij}$  повинні залежати від  $\Phi = \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_i} + \frac{\partial v_j}{\partial x_j} \right)$ . При цьому внаслідок ефекту додаткового тиску при  $i=j$  тензор  $\tau_{ij}$  представляється у вигляді:

$$\tau_{ij} = -\overline{\rho v'_i v'_j} = -\frac{2}{3} \overline{\rho} b \delta_{ij} + \frac{1}{2} \overline{\rho} (K_{i\alpha} \Phi_{j\alpha} + K_{j\alpha} \Phi_{i\alpha}) \quad (5.83)$$

Неважно переконатись, що лише виписана комбінація правої частини відповідає умові симетричності тензора. Тут  $K_{ij}$  відіграють роль коефіцієнтів турбулентної в'язкості. Якщо скористатись аналогією з молекулярною в'язкістю, згідно з якою коефіцієнти молекулярної в'язкості визначаються довжиною вільного пробігу молекул і їх швидкістю, то для турбулентного потоку отримаємо

$$K_{ij} = l_{ij} \sqrt{b}, \quad (5.84)$$

$l_{ij}$  - тензор масштабів, що характеризує відстані, які можуть проходити вихори в різних напрямках, зберігаючи свою індивідуальність, а  $\sqrt{b}$  - середньоквадратична швидкість турбулентних вихорів. Наприклад,  $lxz$  представляє шлях, пройдений вихором в напрямку  $z$  при перенесенні  $x$ -складової кількості руху за рахунок вертикального турбулентного перемішування. Для скалярних величин використовується лише три значення  $lx$ ,  $ly$ ,  $lz$ . Формулу (5.4) можна розглядати як введення нових невідомих величин  $lij$  замість  $Kij$ .

Для скалярних величин (потік тепла, водяної пари, солі і інших домішок)

$$\overline{\rho \theta' v'_i} = -\overline{\rho} K_i^{(0)} \frac{\partial \overline{\theta}}{\partial x_i} \quad (5.85)$$

вводяться іще невідомі  $K_i^{(0)}$  - коефіцієнти турбулентної дифузії.

Нарешті застосуємо "К-теорію" до третіх моментів

$$\frac{1}{2} \overline{\rho v'_\beta v'_\beta v'_i} = \frac{1}{2} \overline{\rho b' v'_i} = -K_i^{(b)} \overline{\rho} \frac{\partial b}{\partial x_i}. \quad (5.86)$$

Тепер введемо цілий ряд досить обгрунтованих допущень і обмежень. Їх обгрунтованість виходить, передусім, з того факту, що вони не порушують основних висновків, які випливають, з механізму формування турбулентного потоку. Нагадаємо, що ми будемо розглядати течії, де осереднений потік передає свою енергію турбулентним вихорам, тобто  $A > 0$ .

Підставивши вираз для  $\tau_{ij}$  в (5.41), отримаємо

$$A = \frac{1}{2} \overline{\rho} \sum_{\alpha, \beta=1}^3 K_{\alpha\beta} \cdot \Phi_{\alpha\beta}^2 \quad (5.87)$$

При  $A > 0$ ,  $K_{\alpha\beta} > 0$  - явище додатної турбулентної в'язкості. При  $A < 0$ ,  $K_{\alpha\beta} < 0$  - явище від'ємної турбулентної в'язкості. Ми будемо розглядати лише течії, де  $K_{\alpha\beta} > 0$ .

Тепер, виходячи з фізичних міркувань, введемо ряд допущень. По-перше, в матриці  $l_{ij}$  збережемо лише діагональні члени  $l_{11}$ ,  $l_{22}$ ,  $l_{33}$ , а інші прирівняємо до нуля.

При цьому через ізотропність турбулентності в горизонтальній площині  $l_{11} = l_{22} = l_s$ . Позначимо  $l_{33} = l_z$ . Тоді  $K_{ij} = 0$  при  $i \neq j$ , а величини  $K_{11} = K_{22} = K_s$ ,  $K_{33} = K_z$ . Внаслідок прийнятих допущень залишаються лише дві невідомі величини  $K_s$  і  $K_z$ . По суті, це коефіцієнти турбулентного обміну в горизонтальній і вертикальній площинах, які підлягають визначенню поряд з інтенсивністю турбулентності. Для кінетичної енергії турбулентних вихорів ми вже отримали рівняння, отже, необхідно визначити  $l_s$  і  $l_z$ . Цілком очевидно, що, якщо вихор даного масштабу зберігає свою індивідуальність на відстані, яка дорівнює  $l_s$  і  $l_z$ , то ці величини можна трактувати як розміри областей пульсації одного знаку в горизонтальній і вертикальній площинах. При цьому, збільшуючи масштаб осереднення, ми всі великі вихори включаємо в спектр турбулентних. У вертикальній площині при цьому для кожного рівня існує граничне значення характерного масштабу - відстань до підстилаючої поверхні. Отримана величина  $l_z$  при збільшенні масштабу осереднення до



величин, більших відстаней до поверхні, вже не змінюється і тому є об'єктивною характеристикою, яка не залежить від способу описи турбулентності. Для горизонтального масштабу такого обмеження немає, Тому  $l_z$  доцільно визначати тільки в залежності від фізичних факторів, а у виразі для  $l_s$  поряд з фізичними факторами повинен фігурувати крок сітки. Для описання  $l_s$ , як правило, використовується теорія подібності. Визначення  $l_z$  здійснюється за допомогою побудови рівняння для кореляційної функції пульсацій швидкості. Отримане рівняння записується для спектральної функції і зводиться до рівняння переносу для добутку  $b \cdot l_z$ , а потім до рівняння для характерного розміру вихорів у вертикальній площині  $l_z$ . Для зручності позначимо  $l = l_z$ . Рівняння для  $l$  має вигляд:

$$\begin{aligned} \frac{\partial l}{\partial t} + u \frac{\partial l}{\partial x} + v \frac{\partial l}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial l}{\partial z} &= \alpha_1 \frac{\partial}{\partial z} K_z \frac{\partial l}{\partial z} - dl + f \\ \bar{w} &= w - \alpha_2 \frac{K_z}{b} \cdot \frac{\partial b}{\partial z}; \quad f = \alpha_4 \sqrt{b} + \alpha_5 \frac{1}{b} \frac{\partial}{\partial z} K_z \frac{\partial b}{\partial z}, \\ d &= \alpha_3 K_z \left[ \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \right)^2 \right] / b \end{aligned} \quad (5.88)$$

Це рівняння записане за умови урахування лише вертикального турбулентного обміну.

Як було показано при розгляді закономірностей розвиненої турбулентності, до якої відноситься горизонтальна турбулентність, що розглядається, горизонтальний коефіцієнт турбулентності пропорційний перепаду швидкостей і характерному розміру вихорів. Перепад швидкостей осереденого руху виражається через параметр горизонтальної неоднорідності, в якості якого використовується модуль деформації середньої швидкості. Характерний просторовий масштаб вихорів приймається пропорційним кроку горизонтальної сітки. Із висловлених міркувань виходить співвідношення для коефіцієнта горизонтального турбулентного обміну.

$$K_s = \alpha_s (\delta x^2 + \delta y^2) (D_T^2 + D_s^2)^{1/2}, \quad (5.89)$$

$$D_T = \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} - \frac{\partial \bar{v}}{\partial y}; D_s = \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}, \quad (5.90)$$

де  $D_T$  і  $D_s$  - поздовжня і поперечна деформації, зумовлені дотичними турбулентними напруженнями.

Тепер залишається перетворити рівняння балансу кінетичної енергії в рамках "К-теорії" (із  $K_s$  і  $K_z$ ).

Як було показано при малих  $\rho'$ :

$$\frac{\rho'}{\bar{\rho}} = -\frac{\theta'}{\bar{\theta}} \quad (5.91)$$

Тоді, розділивши (5.37) на  $\bar{\rho}$ , отримаємо

$$B = -\overline{\rho'w'} \frac{g}{\bar{\rho}}. \quad (5.92)$$

Скориставшись К-теорією для турбулентного потоку маси, дістанемо

$$\overline{\rho'w'} = -K_p \frac{\partial \rho_n}{\partial z}, \text{ де } \rho_n - \text{потенціальна густина.}$$

При цьому вважаємо  $K_p = \alpha_p K_z$

Із спрощеного рівняння для  $Db/Dt$  витікає

$$\begin{aligned} \frac{Db}{Dt} = & K_z \cdot \left[ \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \right)^2 \right] + K_s (D_T^2 + D_s^2) + \frac{g}{\bar{\rho}} \alpha_p K_z \frac{\partial \rho_n}{\partial z} + \\ & + \frac{\partial}{\partial x} K_s \frac{\partial b}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} K_s \frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} K_z \frac{\partial b}{\partial z} - \varepsilon_t \end{aligned} \quad (5.93)$$

Перший член рівняння (5.93) описує передачу енергії від середнього руху турбулентним вихорам за рахунок втрати стійкості зсувних хвиль і утворення турбулентних збурень з характерним масштабом  $l$ . Другий член - розтягнення турбулентного вихору в формі еліпсоїда, зумовлене деформацією швидкості і утворення нових еліпсоїдів меншого розміру. За рахунок вертикального перемішування спостерігається однонаправлений потік кінетичної енергії від середнього до пульсаційного руху. Крупномасштабний рух енергетично підтримує турбулентні вихори. Обмін енергією при горизонтальному турбулентному перемішуванні може йти в двох напрямках: 1)  $K_S > 0$  (від середнього руху до вихорів), 2)  $K_S < 0$  (від вихорів до середнього). Останнє, наприклад, спостерігається в явищах загальної циркуляції атмосфери, коли циклони і антициклони енергетично підтримують зональний потік. Третій член - робота сили плавучості:  $\partial \rho_n / \partial z > 0$  (нестійка стратифікація, джерело енергії вихорів),  $\partial \rho_n / \partial z < 0$  (стійка стратифікація, затрати кінетичної енергії вихорів, стік енергії вихорів). Четвертий член - обмін кінетичної енергії вихорів з навколишньою повітряною масою за рахунок їх горизонтального перемішування. П'ятий член - обмін кінетичної енергії між шарами по вертикалі за рахунок вертикального турбулентного обміну. Шостий член - дисипація кінетичної енергії турбулентних вихорів в тепло. Для величини  $\varepsilon_t$  необхідно побудувати спеціальне рівняння.

На відміну від процедури побудови рівняння для  $l$ , де необхідно залучити апарат кореляційних функцій, рівняння для  $\varepsilon_t$  будується

аналогічно рівнянню балансу кінетичної енергії на основі рівнянь Нов'є-Стокса і Рейнольдса (будується рівняння руху для пульсацій швидкості і з комбінації їх просторових похідних конструюється величина  $\varepsilon_t \equiv \varepsilon$ ):

$$\varepsilon = \frac{\mu}{2} \cdot \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \overline{\left( \frac{\partial v'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v'_j}{\partial x_i} \right)^2}, \quad (5.94)$$

$$\frac{D\varepsilon}{Dt} = -c_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{b} \left( -\overline{v'_\alpha v'_\beta} \frac{\partial \bar{v}_\beta}{\partial x_\alpha} + c_d \frac{g}{\rho} \overline{v'_\alpha \rho'} \cdot \delta_{\alpha 3} \right) + c_\varepsilon \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left( -\frac{b}{\varepsilon} \overline{v'_\alpha v'_\beta} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_\beta} \right) + c_{\varepsilon 3} \frac{\varepsilon^2}{b} \quad (5.95)$$

Після введення співвідношень "К-теорії" для других моментів отримаємо

$$\begin{aligned} \frac{D\varepsilon}{Dt} = \frac{\varepsilon}{b} \left\{ \alpha_1 K_z \left[ \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \right)^2 \right] + \alpha_2 K_s (D_r^2 + D_s^2) - \alpha_3 \frac{g}{\rho} K_z \frac{\partial \bar{\rho}_n}{\partial z} - \alpha_4 \varepsilon \right\} + \\ + \alpha_5 \frac{\partial}{\partial z} K_z \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} + \alpha_6 \left( \frac{\partial}{\partial x} K_s \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} K_s \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (5.96)$$

Тут і далі  $\alpha$  і  $c$  з індексами експериментально визначені константи.

Отже, ми отримали рівняння для  $b$ ,  $l$  і  $\varepsilon$ . Величину  $K_s$  ми вже визначили, залишається визначити  $K_z$ . Із співвідношення Колмогорова визначальними для турбулентного потоку є лише два параметри, за допомогою яких на основі теорії розмірності і подібності визначається третій. Як визначальні параметри виберемо  $b$  і  $\varepsilon$ . Тоді

$$K_z = \alpha_\varepsilon b^2 / \varepsilon \quad (5.97)$$

Запишемо рівняння гідротермодинаміки з використанням співвідношень "К-теорії".

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} - 2(\omega_y \bar{w} - \omega_z \bar{v}) + \\ + \frac{\partial}{\partial x} v \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} v \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} v \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} - \frac{2}{3} \frac{\partial b}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} (K_s D_T) + \frac{\partial}{\partial y} (K_s D_s) + \frac{\partial}{\partial z} K_z \frac{\partial \bar{u}}{\partial z}, \end{aligned} \quad (5.98)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} - 2(\omega_z \bar{u} - \omega_x \bar{w}) + \\ + \frac{\partial}{\partial x} v \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} v \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} v \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} - \frac{2}{3} \frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} (K_s D_s) - \frac{\partial}{\partial y} (K_s D_T) + \frac{\partial}{\partial z} K_z \frac{\partial \bar{v}}{\partial z}, \end{aligned} \quad (5.99)$$

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial z} = -\bar{\rho} g \quad (5.100)$$

$$\bar{\rho} = \bar{\rho}(\bar{T}, \bar{p}, \bar{q}), \quad (5.101)$$

$$\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} = \alpha_0 \frac{\partial}{\partial z} K_z \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} K_s \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} K_s \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \chi_0 \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \chi_0 \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \chi_0 \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} \right) + \frac{\varepsilon_0}{\rho c_p}, \quad (5.102)$$

$$\frac{\partial \bar{q}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{q}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{q}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{q}}{\partial z} = \alpha_q \frac{\partial}{\partial z} K_z \frac{\partial \bar{q}}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} K_s \frac{\partial \bar{q}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} K_s \frac{\partial \bar{q}}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \chi_q \frac{\partial \bar{q}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \chi_q \frac{\partial \bar{q}}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \chi_q \frac{\partial \bar{q}}{\partial z} \right) + \frac{\varepsilon_q}{\rho}, \quad (5.103)$$

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \bar{\rho} \bar{u} + \frac{\partial}{\partial y} \bar{\rho} \bar{v} + \frac{\partial}{\partial z} \bar{\rho} \bar{w} = 0, \quad (5.104)$$

$$\frac{D\bar{b}}{Dt} = K_z \cdot \left[ \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \right)^2 \right] + K_s (D_T^2 + D_s^2) + \frac{g}{\rho} \alpha_T K_z \frac{\partial \bar{\rho}_n}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} K_s \frac{\partial \bar{b}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} K_s \frac{\partial \bar{b}}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} K_z \frac{\partial \bar{b}}{\partial z} - \varepsilon, \quad (5.105)$$

$$\frac{D\varepsilon}{Dt} = \frac{\varepsilon}{b} \left\{ \alpha_1 K_z \left[ \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \right)^2 \right] + \alpha_2 K_s (D_T^2 + D_s^2) + \alpha_3 \frac{g}{\rho} K_z \frac{\partial \bar{\rho}_n}{\partial z} - \alpha_4 \varepsilon \right\} + \alpha_5 \frac{\partial}{\partial z} K_z \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} + \alpha_6 \left( \frac{\partial}{\partial x} K_s \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} K_s \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \right), \quad (5.106)$$

$$K_z = \alpha_\varepsilon b^2 / \varepsilon, \quad \frac{\partial \bar{\rho}_n}{\partial z} = \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial z} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z}. \quad (5.107)$$

Тут  $\varepsilon_0$  - неадіабатичний приплив тепла,  $\varepsilon_q$  - приплив домішки за рахунок зовнішніх впливів,  $c$  - швидкість звуку.

Ця система замкнена і має єдиний розв'язок. Конкретні частинні розв'язки цієї системи диференціальних рівнянь можуть бути отримані після постановки крайових і початкових умов для кожної прикладної задачі.

## 5.6 Контрольні запитання

1. Чим відрізняється турбулентна течія від ламінарної?
2. Що означає термін «турбулентна дифузія»?
3. Фізичний сенс числа Рейнольдса.
4. Як впливає на випадково виникаючи в потоці дрібні неоднорідності полів швидкості сила молекулярної в'язкості?
5. Що представляє собою вираз  $f = \bar{f} + f'$  за методикою Рейнольдса?
6. Які рівняння використовуються для опису турбулентних рухів?
7. У чому полягає сенс застосування К-теорії турбулентності?

8. Охарактеризуйте основні положення К–теорії турбулентності?
9. Яка величина характеризує інтенсивність обміну різними субстанціями за рахунок перенесення їх турбулентними вихорами?
10. Фізичний сенс виразу, що входить у рівняння припливу тепла,  $\overline{\theta'v'}$ .
11. Для стратифікованої рідини як критерій розвитку турбулентності в течії використовується число Рейнольдса чи число Річардсона?
12. Що означає термін «дисипація»?
13. Як впливає дисипація на турбулентність?
14. Для вихорів якого масштабу процес дисипації є максимальним?
15. Визначення граничного шару атмосфери. ([1], стор. 236)
16. Чим обумовлено виникнення граничного шару в атмосфері?
17. Що таке шорсткість? Від характеристик підстильної поверхні, атмосфери вона залежить?
18. Фізичні механізми виникнення граничного шару. ([1], стор. 237)
19. Як впливає збільшення (зменшення) геострофічного вітру на висоту граничного шару? ([1], стор. 238)
20. Як впливає збільшення (зменшення) бароклінності (горизонтальних градієнтів температури) на висоту граничного шару? ([1], стор. 238)
21. Як впливає збільшення (зменшення) параметру шорсткості на висоту граничного шару? ([1], стор. 238)
22. Як впливає термічна стратифікація на висоту граничного шару? ([1], стор. 238)
23. Які фактори сприяють розвитку турбулентності? ([1], стор. 239)
24. При якій стратифікації турбулентне перемішування буде більш інтенсивним?

## ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ

1. Белинский В. А. Динамическая метеорология. ОГИЗ, Гостехиздат, 1948. 704 с.
2. Ветлов И. П., Петренко Н. В. Осадки холодных фронтов в центральной части европейской территории СССР в теплое время года. Ленинград: Гидрометеиздат, 1955. 64 с.
3. Основы динамической метеорологии / Гандин Л. С., Лайхтман Д. Л., Матвеев Л. Т., Юдин М. И.; под ред. Лайхтмана Д. Л., Юдина М. И. Ленинград: Гидрометеиздат, 1955. 642 с.
4. Динамическая метеорология : учебное пособие / под ред. Д.Л. Лайхтмана. Ленинград : Гидрометеиздат, 1976. 608 с.
5. Задачник по динамической метеорологии / под ред. Д. Л. Лайхтмана, Л. С. Гандина. Ленинград : Гидрометеиздат, 1967. 216 с.
6. Метеорологія і кліматологія : підручник / за ред. С.М. Степаненка. Одеса : ТЕС, 2008. 534 с.
7. Педлоски Дж. Геофизическая гидродинамика. В 2-х т. Москва: Мир, 1984. 398 с. (т.1), 416 с. (т.2).
8. Гарнопольський А. Г. Фізика граничного шару атмосфери. Одеса, 2001. 155 с.
9. Хоменко Г. В., Бондаренко В. М. Хвильові процеси в атмосфері. Одеса : Екологія, 2012. 104 с.
10. Хоменко Г. В., Хохлов В. М. Гідродинамічні методи прогнозу погоди : підручник. Одеса: Екологія, 2008. 344 с.
11. Шакина Н. П. Динамическая метеорология. Москва : ТРИАДА ЛТД, 2013. 160 с.
12. Шакина Н. П. Динамика атмосферных фронтов и циклонов. Ленинград : Гидрометеиздат, 1985. 262 с.
13. Шакина Н. П. Гидродинамическая неустойчивость в атмосфере. Ленинград : Гидрометеиздат, 1990. 308 с.
14. Carlson T. N. Midlatitude weather systems. London: HarperCollins Academic, 1991. 507 с.
15. Holton J. An Introduction to Dynamic Meteorology. Volume 88. 4th Edition. Academic Press, 2004. 535 p.
16. Kuo H.-L. Dynamic instability of two-dimensional non-divergent flow in a barotropic atmosphere // J. Meteorol. 1949. Vol. 6(2). Pp. 105–295.
17. Kuo H.-L. Dynamics of quasigeostrophic flows and instability theory // Adv. Appl. Mech. 1973. Vol. 13. Pp. 248–329.
18. Pedlosky J. The stability of currents in the atmosphere and ocean: Part 1 // J. Atmos. Sci. 1964. Vol. 21(2). Pp. 201–219.

## Предметний покажчик

### аналіз

ізентропічний 63-64

**бароклінність** 55

**баротропність** 55

**бездивергентність** 85

### вітер

геострофічний 77-78

термічний 78-81

градієнтний при кругових ізобарах 82-84

### вихор

абсолютний 50, 54, 56, 89

відносний 49, 50, 54, 56

відносний квазігеострофічний

потенціальний 116-117

потенціальний 60-63

переносний (див. планетарний)

планетарний 56

Ертеля (див. потенціальний)

**дивергенція вектору швидкості** 48

**завихреність** 48

### задача

Релея 96

### закон

Колмогорова-Обухова 147

### критерій

Філіпса 104

**K-теорія турбулентності** 163-169

### наближення

Буссінеска 106

квазігеострофічне 77-78

### напруження

ньютонівські 28, 33-35, 38

Рейнольдса (див. турбулентні)

турбулентні 155-156

### нестійкість

бароклінна нестійкість на  $\beta$  – площині 106-111

бароклінна на  $f$ -площині 96-106

баротропна нестійкість зонального потоку на  $\beta$  – площині 85-94

баротропно-бароклінна 114-125

гідродинамічна 85

Кельвіна-Гельмгольца 127-129

конвективна 125-137

### параметр

Коріоліса 51, 74

Россбі 53

**площина  $\beta$**  99

### потік

імпульсу 25, 40

кількості руху (див. імпульсу)

**правила осереднення** 151

**приплив тепла** 43-44,61,

за рахунок перетворення сонячної енергії 44

неадіабатичний 169

обумовлений турбулентним обміном 44

пов'язаний з фазовими переходами

води в атмосфері 44

**приплив імпульсу**

обумовлений турбулентним обміном 155

### прискорення

доцентрове 21-22, 25

вільного падіння 14

зумовлене змінами швидкості

обертання системи відліку 21

Коріоліса 14, 21, 25

### рівняння

абсолютного вихору швидкості 51-52

відносного вихору швидкості 53-55

для турбулентного потоку

завихреності 53-55

Ейлера 32, 39

Нав'є-Стокса 41

нерозривності 22-24

Орра-Зомерфельда 93, 127

примітивні 115

припливу тепла 42-46

Релея 93

руху ідеальної рідини 32, 39

руху в'язкої рідини 41

Тейлора-Гольдштейна 127

### рідина

в'язка 24-25

ідеальна 24-25

### сила

баричного градієнта 31-32, 72, 75

відцентрова 26

земного притягання 26

інерції 25

Коріоліса 25, 71-72, 74-75, 77, 82

масова 25-27

молекулярної в'язкості

**сила**

- плавучості
- поверхнева 27-30
- турбулентної в'язкості
- тяжіння 26

**система відліку**

- інерціальна 17
- неінерціальна 17

**смуга**

- пропускання водяної пари 69-70
- тепла виносна 67
- холодна виносна 68

**температура**

- потенціальна 16, 44, 60

**тензор**

- густини потоку імпульсу 40
- ньютонівських напружень 38
- турбулентних напружень 156

**теорема**

- Говарда 95-96
- Сквайра 95

**теорія**

- Ландау 138-143

**теплоємність**

- питома при сталому об'ємі 14,42
- питома при сталому тиску 14, 43

**термодинамічний процес** 42-43

- ізобаричний 43

**течії**

- Куетта 93-94
- Пуазейля 93-94
- струменева 94
- шару змішування 94

**тропопауза**

динамічна 65

термічна 64

**турбулентність**

- термічна 128
- в ясному небі 128
- в граничному шарі 138

**функція течії** 16, 114**хвиля**

- Гаурвіца 88-89, 93
- Гріна 111-114
- гравітаційна
- Іді 111,113
- Кельвіна-Гельмгольца 127-129
- несингулярна, що біжить за потоком 87
- несингулярна, що біжить проти потоку 87
- нестійка 89, 106, 109-111
- Россбі 89, 93
- сингулярна нейтральна 93
- стаціонарна 128
- Чарні 111-114

**частота Брента-Вяйсяля** 98, 116, 127**число**

- Кібеля 72
- Рейнольдса 140
- Релея 126
- Річардсона 98
- Россбі 72
- Прандтля 126

**щільність**

- потоку імпульса 154



Навчальне електронне видання

ХОМЕНКО Інна Анатоліївна

## ДИНАМІКА АТМОСФЕРИ

Навчальний посібник

**Видавець і виготовлювач**

Одеський державний екологічний університет

вул. Львівська, 15, м. Одеса, 65016

тел./факс: (0482) 32-67-35

E-mail: [info@odeku.edu.ua](mailto:info@odeku.edu.ua)

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи

ДК № 5242 від 08.11.2016