МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ОДЕСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ЕКОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

О.І.ГЕРАСИМОВ

ФІЗИКА СКЛАДНИХ НЕРІВНОВАЖНИХ СИСТЕМ ТА ПРОЦЕСІВ

Монографія

Одеса
Одеський державний екологічний університет
2022

УДК 53
Г 37

Герасимов О.І.
Г 37 Фізика складних нерівноважних систем та процесів: монографія. Одеса : Одеський державний екологічний університет, 2022. 187 с.
ISBN 978-966-186-237-0

Нерівноважні, нелінійні процеси складають переважну більшість переліку систем, явищ та процесів, які відбуваються як в технологічних маніпуляціях, так і в навколишньому середовищі. Різноманітність об'єктів, які існують та розвиваються, перебуваючи у нерівноважних станах, без перебільшення вражає. Сценарії, за якими функціонують такі об'єкти, належать, як правило, різним розділам фізики, технічних наук, хімії, біології, а також соціології і навіть політології. До того ж, параметризація таких процесів здійснюється за допомогою нелінійних диференційних рівнянь у часткових похідних при складних граничних і початкових умовах. Складається враження, що взагалі неможливо сформувати у читача якесь більш чи менш універсальне уявлення про природу появи та еволюцію складних нерівноважних систем. Причому, складність останніх полягає щє й в тому, що вони, як правило, перебувають та показують свої характерні властивості у станах, суттєво віддалених від рівноважних, для яких сучасна теорія дає лише окремі і вельми обмежені засоби опису. Монографія, яка пропонується, як раз і є спробою сформувати уявлення про суттєво нерівноважні системи і процеси за допомогою простих наочних моделей, в яких нерівноважність виступає деяким моделюємим і контролюємим параметром і фактором, який визначає ту чи іншу характерну поведінку системи.

Монографія розрахована на широке коло науковців, викладачів, аспірантів та студентів вищих навчальних закладів, які працюють в фізико-технічних, міждисциплінарних (зокрема, в технологіях захисту навколишнього середовища) та суміжних напрямах досліджень систем та процесів, як технологічних так і тих, що існують і відбуваються у навколишньому середовищі.

Gerasymov O.I.
Physics of complex nonequilibrium systems and processes: monograph. Odesa : Odessa State Environmental University, 2022. 187 p.

Non-equilibrium, non-linear processes make up the vast majority of the list of systems, phenomena and processes that occur both in technological manipulations and in the environment. objects belong, as a rule, to various sections of physics, technical sciences, chemistry, biology, and also, sociology and even political science. Besides, parametrization of such processes is carried out by means of nonlinear differential equations in partial derivatives at difficult boundary and initial conditions. It seems that it is impossible to form in the reader a more or less universal idea of the nature of the emergence and evolution of complex nonequilibrium systems. equilibrium, for which modern theory gives only some and very limited for. The proposed monograph is just an attempt to form an idea of essentially nonequilibrium systems and processes using simple visual models in which unequal importance is a simulated and controlled parameter and factor. which determines a characteristic behavior of the system.

The monograph is intended for a wide range of scientists, teachers, graduate students and students of higher education institutions working in physical and technical, interdisciplinary (including environmental safety technologies), and related areas of research systems and processes, both technological and existing and occur in the environment.

УДК 53

Р е ц е н з е н т и :
д.фіз.-мат.н, проф. **Калінчак В.В.;** к.фіз.-мат.н., доц. **Худинцев М.М.**

Рекомендовано до друку рішенням вченої ради Одеського державного екологічного університету Міністерства освіти і науки України (протокол №6 від 30.06.2022 р.)

ISBN 978-966-186-237-0

© Герасимов О.І., 2022
© Одеський державний екологічний університет, 2023

ЗМІСТ

Вступ……5
РОЗДІЛ 1 Нерівноважні системи……...7
1.1 Загальні характеристики, ознаки та приклади нерівноважних систем....7
1.2 Фізика конденсованої речовини і теорія нерівноважних процесів…....9
1.3 Переходи до нерівноважних станів……..10
1.4 Матеріали у станах , суттєво далеких від рівноважних …...……...13
РОЗДІЛ 2 Поведінка систем у станах,далеких від рівноважних……..16
2.1 Гідродинамічні системи……..16
2.2 Турбулентність ……...……....18
2.3 Сингулярності…… 19
2.4 Інженерія нерівноважних систем……...20
2.5 Флуктуації в нерівноважних станах……..21
2.6 Деякі теоретичні розробки……..23
2.7 Заморожені стани ……...……....24
РОЗДІЛ 3 Сінергетична концепція в фізиці суттєво нерівноважних систем…….26
3.1 Нерівноважні стани……..……..26
3.2 Поняття нестійкості……..…33
3.3 Нерівноважні системи та нелінійна динаміка……..….39
РОЗДІЛ 4 Динамічні системи: хаос, інформація, оборотність, цикли…… 45
4.1 Основні визначення…….45
4.2 Логістичне відображення……....47
4.3 Стаціонарні стани та стійкість…….……....50
РОЗДІЛ 5 Загальні характеристики осциляційних процесів……....55
5.1 Осцилятори……..…...……55
5.2 Автоколивання ……56
5.3 Явища, породжені не лінійністю…….……..…….…...57
5.4 Нелінійні маятники……..…….….63
РОЗДІЛ 6 Хвилі…….66
6.1 Класифікація хвильових процесів……...…….….66
6.2 Коливання струни та звук……..……....69
6.3 Поверхневі хвилі……...……..73
РОЗДІЛ 7 Нелінійні елементи та їх взаємодія…...……78
7.1 Нелінійні ефекти……..78
7.2 Електрон у періодичному електричному полі поздовжньої хвилі…….79
7.3 Генератор Ван дер Поля…….81
7.4 Нелінійні хвилі: кноїдальні та відокремлені (солітони)……..82
7.5 Стохастичні рухи речовини……87
РОЗДІЛ 8 Солітоноподібні перетворення……...91
8.1 Вейвлет аналіз……..91
8.2 Вейвлет-образи модельних сигналів……...…….....95

8.3 Застосування вейвлетного аналізу……..…….....97
РОЗДІЛ 9 Катастрофи……103
9.1 Складання та рівновага……...……..103
9.2 Складання та фазові переходи……...……..106
9.3 Галопування, флатер та вихори……...……....111
9.4 Виникнення та властивості вихорів……114
РОЗДІЛ 10 Інформація та динаміка……...117
10.1 Інформація у класичній механіці……...117
10.2 Невизначеність в квантовій динаміці……....123
10.3 Квантовий комп'ютер та когерентність станів……126
РОЗДІЛ 11 Ентропія – міра хаосу……..129
11.1 Сили та узагальнене рівняння енергії……129
11.2 Адіабатичні інваріанти динамічних систем……..131
11.3 Ентропія та перемішуваність……...…….…134
РОЗДІЛ 12 Фрактали – геометрія природи……...140
12.1 Самоподібність……140
12.2 Фрактальні множини……...144
12.3 Відмінність та розмірність Реньї……...……....151
РОЗДІЛ 13 Синергетичні системи……155
13.1 Комірки Релея-Бенара та модель Лоренца……155
13.2 Брюсселятор (модель Пригожина-Лефевра)……160
13.3 Модель Хижак-жертва (модель Лотки-Вольтерра)……..164
РОЗДІЛ 14 Незворотні процеси……...168
14.1 Стаціонарний стан……...168
14.2 Модель Онсагера……173
14.3 Дисипативні структури……...179
Перелік джерел посилань……...…….....182

ВСТУП

Поведінка, систем в станах, далеких від рівноваги, поступово стає однією з головних проблем у фізиці конденсованої речовини та за її межами. Важливість досягнення прогресу в цій галузі обумовлюється декількома ключовими факторами: по-перше, поведінка, далека від рівноваги, не рідкість, а навпаки, глобальне явище, яке спостерігається у широкому інтервалі масштабів починаючи від нанометрового і вище, як у повсякденному житті, так і у високотехнологічних процесах. По-друге, вона безпосередньо пов'язана з критичними потребами на наступні умови існування Людства, впливаючи на значну частину виробничої та технологічної бази, а також на економіку, клімат і взагалі на навколишнє середовище. По-третє, поведінку, далеку від рівноваги, неможливо зрозуміти лише через модифікації фізики рівноважних процесів. Сфера фізики, що має справу з далекими від рівноваги компонентами , величезна, і навряд чи якийсь один універсальний принцип буде працювати для всіх далеких від рівноваги систем. Тим не менш, є надія визначити деякі класи систем, які можуть мати спільні закономірності і особливості фізичної поведінки, які можуть бути вирішені загальними методами. Нещодавні дослідження в царині конденсованої матерії підготували основу для нових підходів до класичних проблем, що стосуються поведінки, систем, далеких від рівноваги, шляхом введення нових модельних концепцій та підходів, таких, як гранульована речовина, нові об'єднуючі парадигми, такі, як заглушення, нові принципи організації, такі як надійність, і нові формальні підходи, такі як термодинаміка нестаціонарних процесів. Маємо підкреслити також тісні зв'язки теоретичної галузі фізики суттєво нерівноважних процесів із великим переліком галузей виробництва та технологій.

Автор хотів би зауважити, що на початку роботи над книгою, в нього була думка, як це й прийнято у науковій літературі, розповісти про окремі приклади систем, які перебувають у станах, далеких від рівноважних і показують специфічні, навіть екстраординарні властивості, що приваблює до їх вивчення і теоретиків і експериментаторів. Перших, з метою прийняти виклик, який своїми складнощами кидають нам такі системи і впоратися з порозумінням їх складної поведінки за допомогою символічних методів і моделей, які складають апарат сучасної теоретичної фізики. Других, з метою привести якомога більше прикладів спостережень за поведінкою таких систем, знаходячи закономірності і намічаючи шляхи практичних застосувань для потреб суспільства. Але на протязі роботи над матеріалом з'ясувалося, що задача відкривається у більш складній постановці. Як розповісти про велике коло найскладніших явищ, які відбуваються з абсолютно різними за своїми фізичними, чи іншими властивостями систем аудиторії, яка не має фундаментальної підготовки,

скажімо в галузі теоретичної фізики, чи спеціальних розділів фізики, хімії, біології та інших природничих наук? Щоб уникнути виникаючих труднощів довелося зібрати, головним чином, ті приклади систем у далеких від рівноваги станах, які дозволяють вирішити задачу параметризації спостерігаємих в них явищ за допомогою адекватних і апробованих, але нескладних, в більшій частині модельних підходів. Такий підхід, тим не менше створює достатньо повне уявлення про перебіг нерівноважних процесів та про вплив, який створюють на них зокрема, нелінійність, симетрія та інші параметри систем. Для більш повного ознайомлення із предметом монографії читачеві рекомендується наведена наприкінці монографії чисельна профільна література.

РОЗДІЛ 1 НЕРІВНОВАЖНІ СИСТЕМИ

1.1 Загальні характеристики, ознаки та приклади нерівноважних систем

Еволюція ізольованих систем різної природи має тенденцію наближувати їх до особливих, так званих рівноважних станів, які перебувають у центрі уваги досліджень поведінки великих конгломерацій тіл вже майже протягом століття. І все ж, найголовніше багатство і різноманіття властивостей навколишнього світу виникає саме в умовах, далеких від рівноваги. Такі явища, як турбулентність, землетруси, руйнування та кінець кінцем саме життя, відбуваються саме в умовах далеких від рівноваги. Потрапляння матеріалів в умови, при яких вони переходять до станів далеких від рівноваги, призводить до формування специфічних (інколи навіть екстраординарних!), недосяжних в іншому випадку властивостей. Наприклад, швидке охолодження є ключовим процесом у виробництві найміцніших металевих сплавів і пластмас. Процеси, які відбуваються далеко від рівноваги, також створюють деякі з найскладніших за топологією структур, від сніжинок до Всесвіту, від атомно-ядерних сполук до високоорганізованих структур життя. Незважаючи на те, що на теперішні часи багато чого відомо про властивості систем, що знаходяться в стані рівноваги або близько до нього, взагалі кажучи, людство тільки починає розкривати основні принципи, що керують поведінкою багатьох систем, які знаходяться у станах, далеких від рівноважних.

Рисунок 1.1 - Роїння зграї риб, закручені бурі і галактики є прикладами систем, які формуються і розвиваються далеко від рівноваги

Насправді, ми живемо у світі, в якому фігурують структури і шаблони, які фактично моделюють системи, що знаходяться у стані динамічного розвитку. Коли енергія постійно подається до систем з багатьма взаємодіючими складовими, результат в загалі кажучи разюче відрізняється від незмінного стану, який характеризує рівновагу. Безліч явищ від молекулярних процесів, які розвиваються на наномасштабах, і які

становлять основу життя, до клімату на нашій планеті, що динамічно змінюється і до кластеризації матерії у Всесвіті загалом, та багато інших зобов'язані своїм існуванням тому, що вони не просто трохи віддалені від відповідних станів рівноваги, але знаходяться далеко від нього (рисунок 1.1). Створення умов, які ведуть до станів, далеких від рівноваги, разюче змінюють поведінку навіть звичайних рідин і твердих тіл. Драматичні, з точки зору сценаріїв поведінки рівноважних систем, приклади трапляються, коли потік рідини стає турбулентним або коли тверді тіла під впливом зовнішніх збурень і руйнуються.

Точка зору теоретичної фізики, як на турбулентність [1], так і на руйнування [2], базується на моделях виключної складності, які описують не тільки принципові зміни властивостей матеріалів, але й перерозподіл енергії по всій ієрархії вкладених структур, починаючи від мікроскопічних і закінчуючи макроскопічними масштабами. Процеси, далекі від рівноваги, охоплюють величезний діапазон часових масштабів, від характерних для електронних переходів на субнаносекундному масштабі та часів релаксації аморфних сполук, занадто повільної для вимірювання будь-якою технікою, до віку Всесвіту.

Далека від рівноваги поведінка у глобальному сенсі не обмежується особливими умовами, чи певними типами матеріалів. Натомість вона виникає у всьому спектрі фізичних явищ, в низці проблем, що становлять фундаментальний ,принциповий інтерес. Явища, далекі від рівноваги, також приносять, як користь так і перешкоди у техніці та в повсякденному житті [3] .

Дійсно, деякі з найвразливіших сценаріїв поведінки, в далеких від рівноваги станах, виникають у ситуаціях, з якими ми знайомі з щоденного досвіду. Ми спостерігаємо турбулентність, як у візерунках хмар, так і у ванні; використовуємо властивості склоподібної поведінки зразків майже у всіх типах пластиків; використовуємо розщеплення потоку рідини на краплі за допомогою впорскування палива та струминного друку (та, водночас зіткаємось з цим явищем в кожному негерметичному крані). Дослідження нерівноважних явищ поширюється також і на системи суспільства. В останнє десятиліття дослідники з фізики конденсованої речовини почали вирішувати задачі, типові для далеких від рівноваги систем, в різних галузях, починаючи від економіки до екосистем і навколишнього середовища [4-9].

Два важливих аспекту визначають масштаб виклику в царині опису та порозуміння суттєво нерівноважних систем. По-перше, суттєво нерівноважна поведінка спостерігається глобально. Широкий спектр явищ робить вивчення далеких від рівноваги систем за своєю суттю міждисциплінарною сферою, яка налагоджує зв’язки між фізичним співтовариством та дослідниками в галузі біології, хімії, прикладної математики, геології, метеорології та техніки. Суттєво нерівноважна

фізика тісно пов’язана, як з фундаментальними науковими проблемами, так і з обробкою багатьох матеріалів. Нарешті, нерівноважна фізика лежить в основі широкого кола явищ поза традиційними межами фізики конденсованої речовини, включаючи землетруси, урагани, утворення галактик і …навіть свідомість. Як наслідок, прориви в цій царині мають глобальні перспективи застосувань.

Друга ключова проблема полягає в тому, що поведінка суттєво нерівноважних систем не описується простим розширенням фізики рівноважних процесів , чи систем, що є близькими до рівноваги. Натомість така поведінка відповідає якісно іншим, які зазвичай пов’язані з перетином деякого порогу переходу до принципово нового режиму. У деяких конкретних випадках вдається розкрити мікроскопічні засади суттєво не рівноважних явищ, але нам досі бракує розуміння, необхідного для розробки більш глобальних, у сенсі нерівно важності , структур. Тому, незважаючи на свою актуальність, поведінка систем, які суттєво відхиляються від рівноваги, все ще залишається значною мірою нерозробленою належним чином галуззю знань. Нижче, буде дана спроба лише на якісному понятійному рівні описати деякі причини, завдяки яким явища, далекі від рівноваги, часто не знаходять обґрунтування та розуміння. Розгляд буде зосереджено на проблемах, для яких вдається визначити надійні ознаки та параметри, типові для характеристики нерівноважних систем, як експериментальних, так і теоретичних(деякі з яких цілком можуть служити відправними точками для майбутніх досліджень). Для більш вичерпного розгляду ми просимо читача звернутися до великої кількості спеціалізованих робіт, лише частина з яких наведена у посиланнях.

1.2 Фізика конденсованої речовини і теорія нерівноважних процесів

Дослідники, які працюють в галузі фізики конденсованої матерії, мають хороші можливості для того, щоб очолити прогрес у сфері вивчення поведінки систем, які знаходяться у станах, далеких від рівноваги. Будучи однією з передових областей міждисциплінарних досліджень, фізика конденсованої речовини вже давно є центром нових підходів, які об’єднують ідеї з фізики та інших наукових та інженерних дисциплін, і які пов’язують фундаментальну науку з прикладними дослідженнями. Фізика конденсованої речовини також спеціалізується на розробці нових теоретичних, чисельних та експериментальних інструментів і методів для систем багатьох взаємодіючих складових. Експериментальні методи, які були особливо корисними для дослідження поведінки, що далека від рівноваги, включають нові інструменти візуалізації, спектроскопічні

методи та методи відстеження частинок, а також оптичний пінцет. Багато потужних теоретичних і чисельних методів для вивчення емерджентної поведінки багаточастинкових систем, близьких до рівноваги, були узагальнені на системи, далекі від рівноваги; наприклад, методики, спочатку розроблені для вивчення магнітів, були поширені на зграї птахів [10]. Однак, можливо, найціннішою характеристикою цієї галузі є її схильність до пошуку спільного в надзвичайно різних системах. Це призвело до вражаючого успіху фізики конденсованої матерії в усвідомленні того, що величезна різноманітність рівноважних фазових переходів може бути зрозуміла з точки зору кількох класів поведінки. Ця історія спонукає дослідників шукати подібні організаційні принципи у ще більшій низці далеких від рівноваги явищ. Далека від рівноваги поведінка є важливим компонентом таких проблем. Вона лежить в основі багатьох явищ, що виникають у системах від наномасштабу до макромасштабу, і відіграє важливу роль у фізиці живих систем. Оскільки багато явищ, далеких від рівноваги, вимагають енергії для того, щоб їх керувати, вони також неминуче залучаються до споживання та перетворення енергії. У квантових обчисленнях проблема полягає в тому, щоб підготувати кубіти в заданих чистих квантових станах. Такі системи обов'язково далекі від рівноваги. Нарешті, оскільки далекі від рівноваги явища є настільки поширеними в повсякденному житті та лежать в основі багатьох суспільних проблем, вони створюють багатий контекст для освіти та навчання для наступного покоління вчених, а також для широкої громадськості.

1.3 Переходи до нерівноважних станів

Один із способів вивести систему від природного стану спокою і перевести її в режим, далекий від рівноваги, — це піддати її постійному і досить сильному збуренню. Наприклад, енергія, яка безперервно потрапляє на Землю від Сонця, викликає суттєво нерівноважні явища, починаючи від хаотичних погодних умов і закінчуючи приголомшливою різноманітністю форм життя. Якби сонячна енергія більше не поставлялася б, багато систем на Землі повернулися б до рівноваги. Такі керовані системи не тільки породжують багаті й непередбачувані явища, але також мають величезне значення для технологічних застосувань. Наприклад, у молекулярній або нанорозмірній електроніці нові явища виникають внаслідок реакції на електромагнітні поля, струми та механічні напруження [11]. Коли фізичні розміри матерії досягають нанометрового масштабу, прикладені поля, які віддаляють систему від стану рівноваги, посилюються, а розсіювання енергії , яке дозволяє системі шляхом релаксації повернутися до рівноваги, пригнічується [12]. У результаті такі

пристрої часто працюють у режимі, далекому від рівноваги, на відміну від звичайних напівпровідникових приладів мікронного масштабу, які зазвичай працюють набагато ближче до рівноваги. У дещо більших масштабах процеси, далекі від рівноваги, такі як шліфування та фрезерування, були ключовими для багатьох галузей протягом тривалого часу, а нові технології, такі, як механічне легування порошків привертає увагу для синтезу нових матеріалів [13]. Умови, далекі від рівноваги, також забезпечують шлях для контролю більшого розмаїття шаблонів і для складання структур від нанорозміру і вище зі швидкістю зростання, набагато швидшою, ніж це було б можливо з майже рівноважними підходами [14]. Важливо, що процеси, далекі від рівноваги, можуть досягти структурного та динамічного багатства навіть із найпростішими інгредієнтами, такими, скажімо, як складний дендритний ріст, який реалізується у сніжинках (рисунок 1.2).

Рисунок1.2 - Приклад системи, яка знаходиться у стані, що є далеким від рівноваги-звичайна сніжинка

Інші системи знаходяться далеко від рівноваги, тому що вони просто не можуть повернутися до рівноважного стану навіть після того, як усі рушійні сили були усунені. Це відбувається з багатьма матеріалами, життєво важливими для нашого індустріального суспільства, включаючи скло, порошки , піни і полімерні пакувальні матеріали, які набувають своїх властивостей від того, що вони по суті перебувають у далеких від рівноважних станах. Ці матеріали демонструють структурні властивості, які за умов рівноваги могли б їх ідентифікувати, як рідини; але вони можуть поводитися і як тверді тіла (рисунок 1.3).

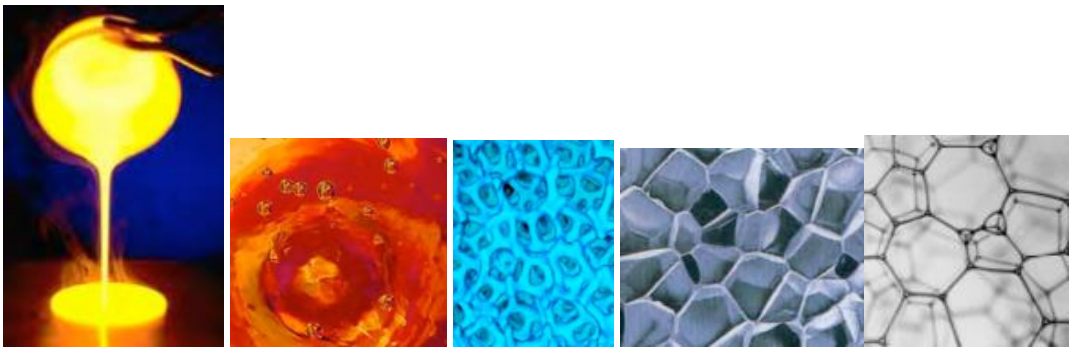


Рисунок1.3 - Скло та пінопласт є прикладами важливих матеріалів, які зазвичай перебувають у станах, далеких від рівноваги. За годинниковою стрілкою зверху: розплавлене скло замерзає в тверде тіло, пінополістирол, мильна піна, високоміцна легка нікелева піна

Процеси, що відбуваються далеко від рівноваги, починають змушувати нас переосмислити деякі основи фізики конденсованих речовин і матеріалів. Проте навіть сьогодні більшість наших знань про те, як поводяться та розвиваються системи з багатьма складовими частинками, засновані на

міркуваннях, справедливих лише близько до рівноваги. Ми знаємо набагато більше про системи, близькі до рівноважних, і розробили потужний формалізм, статистичну механіку, щоб передбачити виникаючу, колективну поведінку багаточасткових систем. Ця структура дозволила дослідникам конденсованої матерії зрозуміти велику кількість фаз матерії, походження багатьох їх властивостей і природу переходів між ними. Однак ця структура застосовується лише до ситуацій, коли система термічно та механічно знаходиться в рівновазі з навколишнім середовищем, і, таким чином, охоплює лише невелику частину явища, які ми спостерігаємо навколо нас і з якими ми стикаємося .

Одна концептуальна складність, яку створюють системи, далекі від рівноваги, таким чином, виникає через відсутність усталених теоретичних основ. Оскільки такі системи далекі від рівноваги, вони створюють численні проблеми. Вони, як правило, нелінійні; тобто їх реакція на збурення часто не пропорційна величині збурення, як для систем, близьких до рівноваги. Вони часто невпорядковані; тобто їх структура, як правило, не кристалічна, як зазвичай рівноважні тверді речовини. Нарешті, вони часто неергодичні; тобто вони не обов’язково показують велику підмножину доступних для них станів, як відповідають рівноважним системам. Як наслідок, навіть характеризуючи їх поведінку та структуру, можна вийти на дуже незнайому їх поведінку з точки зору фізики конденсованої речовини.

1.4 Матеріали у станах, суттєво далеких від рівноважних

Певні класи матеріалів майже завжди існують в умовах, далеких від рівноваги. Багато матеріалів, які досліджували дослідники м'якої конденсованої речовини, підпадають під цю категорію, включаючи скло, піну, гранульовані матеріали та щільні колоїдні суспензії [15-18]. У всіх цих прикладах теплова енергія, що постачається оточенням, занадто мала, щоб дозволити системам реалізувати багато конфігурацій. Натомість вони є в конфігураціях, які структурно нагадують рідину (вони щільні і дуже невпорядковані), але не здатні текти і, таким чином, поводяться, як тверді тіла. Ця скловидна поведінка, характерна ознака багатьох далеких від рівноваги матеріалів, спостерігається для складових, починаючи від молекул у склоутворюючих рідинах до піщинок у дюнах. Оскільки ці матеріали не можуть прямувати до рівноваги, вони зазвичай зберігають пам'ять про умови приготування або обробки, що є ключем до багатьох технологічних інновацій, таких, як формовані пластикові деталі та полімери з пам'яттю форми . Переходи від далеких від рівноважних скловидних станів до майже рівноважних кристалічних станів є основою для оптичних дисків із халькогенідного скла та пристроїв пам'яті із зміною фази.

Протягом останнього десятиліття гранульована речовина з'явилася, як ключовий прототип далекого від рівноваги матеріалу [15-18] (рисунок 1.4).

Рисунок 1.4 - Гранульовані матеріали [15-18] складаються з відокремлених твердих зерен(гранул), взаємодіючих тільки шляхом безпосереднього контакту; але великі конгломерації таких зерен демонструють багатий набір сценарієв складної поведінки. Ліворуч: хвилі на піщаній дюні. Праворуч: у той час, як рідини змішуються при перемішуванні, гранульовані матеріали розділяються(сегрегують). МРТ внутрішньої частини шаруватої зернистої системи, що показує висхідний рух великої частинки (пунктирне коло) у оточенні менших за розмірами частинок(ефект, протилежний за змістом до відомого ефекту Архімеда в механіці суцільних середовищ

У своїй найпростішій формі гранульована речовина складається з великої конгломерації окремих незв'язаних, макроскопічних твердих частинок (сфер), що взаємодіють лише при безпосередньому контакті; проте, незважаючи на простоту, вона демонструє всі характеристики поведінки, далекої від рівноваги системи , які обговорюється в наступних розділах.

Крім того, кілька ідей розроблені спочатку в процесі досліджень зернистих матеріалів, наразі успішно «експортовані» в інші області; наприклад, концепція заглушення дає уявлення про склоформування явища [19]. Аналогічно, уявлення про лавинну статистику в керованій дисипативній системі, досліджені на початку в піщаних купах, були застосовані до вивчення динаміки руху землетрусів, тертя, магнітного потоку в надпровідниках. Крім фундаментальних досліджень, велика кількість промислових процесів залежить від обробки та транспортування гранульованої речовини, від насіння і гранул добрив у сільському господарстві до руди та гравію в гірничих роботах ,до порошків і таблеток у фармацевтичній промисловості. Проте поведінка цих матеріалів, які за своєю суттю, знаходяться у станах далеких від рівноваги, все ще вивчена і контрольована недостатньо [20]. Багато технологій обробки матеріалів використовують умови, далекі від рівноваги, для вирощування та виробництва матеріалів, які інакше не можна було б виготовити. Високоміцні сплави часто утворюються в результаті того ж швидкого росту дендритів, що лежить в основі утворення сніжинок. Одними з найміцніших матеріалів є скла з металевих сплавів, виготовлені шляхом швидкого охолодження в аморфні стани, далекі від рівноваги (рисунок 1.5). У ході подібних процесів виробляються легкі, міцні та міцні пластмаси для автомобільних бамперів і літаків. Розуміння та контроль нерівноважної поведінки також важливі для опису процесів росту поверхонь, наприклад, під час механічного легування, вже згаданого вище, або виготовлення великих, бездефектних кристалічних доменів з кремнію для тонкоплівкових пристроїв за допомогою лазерно-індукованого плавлення та затвердіння.

Умови обробки, далекі від рівноваги, можна використовувати для того, щоб дуже ефективним і швидким способом підвести систему до унікальних кінцевих конфігурацій. У нанорозмірі це відкриває нові переваги. Наприклад, певні полімери (діблок-сополімери) спонтанно організовуються в розширені структури з повторюваними інтервалами в діапазоні 10-50 нм. Такі розміри сформованих неоднорідностей важко отримати за допомогою звичайних літографічних методів, а вони, насправді, бажані для застосування, починаючи від доставки ліків до магнітних носіїв збереження інформації високої щільності . Необроблені, ці полімерні структури часто досить невпорядковані і містять велику кількість дефектів. Однак, якщо систему спрямувати до нерівноважного

стану, дефекти можна видалити, і структури можуть упорядкуватись на надзвичайно великих відстанях.

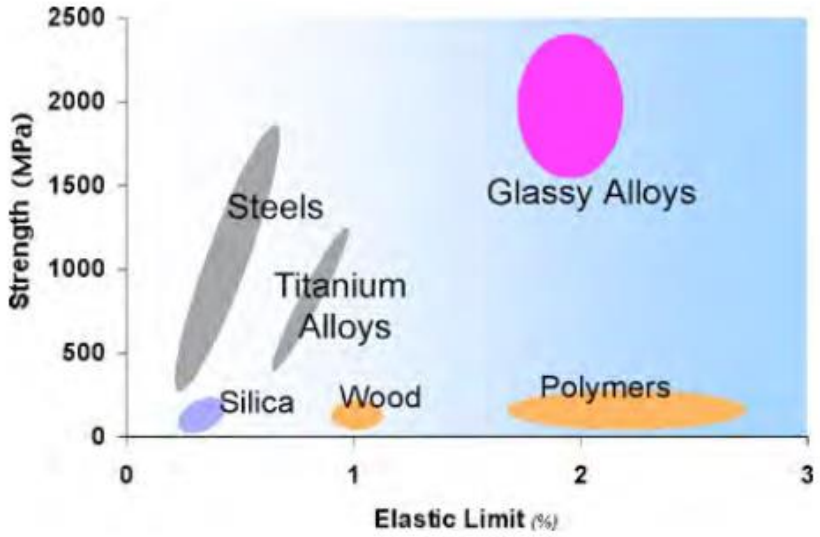


Рисунок 1.5 - Далекі від рівноваги умови обробки дозволяють отримати одні з найбільш міцних матеріалів (сплави склоподібного металу)

Перевага далеких від рівноважних умов обробки полягає в тому, що невеликі відмінності у фізичних або хімічних властивостях сусідніх областей в матеріалі можуть бути підсилені; у рівновазі дифузія прагне згладити такі відмінності. Цю властивість можна використовувати для агрегування неорганічних компонентів, таких, як металеві, магнітні або напівпровідникові частинки, на селективних полімерних доменах, що призводить до отримання нових гібридних матеріалів із нанорозмірною структурою . Іншою важливою областю, де умови, далекі від рівноваги, можуть бути використані для контролю морфології, є опосередковане виділення наночастинок, яке дозволило створити щільно упаковані, але невпорядковані тонкоплівкові агрегати і високовпорядковані супергратки [21].

РОЗДІЛ 2 ПОВЕДІНКА СИСТЕМ У СТАНАХ ДАЛЕКИХ ВІД РІВНОВАЖНИХ

У рівновазі мінімізація вільної енергії визначає переважний стан, і система прямує до цього стану незалежно від початкових умов. Системи, які перебувають у станах, далеких від рівноваги, зазвичай демонструють багатий набір характерних форм поведінки, які зазвичай не описуються принципом мінімізації. Виникає питання, якою є фізика стану, до якого прямує система? Певний прогрес на цьому шляху досягнуто в ряді конкретних випадків, зокрема, рідин і динамічних систем, а також на шляху використання сингулярностей для розуміння та контролю поведінки, деяких далеких від рівноваги систем.

2.1 Гідродинамічні системи

У багатьох випадках далекі від рівноваги системи демонструють розділення просторових та часових характеристик. Щоб зрозуміти багато проблем з потоком рідини, наприклад, вихор торнадо, не обов'язково описувати рух окремих молекул. Досвід роботи з системами, що знаходяться в рівновазі або близько до неї, вчить нас, що часто буває плідним зосередитися на довгостроковій шкалі, поведінці в довгому часовому масштабі. Цей так званий «гідродинамічний» підхід став основою успіху в описі низки систем, далеких від рівноваги. Коли ми знаємо основні диференціальні рівняння, які описують властивості довгої тривалості та часового масштабу, ми зможемо впоратися з вражаючим діапазоном далеких від рівноваги, нелінійних сценаріїв поведінки. Прикладом є рівняння Нав'є-Стокса для потоку нестисливої рідини:

$$\rho\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v}\cdot\nabla\vec{v}\right) = -\nabla p + \eta\nabla^2\vec{v} \qquad (2.1)$$

Подібно до інших типових гідродинамічних рівнянь руху, рівняння Нав'є-Стокса є нелінійним рівнянням у часткових похідних, яке описує властивості явищ, що розвиваються на великих просторових та часових масштабах і може використовуватися для вирішення вражаючого діапазону далеких від рівноваги типів нелінійної поведінки, включаючи, наприклад, нестабільне тріпотіння прапору на вітрі (рисунок 2.1), махання крил птаха і розбивання водних хвиль на пляжі . Складність полягає в розв'язанні рівняння. Подібні описи також застосовуються до складних рідин в стані течії, граничні властивості яких тільки починають досліджувати [22]. Нарешті, гідродинамічний підхід можна застосувати до

широкого кола явищ, не пов’язаних безпосередньо з рідинами, таких, як руйнування зірок-білих карликів [23], зграї птахів та інших організмів [24], а також розвитку одноклітинних амеб у багатоклітинних організмах. Інший приклад можна знайти в напівпровідникових гетероструктурах, у яких хвилі електронної густини обмежені границею зразка (конфайнментом). У випадку, коли розсіювання не відіграє суттєвої ролі, можуть виникати сильні електронні кореляції ,які створюють дисперсійні ударні хвилі, які нагадують згорнуті хмари в атмосфері . Багато інших прикладів надають фізичні, хімічні та біологічні системи, які демонструють формування явищ, у яких однорідна система розвиває закономірності в просторі та/або часі, будучи виведеною з рівноваги.

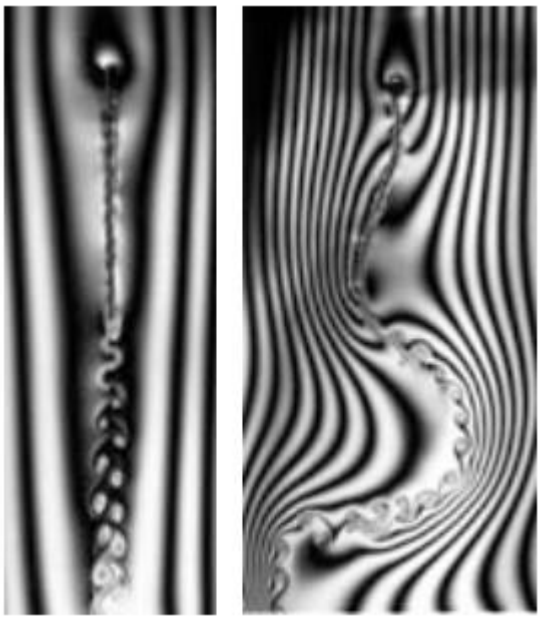


Рисунок 2.1 - Перехід від рівномірного (ліворуч) до пульсуючого (праворуч) стану, який візуалізується шляхом зображення потоку рідини навколо нитки, прив’язаної до стовпа (коло вгорі)

Ідея про те, що в динаміці системи з багатьма ступенями свободи може домінувати взаємодія лише кількох (наприклад, на великих просторових та часових масштабах), є важливою концепцією, яка стимулює вивчення простих динамічних моделей з метою отримати уявлення про складніші явища. Наприклад, модель Лоренца являє собою набір нелінійних зв'язаних рівнянь для трьох змінних:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \sigma(y-x) \\ \frac{dy}{dt} &= x(\rho-z)-y \\ \frac{dz}{dt} &= xy-\beta z \end{aligned} \quad , \qquad (2.2)$$

де σ, ρ, і $\beta>0$ – параметри, що налаштовуються для конкретних систем та явищ. Модель Лоренца була спочатку розроблена для опису конвекційних комірків в атмосфері і враховує лише кілька ступенів свободи, але успішно описує якісно багато особливостей клімату Землі [25]. Подібні підходи використовуються, щоб отримати уявлення про походження магнітного поля Землі , мантійної конвекції , червоної плями Юпітера та циклічності сонячних спалахів .

Проблеми у вирішенні цього класу проблем полягають у визначенні кількох важливих ступенів свободи, які необхідно зберегти, та у складності отриманих рівнянь руху. Значний прогрес на цьому шляху був досягнутий завдяки тісному поєднанню аналітичної теорії з результатами комп'ютерного моделювання та безпосередніх фізичних експериментів.

2.2 Турбулентність

Багато явищ, далеких від рівноваги, створюють особливі проблеми, оскільки вони включають безліч довжин і часових масштабів, які взаємодіють і, таким чином, стають важливими. Великомасштабна турбулентність безпосередньо пов'язана з поведінкою потоку на багато порядків менших масштабів . Макроскопічні моделі руйнування тісно залежать від локальної конфігурації молекулярних зв'язків перед вершиною тріщини . У таких задачах, як турбулентність, гідродинамічні рівняння застосовуються, але їх неможливо вирішити. Тут можуть бути корисні теоретичні методи, які використовуються у фізиці конденсованої речовини для вивчення рівноважних критичних фазових переходів, наприклад група перенормування. Ці методи розроблені, щоб зрозуміти, як фізика в малих довжинах або масштабах часу впливає на поведінку в дещо більшій довжині або часових масштабах і так далі, що в кінцевому підсумку призводить до розуміння того, як широкий діапазон шкал довжини або часових масштабів взаємодіють один з одним.

Поведінка далеко від рівноваги часто включає процеси, що взаємодіють у широкому діапазоні довжин (і часових) масштабів, що призводить до характерних закономірностей, таких як ті, що спостерігаються при розломі скла і в турбулентній хмарі.

Тут ми зосередимося на турбулентності, як одному з найпоширеніших далеких від рівноваги явищ у навколишньому середовищі та в промислових процесах. Турбулентність створює складні структури потоку, які змінюють передачу імпульсу, маси і тепла, створюючи, таким чином, широкий спектр бажаних і небажаних ефектів. Наприклад, швидке змішування реагентів у промислових процесах, а також паразитне гальмування в потоці в трубі і, катастрофічні погодні

умови, такі як урагани. Подібні нестабільні структури потоку утворюються під час екструзії полімерів або паст через отвір в потоках складних рідин, таких, як розчини полімерів (“пружна турбулентність”), а також при повільному осіданні частинок високої концентрації в рідині . Таким чином, механізми, що лежать в основі турбулентності, мають бути надзвичайно загальними. Ідеї турбулентності навіть застосовувалися в сфері фінансів [26]. Однак, незважаючи на розповсюдженість, різноманітність форм і важливість турбулентності, ми ще й досі на достатньому рівні не розуміємо, як вона розвивається , щоб контролювати, або запобігати їй у багатьох випадках. Швидкість початку потоку і характер початку турбулентності все ще викликає здивування; турбулентність часто виникає поступово, поетапно, але в багатьох випадках, включаючи прості трубопровідні потоки, турбулентність виникає передчасно з причин, які залишаються надзвичайно незрозумілими . Нарешті, незважаючи на значний прогрес за останні десятиліття або два, природа повністю турбулентного стану все ще містить багато відкритих проблем [27,28]. У цьому стані довгоживучі великомасштабні когерентні структури відіграють важливу, але все ще недостатньо зрозумілу роль. У наступне десятиліття методи відстеження частинок для зображення елементів рідини під час турбулентного потоку повинні пролити світло на багато з цих давніх питань.

2.3 Сингулярності

У багатьох обставинах, особливо в умовах екстремального механічного навантаження або зсуву, матеріали віддаляються від рівноваги настільки, що змінюють свою форму необоротно. Це трапляється кожного разу, коли рідина бризкає і розпадається на краплі, розбивається шматок скла, зминається аркуш паперу або їздить автомобіль. Такі події, як правило, пов’язані з деформаціями ,або режимами відмови, які діють хоча й у менших масштабах, але впливають на загальний характер явища. Розглянемо кран, з якого ось-ось впаде крапля. Що визначає форму краплі та шийки, на якій вона висить безпосередньо перед відривом? Виявляється, що в багатьох випадках ці форми контролюються повністю і на кожному етапі лише однією точкою вздовж шиї, а саме там, де шия найтонша Цей тип поведінки — масштабно інваріантний, не дає уявлення про загальний розмір шиї. Іншими словами, розпад на краплі контролюється локальною сингулярністю, в у цьому випадку, розбіжністю кривизни шиї.

Важливим нещодавнім усвідомленням стало те, що існують два класи одиничних подій розриву: один, у якому форма шиї універсальна, оскільки не запам'ятовується початкові умови, і другий, в якому

зберігається пам'ять про ранні стадії формування шиї (який не є універсальним). Інший приклад, бульбашка повітря, що відривається, а потім піднімається всередині дуже в’язкого середовища, такого, скажімо, як мед . Так само загальна поведінка зім'ятого аркуша паперу визначається невеликою кількістю локальних плям, гострих точок дуже високої кривизни, з'єднаних в мережах хребтів .Такі поодинокі плями миттєво перетворюють дискету на конструкцію, яка може витримувати навантаження та поглинати удари (рисунок 2.2). Подібне фокусування напружень також спостерігалося на нано-масштабі, в конгломераціях нано-частинок .

Рисунок 2.2 - Використання сингулярностей для керування властивостями матеріалів. Зліва: м'ятий папірець застигає і дозволяє поглинання удару. Праворуч: частинки для інкапсуляції, перетворюються в майже сингулярний потік, коли простір між двома рідинами (тут: масло і вода) деформується видавлюванням олії піпеткою

В останнє десятиліття ідеї інженерії та біології змусили фізиків дослідити механізм відбору стану, який дуже відрізняється від стану із мінімальною рівноважною вільною енергією. Багато систем, далеких від рівноваги, були розроблені ,або шляхом цілеспрямованої адаптованої інженерії, або за допомогою еволюції та природного відбору, з метою бути стійкими до збурень . Наприклад, зараз автомобілі розробляються зі складними внутрішніми мережами, що включають багато компонентів, резервні механізми та адаптивні ланцюги зворотного зв’язку, щоб забезпечити надійну роботу в широкому діапазоні умов навколишнього середовища. Аналогічно, біологічні мережі, такі ,як ті, що дозволяють білим кров'яним клітинам переслідувати вторгнення бактерій, стали нечутливими до біохімічних змін у їхніх компонентах.

2.4 Інженерія нерівноважних систем

Нещодавні дослідження дозволили використовувати максимізацію надійності, в якості механізму вибору стану у взаємодіючих мережах [29] (рисунок 2.3). Це дозволило відкрити широкий спектр систем, які можна

вивчати за допомогою інструментів фізики конденсованої речовини, починаючи від циркадних годинників до інтернету, від нашої імунної системи до навколишнього середовища . Спільною рисою таких систем є те, що їхня складність робить їх чутливими до навіть одиночних, несподіваних збурень [30].

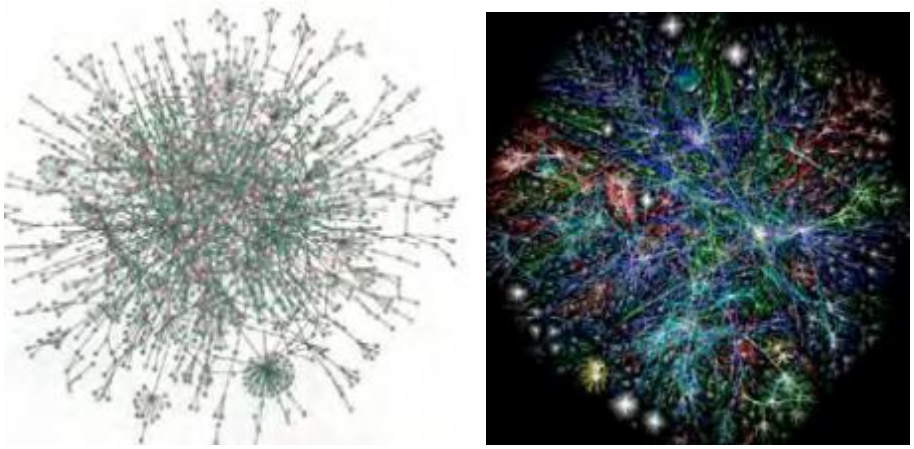


Рисунок 2.3 - Приклади еволюціонізіуючих мережевих структур, далеких від рівноваги. Зверху: карта взаємодіючих білків дріжджів. Унизу: інтернет-вузли

Наприклад, мережа взаємопов'язаних видів в Світовому океані за тисячоліття адаптувалася, щоб бути надзвичайно стійкою до величезної кількості збурень, які можуть виникнути. Проте незначна зміна кислотності в океанських водах, викликана збільшенням вмісту вуглекислого газу в атмосфері, може спричинити масове вимирання видів. Навіть системи, далекі від рівноваги, такі як матеріали, що знаходяться в стані стресу, які не еволюціонували, або не були спеціально розроблені, можуть виявляти подібні властивості, такі як руйнування, через історію їх формування та складність взаємодій між багатьма атомами або молекулами, що їх складають.

2.5 Флуктуації в нерівноважних станах

Для систем, що складаються з багатьох частинок, які знаходяться в рівновазі або поблизу неї, статистична механіка говорить нам, що коливання спостережуваних величин навколо їх середніх значень, як правило, малі і мають гауссовий розподіл. Для систем, далеких від рівноваги, не існує загальних теорій, таких, як статистична механіка, і коливання, як правило, розподіляються по-різному. Розподіли часто ширші, ніж прості гауссові демонструючи, наприклад, повільніші, експоненціальні розпади, степеневі закони або додаткові піки, так що

катастрофічні, але рідкісні події можуть домінувати та практично визначати поведінку. Це має місце у випадку лавин, що супроводжуються раптовою переорієнтацією магнітних доменів або рухом пучка потоків у надпровідних магнітах (рисунок 2.4). Подібні коливання, в т.ч. великі катастрофічні події відбуваються в гранульованих матеріалах, у вигляді зсувів або селів, або під час землетрусів. Турбулентність і просторово-часовий хаос також викликають характерні флуктуації вимірюваних величин .У зрізаних гранульованих матеріалах, де напруги поширюються вздовж сильно розгалужених мереж «силових ланцюгів», характерний розподіл величини контактної сили між частинками навколо її середньої величини може дати цінну інформацію про початок руйнування, перехід від без-затиснутої поведінки до стану протікання(див. рисунок 2.4).

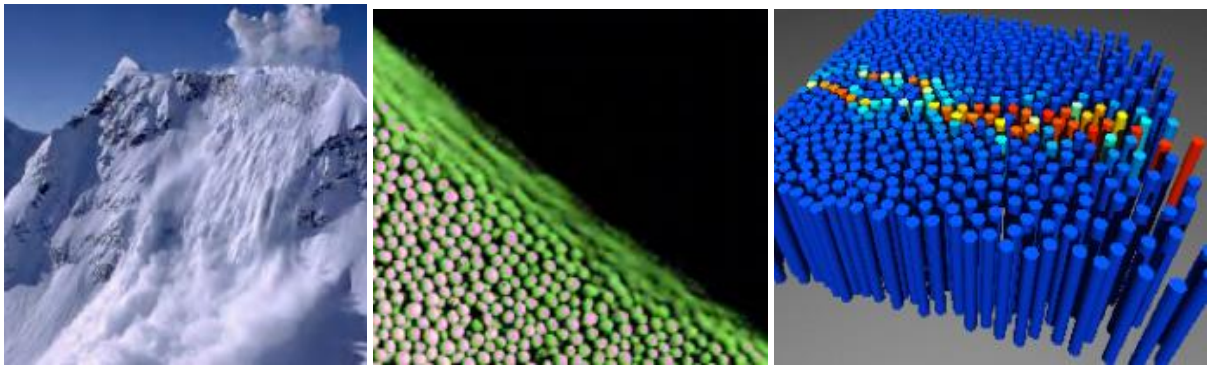


Рисунок 2.4 - Приклади критичних коливальних процесів: характерних для принципово різних систем далеких від рівноваги. Зверху вниз: снігова лавина, зерниста лавина (avalanche), токова лавина(протікання струму) в надпровіднику

Спектр флуктуацій може слугувати ключовою ознакою далекої від рівноваги поведінки та потужним інструментом для аналізу основного механізму вивчає мого явища.

Одне з найважливіших запитань, які можна задати про багаточасткову систему, це те, як вона буде реагувати на збурення. Для систем, що перебувають у тепловій рівновазі, флуктуаційно-дисипативна теорема дає відповідь на поставлене питання : ми знаємо, що якщо збурення невелике, система буде реагувати так само, як і на природні флуктуації. Зв'язок між кореляцією та реакцією залежить від температури;. Наприклад, другий закон термодинаміки стверджує, що флуктуації будь-якої екстенсивної термодинамічної змінної X пов’язані з реакцією середнього значення X наступним співвідношенням :

$$\left\langle \left(X - \langle X \rangle \right)^2 \right\rangle = -k_B T \frac{\partial \langle X \rangle}{\partial \xi} \qquad (2.3)$$

Таким чином, температура визначає масштаб коливань системи,що реагує Іншими словами, температуру можна було б визначити за формулою

$$k_B T = \frac{\left\langle \left(X - \langle X \rangle\right)^2 \right\rangle}{-\partial \langle X \rangle / \partial \xi} \tag{2.4}$$

Для систем, далеких від рівноваги, температура вже не грає такої визначаючої ролі. Однак, за аналогією з концепцією теплових процесів , в деяких випадках можна визначити ефективну температуру із співвідношення між кореляцією та відгуком. Для певних класів контролюємих дисипативних систем, таких як зрізане скло, пінопласт або киплячі гранульовані матеріали, такі, як вібруючі або газоподібні гранульовані шари, існують докази того, що поняття ефективної температури може бути корисним навіть для прогнозування їхньої поведінки [31]. Важливими питаннями є з'ясування умов, за яких ефективні температури дають розумний опис, і ступінь аналогії із системами, які описуються звичайною термодинамічною температурою.

2.6 Деякі теоретичні розробки

Однією із значних проблем для далеких від рівноваги систем є розробка теоретичної основи, подібної до рівноважної та майже рівноважної термодинаміки та статистичної механіки, для їх параметризації. За останнє десятиліття відбувся значний прогрес в узагальненні положень термодинаміки та статистичної механіки щодо систем, далеких від рівноваги. Стаціонарна термодинаміка намагається врахувати тепло, яке безперервно виділяється в системах зі стійким рухом, для того щоб розповсюдити другий закон термодинаміки на нерівноважні стани. Інші підходи спрямовані на узагальнення концепції ентропії на системи з нульовою температурою, в той час, як інші узагальнюють флуктуаційно-дисипативну теорему на системи, далекі від рівноваги [32] . Деякі дослідження показують можливість виділити рівноважну вільну енергію в процесах, далеких від рівноваги

$$\exp\left(-\Delta F / k_B T\right) = \left\langle \exp(-W / k_B T \right\rangle \quad , \tag{2.5}$$

де ΔF – різниця вільної енергії між двома термодинамічними станами А і В, k_B – стала Больцмана, T – температура, W – робота, виконана під час нерівноважного процесу, який переводить систему між станами А до В. Кутовий дужки позначають середнє значення за всіма реалізаціями цього процесу. Ця рівність була перевірена експериментально [33] і обіцяє стати корисним інструментом для вивчення вільної енергії в біологічних

системах. Теореми про флуктуації були використані, щоб показати, як незворотність може виникнути з основ динаміки [34]. Завдяки цим роботам область нерівноважної термодинаміки та статистичної механіки набирає додаткових обертів.

2.7 Заморожені стани

Прототиповим прикладом замороженого стану є скло, стан, який має властивості, як рідини, так і твердого тіла: воно має аморфну структуру рідини, але реагує на прикладене напруження, як тверде тіло. Усі рідини при охолодженні утворюють стекла, якщо можна уникнути кристалізації (наприклад, при достатньо швидкому охолодженні). Для складних рідин, таких, як полімери, переходу до скла (пластику) майже неможливо уникнути. З охолодженням рідини час, необхідний для досягнення рівноваги(час релаксації) збільшується, і реакція системи на збурення стає все більш млявою, поки вона не стає вельми повільною. В даному стані, як кажуть, система перебуває у склоподібному стані (рисунок 2.5).

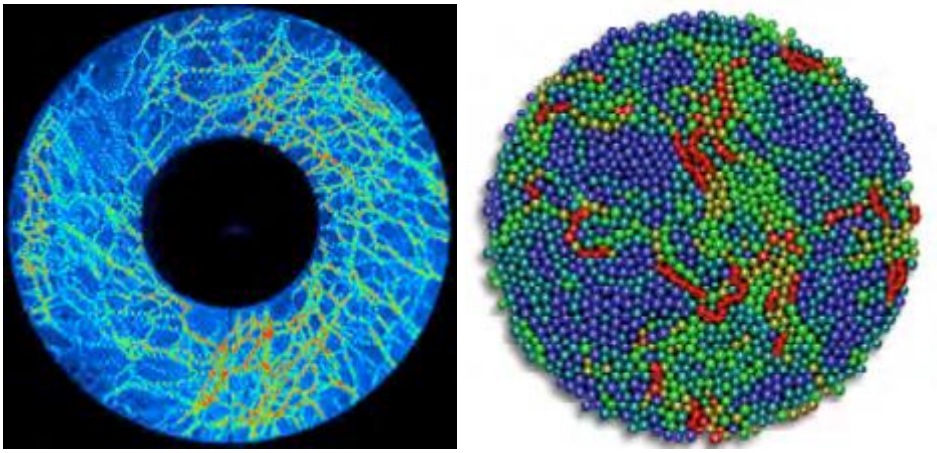


Рисунок 2.5 - У системах ,які наближуються до перехідних станів формуються сітчасті структури, такі, скажімо, як ланцюжки частинок, в яких діють контактні сили .В гранульованих системах під впливом деформацій зсуву (ліворуч) . В зернистому шарі, який знаходиться у розрідженому стані (праворуч)

Збільшення часу релаксації відбувається безперервно, але відбувається в неймовірно вузькому діапазоні температур, так що зниження температури на 10-20 К може збільшити в'язкість і час релаксації на десять або більше порядків. Оскільки час релаксації перевищує будь-яке модельне рівноважне наближення, скло за визначенням, є системою, далекою від рівноваги.

Подібні скловидні стани зустрічаються не тільки в звичайних рідинах, але і в багатьох електронних системах за наявності безладу,

включаючи взаємодіючі електронні спінові системи (спін-стекла), або системи взаємодіючих пучків магнітного потоку (вихрові стекла) . Вони також виникають, коли частинки будь-якого розміру згруповуються при досить високих концентраціях. Наприклад, міцели або колоїди в щільних суспензіях , мастила, захоплені між поверхнями , бульбашки в піні і навіть цукерки в банці потрапляють до категорії вищевизначених склоподібних станів. Початок склоподібної поведінки також спостерігається в піщаному годиннику у вигляді рідкого потоку спливаючих гранул.

РОЗДІЛ 3 ІНЕРГЕТИЧНА КОНЦЕПЦІЯ В ФІЗІЦІ СУТТЄВО НЕРІВНОВАЖНИХ СИСТЕМ

3.1 Нерівноважні стани

Теорія нерівноважних, хаотичних станів із розсіюванням енергії, речовини та ентропії (інформації) виникла в результаті розвитку наступних наукових напрямів:

1. Дослідження незворотних процесів за допомогою методів статистичної фізики та лінійної теорії Онсагера.
2. Побудова теорії відкритих систем, які перебувають у стаціонарному стані та зберігають стійкість у певному спектрі зовнішніх впливів.
3. З'ясування умов виникнення з хаосу само-організованих структур, що впорядковуються.
4. Якісний та кількісний аналіз нелінійних динамічних систем (біфуркації, фрактали, катастрофи, солітони та ін.).

Об'єднання цих напрямів спричинило створення абсолютно нового загального підходу до устрою природи та суспільства. Нова наука має різні назви: теорія про самоорганізацію, синергетика, теорія відкритих систем, теорія дисипативних структур, термодинаміка незворотних процесів, теорія нелінійних динамічних систем [35-43].

Синергетика – це наука про загальні закономірності виникнення, існування, стійкості та еволюції самоорганізованих дисипативних структур, що виникають у різних за природою відкритих системах при протіканні незворотних процесів (рисунок 3.1).

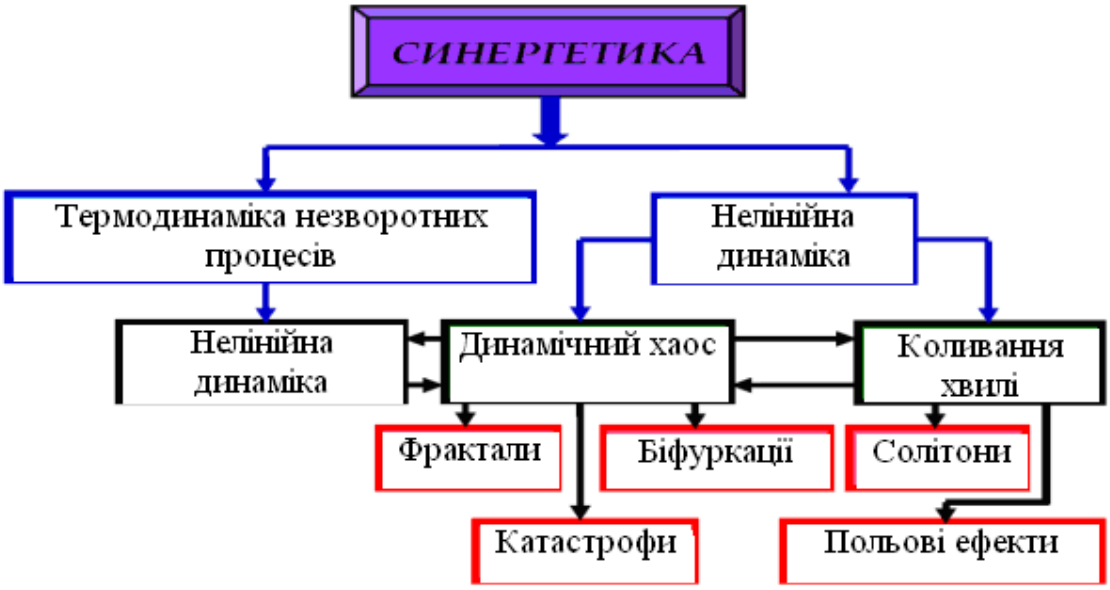


Рисунок 3.1 - Складові частини синергетики

Синергетика складається з досліджень у галузі термодинаміки нерівноважних процесів, нелінійної динаміки, хаосу, фракталів, катастроф, біфуркацій, хвиль, солітонів, польових та інших ефектів; вона використовує математичні методи, відображені на рисунку 3.2.

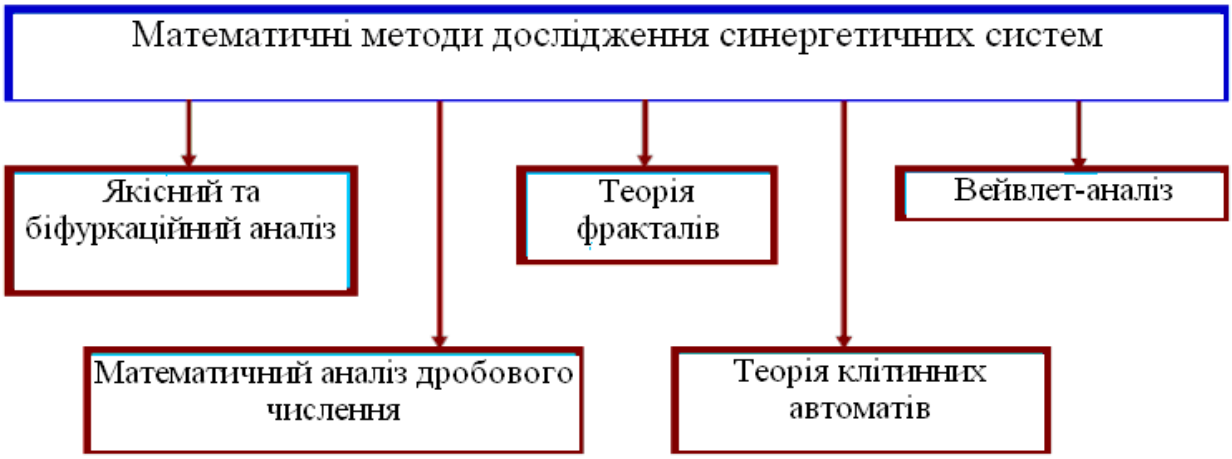


Рисунок 3.2 - Моделювання стохастичних явищ та процесів

Об'єктом дослідження у синергетиці є дисипативна система, яка обмінюється з навколишнім середовищем речовиною, енергією та ентропією (інформацією) (рисунок 3.3).

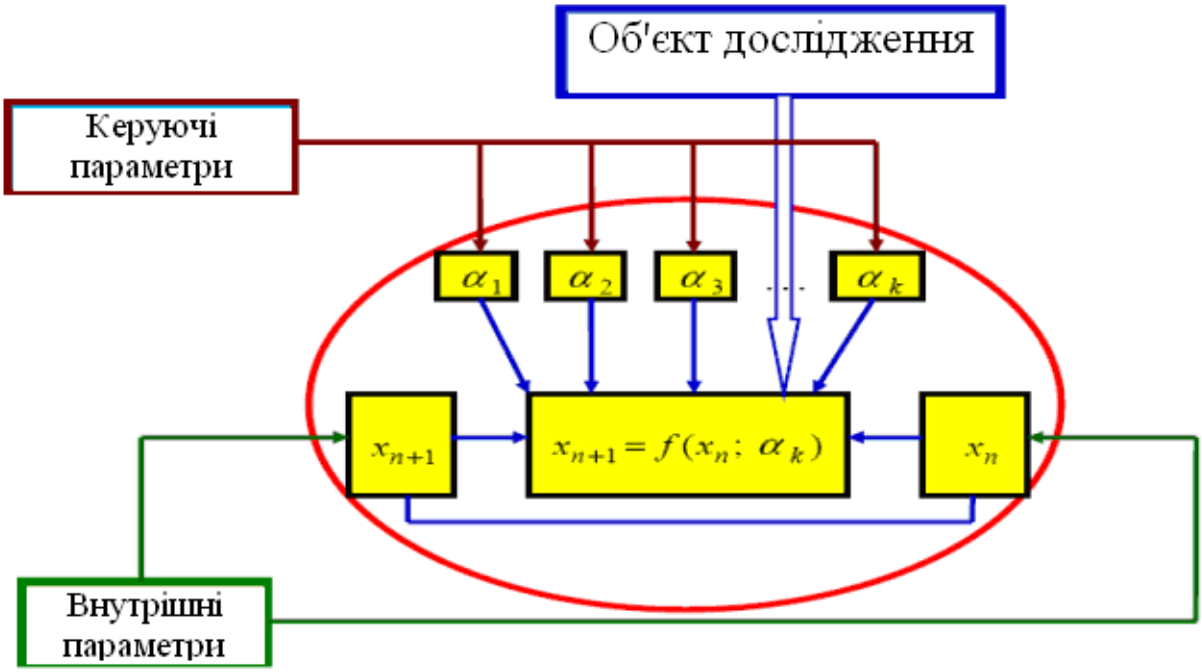


Рисунок 3.3 - Об'єкт дослідження та його параметри

Дисипативна система може бути багатокомпонентною та багатопараметричною. Під компонентами системи можуть розумітися атоми (молекули) тієї чи іншої речовини, суб'єкти ринку, члени колективу

та інші об'єкти. Параметри системи поділяють на внутрішні, між якими встановлюється детермінований зв'язок, і управляючі (або самоврядні), які приводять систему до самоорганізації за їх певних значеннях. Як приклад розглянемо локалізацію Андерсена. Переміщення електрона з досить великою енергією у просторово-періодичному потенціалі призводить до того, що він сприймається, як хвиля. Роль частоти відіграє його квазіенергія, а роль хвильового вектора - квазіімпульс. У разі хаотичного потенціалу електрон локалізується. Це свідчить про те , що розкид параметрів на одному рівні сприйняття призводить до впорядкованості на іншому. Дифузія відображає хаотичність перерозподілу частинок за обсягом системи, але в хімічній кінетиці цей процес є визначальним у формуванні періодичних у просторі та часі структур. Отже, синергетичний підхід призводить до наступного висновку: хаос і порядок – споріднені категорії, оскільки виникнення хаосу одному рівні матеріального світу веде до появи параметрів порядку на іншому (наприклад, гіпотези Гільдебранда про “газоподібність” та Френкеля-Дебая про “квазікристалічність” речовини – фізичний аналог філософського закону єдності та боротьби протилежностей). Іншими словами: якщо будь-які параметри дисипативної системи ведуть себе випадковим чином, то на певних стадіях того чи іншого процесу та певних характерних часах його протікання це може призвести до виникнення нових утворень. До них можуть бути застосовані такі поняття, як структура, параметр порядку, фазовий перехід, частинка-хвиля та ін. Це структури нового рівня, тому їх можна називати надструктурами. Для опису поведінки надструктур можна запропонувати деякий усереднений макродинамічний опис, що реалізується в моделях нелінійної динаміки. При моделюванні надструктур вводять ряд випадкових величин, що підкоряються імовірнісним законам (детермінізм-стохастика). При дослідженні жорсткої турбулентності (тригерної переміжності) на тлі хаотичної поведінки рідкого потоку виникають просторово-локалізовані піки з гігантською амплітудою, які не можуть бути змодельовані без запровадження хаотичних змінних. Основи дослідження дисипативних систем у термодинаміці нерівноважних процесів були закладені І.Р. Пригожиним, у своїх дослідженнях він називав новий напрямок у фізиці наукою про складне (наукою про самоорганізацію дисипативних структур). Методи, що були використані І.Р. Пригожиним, були успішно застосовані німецькою фізиком Г. Хакеном щодо явищ у квантових генераторах. Саме він запропонував сучасну назву "синергетика" для позначення науки про несподівану самоорганізацію диссипативних систем при перебігу хаотичних процесів [36-39] Г. Хакен так пояснює свій вибір: “Я вибрав тоді слово “синергетика”, тому що за багатьма дисциплінами у науці були закріплені грецькі терміни. Я шукав таке слово, яке виражало б спільну діяльність,загальну енергію щось зробити... Я мав на меті привести в рух

нову область науки. Вже тоді я бачив, що існує разюча схожість між абсолютно різними явищами, наприклад, між випромінюванням лазера та соціологічними процесами чи еволюцією, що має бути лише вершиною айсберг. Щоправда, у той час я не підозрював, що ця галузь може вплинути на такі віддалені галузі дослідження, як, наприклад, психологія та філософія".

До появи синергетики класична фізика займалася вивченням поведінки ізольованих, закритих і відкритих систем, стан яких перебував у малій околиці положення рівноваги. У цій галузі закони фізики описуються лінійними залежностями між внутрішніми параметрами системи (наприклад, зв'язок між потоком та термодинамічними силами в теорії Онсагера; закон Ома та інші) та при збільшенні зовнішнього впливу відбувається лише кількісна зміна внутрішніх параметрів. Це говорить про те що кількісні зміни не призводять до якісної розбудови об'єкта. Діапазон застосування лінійних теорій досить широкий, він включає практично усі розділи фізики. Проте в даний час часто доводиться мати справу з явищами та процесами, які пов'язані з виникненням якісно нового поведінки дисипативної системи. У зв'язку з цим були розроблені нелінійні моделі, які дозволяють не тільки виявити загальні закономірності хаотичної самоорганізації, а й охопити ширше коло проблем: від фізичних до соціально-економічних.

Вирішення фундаментальних наукових проблем (наприклад, загальна теорія Всесвіту) та розвиток нових технологічних прийомів (наприклад, нанотехнології) призводить до необхідності вивчення явищ та процесів, що лежать у різних галузях наукового знання (наприклад, фізики, хімії, біологічних організмів, соціально-економічних систем та кібернетичних структур).Отже, сучасна наука прагне об'єднанню всіх своїх гілок для всебічного дослідження несподіваних з хаосу структур, тобто. займається проблематикою, що лежить різних рівнях наукової творчості.

Інший характерною стороною реального світу є зміна закономірностей, моделей та способів опису при переході з одного рівня організації матерії до іншого. Прикладами можуть бути переходи від теорії елементарних частинок до ядерної фізики, від неї до атомних процесів, далі до виникнення хімічних сполук, біологічних видів та соціальних угруповань. Від наскільки нелінійні моделі зможуть просунути наше розуміння в питанні виникнення, самоорганізації та еволюції дисипативних систем; виявлення міжрівневих зв'язків та впливу рівнів один на одного залежить майбутнє синергетики. Це пов'язано з тим, що реально існуючі в природі об'єкти характеризуються стійкістю у широкому спектрі зовнішніх впливів, самовідновлюваністю, здатністю еволюціонувати з часом, співіснуванням здавалося б антогоністичних елементів. Всі ці ознаки відрізняють створене природою від речей, створених людиною. Для останніх притаманні різкі погіршення

функціонування навіть за малих змін або помилкових значеннях керуючих параметрів. Таким чином, синергетика спонукає вчених до запозичення природного досвіду та використання його для реалізації загальнолюдських завдань щодо вирішення глобальних енергетичних, екологічних та інших ресурсозберігаючих проблем. Тому недооцінка значення закономірностей саморозвитку систем, що виявляються синергетикою, може призвести до катастрофічних наслідків для всієї людської цивілізації.

Неоднозначність сприйняття синергетики вченими пов'язана як із появою нової парадигми природознавства (наука про складне, про самоорганізацію), так із використанням у синергетиці добре розроблених методів нелінійної динаміки та теорії нелінійних коливань. Синергетика не виникла на стику двох (або більше) наук, коли одна дає предмет, а інша методи дослідження. Вона застосовує методи та прийоми дослідження, які однаково придатні до різних систем поза їхнім природним рівнем. Відмінність синергетики від інших наук полягає в тому, що вона вивчає не статику, не рівноважний або стаціонарний стан системи (як, наприклад, термодинаміка і теорія інформації), а її поведінку далеко від таких станів. Вона вивчає не алгоритми та механічні атрибути, за допомогою яких можна підтримувати правильне функціонування системи (як, наприклад, кібернетика), а встановлює принципи самоорганізації та еволюційних перетворень, що призводять до тривалого, безвідмовного існування системи. Синергетика враховує флуктуації у точках розгалуження (біфуркації) на відміну теорії динамічних систем. У цілому нині, синергетика займається вивченням стохастичних (імовірнісних) систем із залежними від часу управляючими параметрами. Змінюючи параметри, що управляють, можна змінювати поведінка системи несподіваним чином, причому передбачити як поведеться система до проведення експерименту неможливо, що пов'язано з неповнотою інформації про складові дисипативної системи. Невизначеність та непередбачуваність у поведінці складових дисипативної системи, наявність резонансних явищ призводить до необхідності введення поняття інформації (ентропії). Нестача інформації призводить до відмови від індивідуального опису "часток", переходу до різних усереднень при дослідженні властивостей системи цілому (наприклад, ансамблі підсистем, тимчасове усереднення тощо), неминучим квантовим флуктуаціям та залежності еволюції деяких систем від початкових чи граничних умов. Стохастичність дисипативної системи пов'язана також із можливою втратою стійкості при деяких значеннях керуючих факторів, одні з яких змінюються швидше за інших. Повільні параметри стану дисипативної системи прийнято називати параметрами порядку. Швидкі змінні стани системи зазвичай виражаються через параметри порядку, у результаті кількість незалежних змінних, необхідні опису стану системи, значно знижується. Залежність швидких змінних параметрів порядку відображає синергетичний принцип

підпорядкованості. Проілюструємо принцип підпорядкованості на прикладі яру (рисунок 3.4).

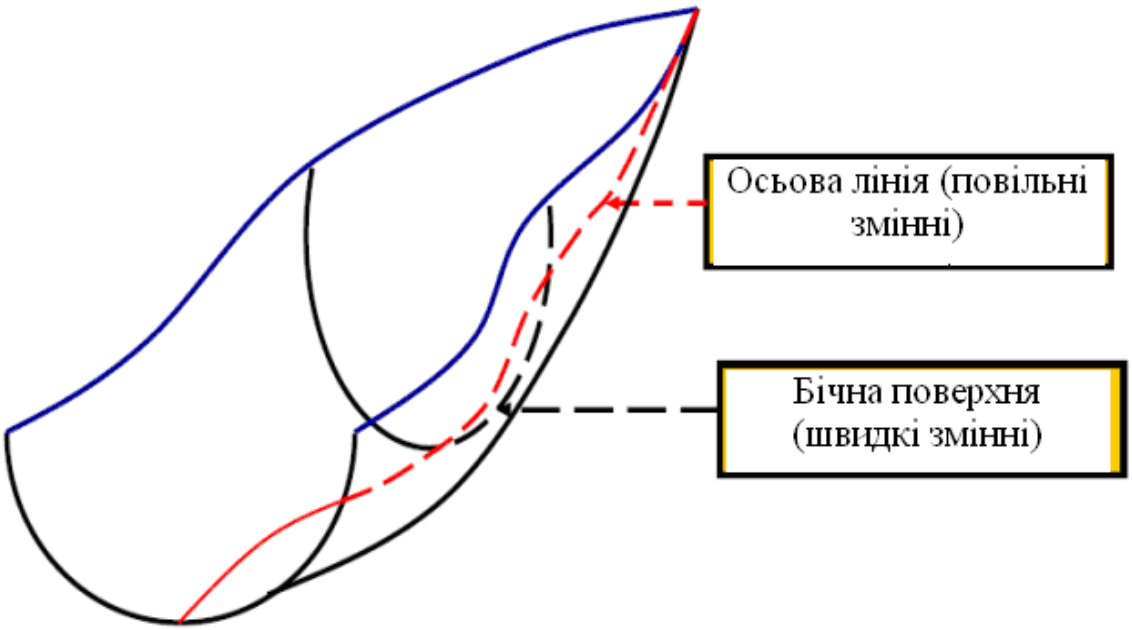


Рисунок 3.4 - Яр: повільні та швидкі змінні системи (Рисунок 3.5) викликають появу структур, що самоорганізуються

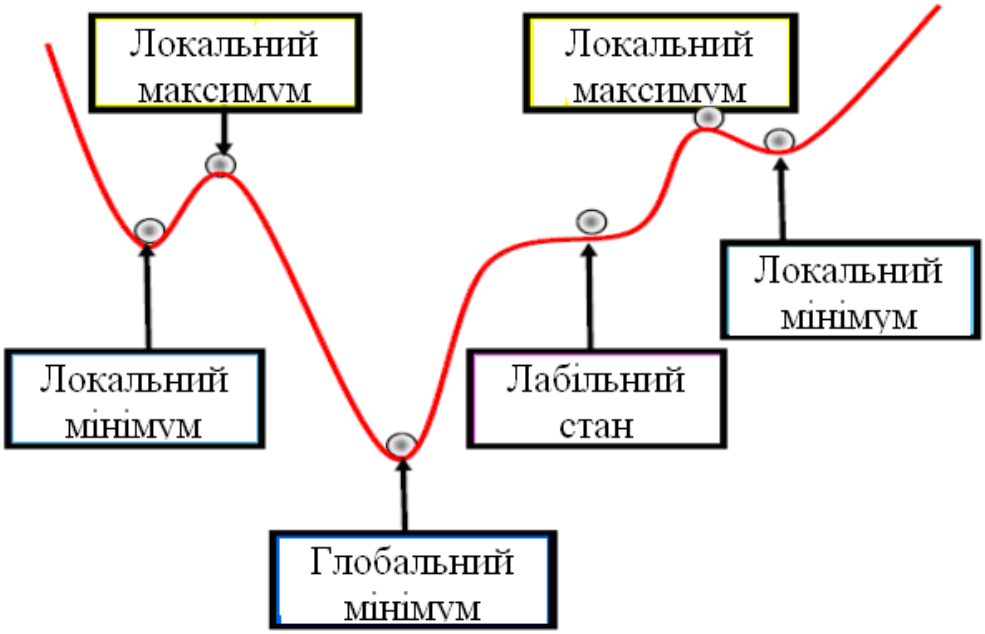


Рисунок 3.5 - Різні стани дисипативної системи

Очевидно, що мінімум функції, що описує яр, буде відповідати найнижчій точці на землі, розташованій на дні яру. Усе точки, що лежать на осьової лінії яру, визначаються повільними змінними (параметрами порядку). Рухаючись вздовж осьової лінії, можна знайти найнижчу точку яру, а отже, і сталий стан системи. Якщо рухатися вздовж лінії, яка

проходить по стінках яру, можна знайти локальний мінімум, який відповідає певному значенню параметра порядку.

Якщо параметр порядку визначає локально стійкий стан дисипативної системи, то його структура залежить від значення параметра порядку. Якщо такий керуючий параметр виходить за межі локально стійкого стану, то система переходить у новий стан. Зазначимо, що з часом повернення системи у вихідний стан є необов'язковим. Особливо яскраво ця необов'язковість повернення до попереднього положення спостерігається поблизу точок розгалуження (точок біфуркації). В околі точки біфуркації досить малий зовнішній вплив може призвести до значних наслідків, які неможливо передбачати: виникають кореляції в станах розташування та рухи складових частин, що спостерігаються на макроскопічних відстанях протягом тривалого часу. Кооперативна поведінка компонентів призводить до виникнення з хаосу впорядкованих областей, які самоорганізуються та еволюціонують. Виникаюча нелінійність у поведінці системи призводить до появи зворотних і пов'язаних із нею можливостей управління властивостями і характеристиками системи .

Хаотичність і нелінійність динамічної моделі породжують стохастичні алгоритми управління у багатовимірному фазовому просторі. Приклад з яром показує, що у цьому просторі існують малорозмірні підпростори, які були названі руслами. Русла використовуються для побудови простих і ефективних теорій, що дозволяють за допомогою невеликої кількості змінних описувати спостережувані явища та процеси, що протікають, розраховувати можливі варіанти, прогнозувати майбутню поведінку системи. В околиці кінцевих точок русла, визначення яких саме по собі є важливим теоретичним завданням, відбувається швидке наростання числа змінних для опису поведінки системи. Область детермінованого прогнозу значно звужується, зростає можливість різких змін, як у внутрішньому устрої системи (аж до її розпаду), і її властивостей. Закономірності, які виникають отримали назву джокерів (області стохастичності). Джокер характеризує недолік інформації та зростання ентропії, може бути пов'язані з точкою біфуркації, де малі випадкові шуми викликають різкі зміни у системі. В областях джокерів доводиться вдаватися до наступних заходів:

- Використовувати ймовірнісні обчислення;
- Використовувати статистичні експериментальні дані;
- Знаходити асимптотики при опису прямування параметрів порядку до певних значень;
- Враховувати вплив зовнішніх факторів.

Перехід від русла до області стохастичності може призводити до маніпуляцій даними та створення лженаукових теоретичних побудов (наприклад, ефірний вітер, теплород). У цьому випадку можлива поява

здавалося б псевдонаукових положень, які можуть надалі стати основними поняттями тієї або іншої науки (наприклад, кібернетика чи генетика). Способами позбавлення від таких недоліків є :

• відшукання нового русла, де джокери перетворюються на параметри порядку (усвідомлення нового рівня організації матерії);

• накопичення нових експериментальних даних та побудова на їх основі нової теоретичної моделі (формування нової наукової парадигми). Ця модель повинна не тільки описувати результати експериментів, включати визнані теоретичні побудови, але і передбачати появу нових фактів.

При створенні нових моделей велику роль відіграють здоровий глузд і інтуїція. "Здоровий глузд" консервативний за своєю суттю, використовує логіку та накопичений досвід, залишається в рамках старих уявлень та намагається шляхом їх ревізії створити нове знання. "Інтуїція" базується на випадковому осяянні при використанні підсвідомого та надсвідомого осмислення поставленої проблеми та великого досвіду роботи з різними науковими знаннями. Таким чином, системи, створені природою, інтуїтивно (хаотично) шукають русла і детерміновано (за принципом: причина-наслідок) шукають вихід із областей джокерів.

Подібна поведінка природних систем, мабуть, пов'язана з принципом самозбереження (наприклад, сила дії дорівнює силі протидії, принцип Ле Шательє-Брауна). Забезпечення самозбереження має призводити до вузькості областей джокерів між руслами. Отже, джокери мають описуватися "компактними" розподілами, щоб їх вихід за межі цих областей був б обмежений малим часом існування поза межами своєї області. Проте число таких систем мале, і частіше в практичних умовах спостерігаються системи з розподілами, які мають “довгі хвости”, які спадають вельми повільно (області масштабних джокерів). Тому найбільшу небезпеку для існування системи становлять, як рідкісні, так і найчастіше події, що відбуваються. Вони можуть призвести до розвитку резонансних процесів і, як наслідок, до руйнування системи на цьому рівні організації матерії та її самоорганізації на іншому рівні. Якщо "компактні" розподіли можуть бути охарактеризовані малою кількістю числових параметрів, то "хвостові" розподіли повинні описуватися за допомогою розмірів областей рідкісних і подій, що найчастіше відбуваються. Ці області мають інші статистичні параметри, які називаються масштабами (scales) та характеризують області масштабних джокерів.

3.2 Поняття нестійкості

Якщо дисипативна система розташовується у локальному, чи глобальному мінімумі, то при малих зовнішніх впливах вона знаходиться

на околиці стійкого стану (рисунок 3.5). З наростанням амплітуди зовнішніх впливів система може перейти в новий і, можливо, нестійкий стан (локальний максимум або лабільний стан на рисунку 3.5). У природних системах завжди виникають випадкові процеси, які зумовлені змінами у зовнішньому середовищі.

Ці зміни можуть перевести систему в нестійкі стани, які різняться на вигляд і за своєю природою. Найчастіше виникаючі нестійкості можуть сприяти переходу відкритої системи у стан з якісно новими характеристиками (наприклад, фазовий перехід газ-рідина; виникнення областей упорядкованості при хаотичному переміщенні частинок).

Як приклад виникнення нестійкості розглянемо переливання води з однієї судини в іншу за допомогою рівно-плечевого сифона (рисунок 3.6)

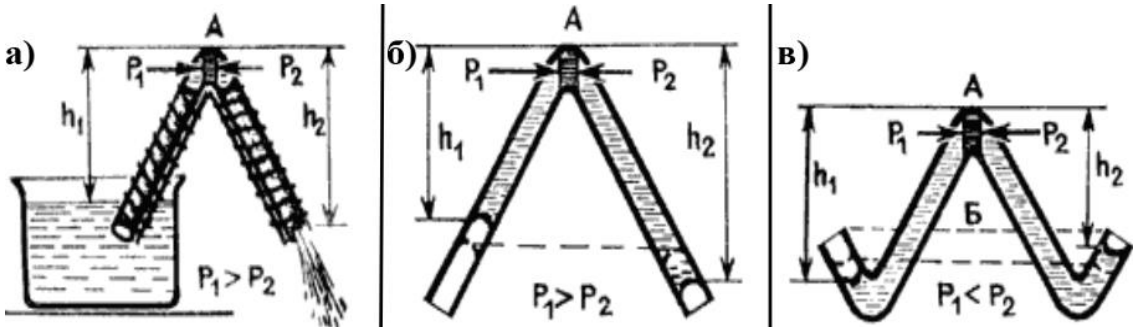


Рисунок 3.6 - Дослід із рівноплечевим сифоном: а) робота сифона; б) виникнення нестійкості; в) W-подібний сифон

Для проведення експерименту у домашніх умовах достатньо виготовити сифон з будь-якої гнучкої трубки, наприклад, поліхлорвінілової. Для утримання форми сифона слід обмотати гнучку трубку мідним дротом певним товщина. Зігнувши трубку у вигляді грецької літери Λ і опустивши один кінець у посудину з водою, створіть розрідження в іншому кінці трубки, видаливши за допомогою відсмоктування повітря із цього плеча сифона. Після виконаних дій вода сама потече через сифон. Для пояснення цього явища вивчимо поведінку системи на околиці вершини сифона (об'єм А). У лівому плечі сифона тиск дорівнює $P_1 < P_{атм}$, втричі менше ніж атмосферний тиск $P_{атм}$ водяного стовпа заввишки h_1 . Аналогічно, у правому плечі тиск $P_2 < P_{атм}$ на величину тиску, створюваного стовпом води заввишки h_2 (рисунок 3.6а). З огляду на те, що $h_2 > h_1$, тиск $P_1 > P_2$ (тобто існує градієнт тиску). Саме ця відмінність тисків і змушує воду підніматися вгору сифоном і переливатися через край судини. Якщо затиснути праве плече сифона пальцем і підняти вертикально нагору, наприклад, на висоту $h_1 / 2$, то вода утримуватиметься в сифоні доти, доки буде закрито праве плече. Якщо відкрити праве плече, вода випливе з сифона (рисунок 3.6 б). Отже, такий стан системи є нестійким та суттєво залежить від зовнішніх умов (закрито

чи відкрито праве плече сифона). Нестійкість виникає через малі зміни тиску праворуч і ліворуч від об'єму А, так як після підйому Λ-подібного сифона з води тиск по обидва боки від об'єму А однаковий. Зниження тиску з однієї зі сторін об'єму А призводить до виникнення різниці тисків, що викликає перебіг рідини. Чим більше витікає води, тим швидше збільшується різниця тисків і сифон звільняється від рідини з зростаючою швидкістю. При загинанні плечей сифона виникає W -подібна структура, що стабілізує стан системи (рисунок 1.6). При випадкових переміщеннях води тиск в іншому плечі сифона наростає і різниця тисків, що виникає, повертає воду у вихідне положення. Розглянутий експеримент показує, що спочатку стійкий стан має свої межі: при досягненні зовнішніми змінами певних величин відбувається перехід системи на новий стан. Якщо ж система змінює свою структуру, вона може знову набути стійкий стан. Для виведення із положення рівноваги системи треба знову змінити зовнішні умови. Наприклад, якщо подути в ліве плече W-подібного сифона (вам потрібно прикласти деяке зусилля для подолання інерційності системи) і змусити воду піднятися до зрізу правого плеча Б, то стійкість знову зникне: вода повністю виллється із сифону. Таким чином, навіть такий простий експеримент демонструє, що підстроювання системи під зовнішні умови, що змінюються, має свої обмеження. З іншого боку, досягнення нового стійкого стану можливе за рахунок зміни структури системи, яке має інші обмеження своєї стійкості.

Інший експеримент, який показує виникнення нової структури при досягненні системою нестійкого стану, можна зробити з однаково намагніченими голками. Встромивши голки в шматочки пробок (пробки слід покрити парафіном, щоб не вбирали воду, тобто. зробити із пробок поплавки), помістіть їх на поверхню води (рисунок 3.7).

Мабуть іще зі шкільного курсу фізики відомо, що однойменні магнітні полюси відштовхуються (градієнт напруженості магнітного поля). Тому однаково орієнтовані, намагнічені голки змусять поплавці рухатися у різні сторони, змушуючи їх піти один від одного на максимально можливу відстань (до стінок склянки). За цих умов експерименту розбігання поплавків призводить до зниження енергії системи магнітних голок. Залежно від кількості поплавків досліджувана магнітна система приймає різні геометричні, правильні фігури: три голки – поплавці утворюють рівносторонній трикутник; чотири голки – квадрат; шість голок – правильний шестикутник.

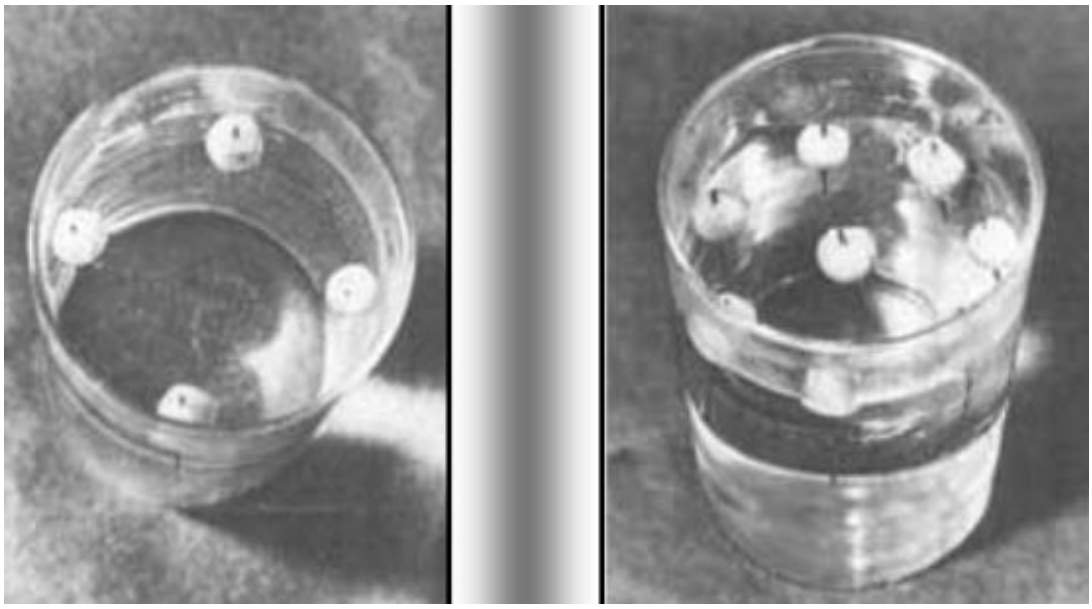


Рисунок 3.7 - Розподіл магнітних поплавців

При збільшенні кількості голок виникає кілька стійких розташування поплавків, зокрема, при деякій кількості голок один з поплавців займе положення в центрі водної поверхні (самостійно проведіть експеримент і визначте мінімальну кількість магнітних поплавців, при якому спостерігається зазначений розподіл). Виникнення впорядкованості при досягненні системою нестійкого положення можна продемонструвати і в експерименті з лампадою (гасова лампи, рисунок 3.8) або запаленою свічкою накритою скляною частиною лампади.

Рисунок 3.8 - Лампа- насос

Розділимо горловину скляної частини лампади Т-подібною, картонною перегородкою. Через деякий час картон нагріється і почне тліти, посудина наповниться димом. Течія диму покаже, що з одного боку перегородки відбувається втягування свіжого повітря, а дим виходить із судини з іншого боку перегородки. Після вилучення перегородки впорядкований рух повітряних потоків зникає, рух повітря у горловині лампади стає хаотичним. При поверненні перегородки на місце знову спостерігається поділ потоків повітря, при цьому дим може піти з іншого боку перегородки, ніж він рухався спочатку. Це говорить про невизначеність, притаманну всім хаотичним динамічним системам: до проведення експерименту зображеному на рисунку 3.8 неможливо передбачити випадковий перерозподіл усередині системи. З іншого боку, введення перегородки вносить додаткову інформацію до системи, яка змушує потоки рухатися впорядкованим чином. Ще один синергетичний експеримент із виникненням упорядкованих структур у дисипативній системі можна провести в домашніх умовах на кухні. Налийте на сковороду масло і зверху посипте сухою срібною фарбою (можна також використовувати тальк або борошняний клейстер).

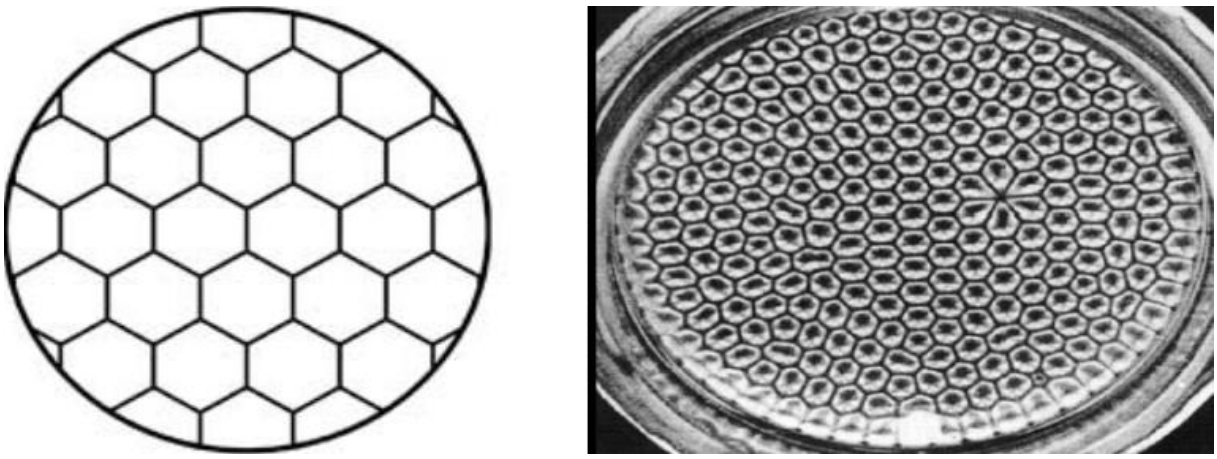


Рисунок 3.9 - Комірки Бенара, які виникають у шарі рідини, що підігрівається

При нагріванні сковороди виникає різниця температури між дном сковороди та поверхнею олії (градієнт температури). До досягнення критичної різниці температур рідина нерухома. При критичній різниці температур вся поверхня рідини розбивається на правильні шестигранники (комірки Бенара, рисунок 3.9), всередині яких рідина піднімається до поверхні, а по гранях шестигранників остигла рідина опускається на дно. Розмір комірок Бенара практично не залежить від форми та розмірів сковороди, проте їхня форма визначається граничними поверхнями рідкого шару. Комірки Бенара виникають при висиханні озер (градієнт концентрації солі, рисунок 3.10), при застиганні лави та в інших природних явищах.

Рисунок 3.10 - Гексагональні сольові структури, що виникають при висиханні озера

Більш складні та незвичайні структури виникають у хімічних та біологічних системах (рисунок 3.11).

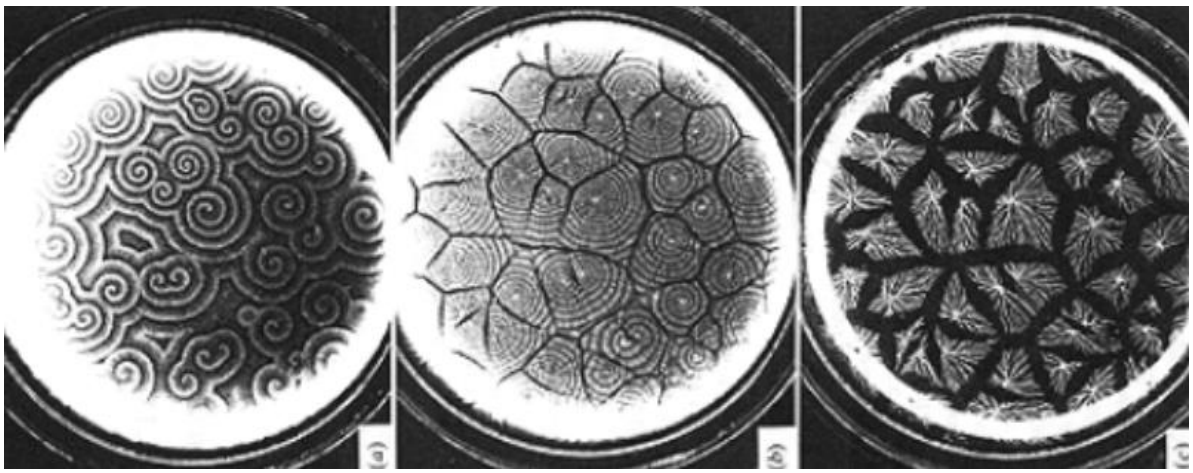


Рисунок 3.11 - Послідовність структурування популяції амеб Dictyostelium

Розглянуті експерименти показують, що виникнення нестійкості обумовлено досягненням тими чи іншими потоками критичних значень.(кінетичні переходи). У хаотичних системах при цьому можлива поява впорядкованих областей, або відбувається зміна симетрії внутрішньої структуризації.

3.3 Нерівноважні системи та нелінійна динаміка

Ізольовані та закриті термодинамічні системи з часом переходять у рівноважний стан. Воно характеризується сталістю інтенсивних величин (тиску P, температури T і хімічних потенціалів компонентів μ i (i =1÷l , l – число компонентів у системі)), зміни яких викликає виникнення потоків інтенсивних величин (внутрішньої енергії U, обсягу V та числа частинок N i). У ізольованих системах число частинок незмінно, тому відбувається збереження всіх інтенсивних властивостей системи. Виникаючі термодинамічні сили та відповідні їм потоки прагнуть повернути систему у положення рівноваги. Закрита система обмінюється із зовнішнім середовищем енергією, проте процеси, що протікають, призводять до врівноваження енергетичних потоків, які виходять із системи і повертаються в неї. Закрита система перетворюється на стаціонарне рівноважний стан. У цьому стані частинки здійснюють броунівські рухи, що визначають тепловий хаос. Зниження температури до критичної Tc призводить до виділення підсистеми з частковою впорядкованістю (фазовий перехід), що характеризується виникненням ближнього порядку деяких областях системи. Ці підсистеми прагнуть поєднання, що призводить до виділення нової фази. Новий стан системи відрізняється від попереднього стану як за видом, так і за фізико-хімічними властивостями. Подальше зниження температури призводить до появи далекого порядку та скорелювання поведінки частинок (ефект когерентності). Когерентність поведінки пов'язана з проявом просторово-часової або періодичної структури системи, яка притаманна матерії у будь-якому агрегатному стані, але нівелюється тепловими та іншими процесами. Кооперативні явища пояснюються виникненням далеко-діючих сил. Так у реакції Білоусова-Жаботинського вони проявляються у вигляді коливань концентрацій реагентів, незважаючи на те, що радіус взаємодії між молекулами в мільярд разів менший за лінійні розміри самої системи. Виникнення порядку в спочатку хаотичному середовищі є проявом нерівноважності, нестійкості та нелінійності динамічної поведінки досліджуваної системи. Ще більш наочно ці ефекти виявляються у відкритих системах, які обмінюються з термостатом як енергією, а й частками. Чим далі така система уникає рівноваги, тим більше гармонійних мод виявляється в її поведінці. Зовнішні впливи сприяють посиленню одних та придушенню інших гармонік. Поведінка будь-якої системи може бути представлена нескінченним рядом гармонік (мод) з тимчасовим коефіцієнтом перед кожною. Якщо моделі лінійної системи різні види гармонійних коливань (гармонік, чи мод) незалежні, то моделі нелінійної – встановлюється цілком певна зв'язок з-поміж них. Причому характер зв'язку цілком визначається нелінійністю. Явище може здійснюватися таким чином, що один вид коливань (одна гармоніка)

енергетично підтримує іншу, тобто. туди накачується енергія. В такому випадку енергія, що надходить, перерозподіляється – через нелінійність – не по всьому спектру коливань (мод), а суто вибірково. Тобто в нелінійному середовищі можуть підтримуватись, підживлюватися енергією лише певні види коливань, певні гармоніки. Це призводить до обміну інформацією (ентропією S) з навколишнім середовищем. Виникнення порядку у таких системах пов'язані з зростанням ентропії (екстремальний принцип виробництва ентропії І. Пригожина). У зв'язку з цим такий хаос у відкритій системі прийнято називати детермінованим хаосом (динамічний хаос, рисунок 3.12).

Рисунок 3.12 - Еволюція до динамічного хаосу

Розупорядкованість, нестійкість та нелінійність динамічного портрета системи змушує її до постійного пошуку у просторі своїх станів стійкого становища (принцип пошуку енергетичного та інших мінімумів), що призводить до створення та накопичення інформації. Відкрита система виступає у ролі сепаратора цілої послідовності рівноймовірних станів, більшість із яких вона відсіює через нестійкість тих чи інших своїх параметрів. Така система, змінюючи свою структуру, шукає нове русло з поволі мінливими характеристиками, які сумісні з динамікою змін самої системі (принцип сумісності із зовнішніми умовами існування).

Боротьба двох протилежних процесів: поглинання та відтоку енергії, частинок та інформації призводить до виникнення дисипативних структур. Вибірковість або чутливість системи по відношенню до окремих гармоніків впливу зовнішнього світу пов'язана з наявністю системи власних частот коливань. Наприклад, електрони на рівнях Ландау в однорідному магнітному полі реагують на квантову електромагнітну хвилю лише тієї частоти, яка відповідає переходу електрона з одного

енергетичного рівня в інший. В Насамперед, цей процес пов'язаний з наявністю дисипації (розсіювання) енергії, частинок та інформації (ентропії): відбувається придушення тих гармонік (коливань), які не відповідають власним частотам коливань. Проте зовнішні впливи великої амплітуди та частоти можуть призвести до руйнування спектра власних частот, що веде до переходу системи на новий рівень опору зовнішньої агресії. Таким чином, виникнення зростаючого хаосу в системі призводить до її прагнення до нового стійкого стану, який має обмежену кількість власних мод (принцип вибірковості). Малі зовнішні збурення з власною частотою системи можуть викликати значні зміни внутрішніх параметрів (явище резонансу, рисунок 3.13), а широкополосні за частотою впливу – лише до рухів поблизу сталого стану.

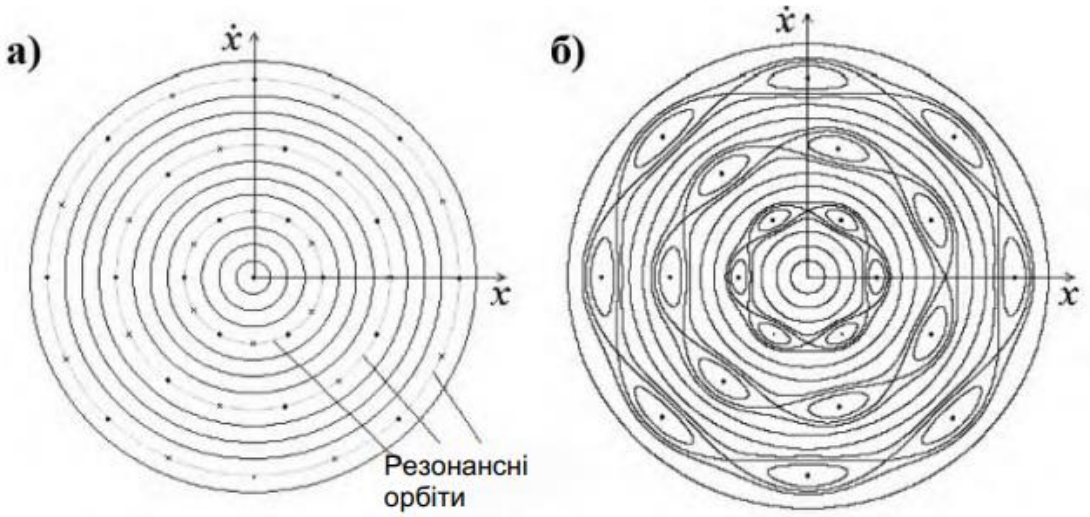


Рисунок 3.13 - Резонансні орбіти нелінійного маятника:
а) при нескінченно малій амплітуді періодичного зовнішнього впливу; б) при обмеженій амплітуді

Наявність зворотних зв'язків (позитивних або негативних) між системою та зовнішнім середовищем породжує виникнення хаосу, нестабільності та нелінійності у динамічній картині об'єкта дослідження. Наприклад, в автокаталітичних реакціях каталізатор (інгібітор) не тільки прискорює (уповільнює) швидкість перебігу реакції, а й збільшує свій вміст у системі рахунок відтоку продуктів реакції. Перебіг екзотермічних (ендотермічних) реакцій з виділенням (поглинанням) тепла призводить до відтоку (припливу) тепла ззовні, що викликає гальмування чи прискорення хімічної реакції. Отже, зворотні зв'язки формують термодинамічні потоки та сили, що змушують систему шукати нову стійку рівновагу.

Відомо, що у рівновазі параметри системи приймають деякі усереднені тим чи іншим чином значення. Дослідження цих параметрів на мікроскопічному рівні покаже їх спонтанні відхилення від цих значень. І

тут говорять про появу флуктуацій тих чи інших величин, тобто наявність флуктуацій свідчить про постійну самоперевірку системою свого стану (принцип самоконтролю). Імовірнісний характер виникнення флуктуацій лише підкреслює безперечний факт інформаційної взаємодії об'єкта із зовнішнім оточенням, який заснований на методі проб та помилок. Зазначимо, що у рівноважних системах флуктуації загасають, тому що не мають відповідного підживлення ззовні. У нерівноважних системах деякі з флуктуацій починають наростати, що змушує систему еволюціонувати (принцип розвитку) у бік нового динамічного режиму існування. Перехід до цього режиму описується рівняннями нелінійної динаміки.

Рівняння нелінійної динаміки можуть мати рішення, що якісно розрізняються, що відображають множинність шляхів еволюції дисипативної системи. Для відображення поведінки рішень було запроваджено поняття фазового простору, в якому положення системи відображається просторово-часовими координатами і швидкостями руху. Якщо у фазовому просторі досліджуваного об'єкта присутні нерухомі точки та траєкторії, які утворюють фазовий портрет системи, то говорять про структуру фазового портрета (наприклад, дисипативного осцилятора, рисунок 3.14). Відображенням періодичних рухів є наявність у фазовому портреті граничних циклів (рисунок 3.14), навколо яких відбувається скупчення фазових траєкторій.

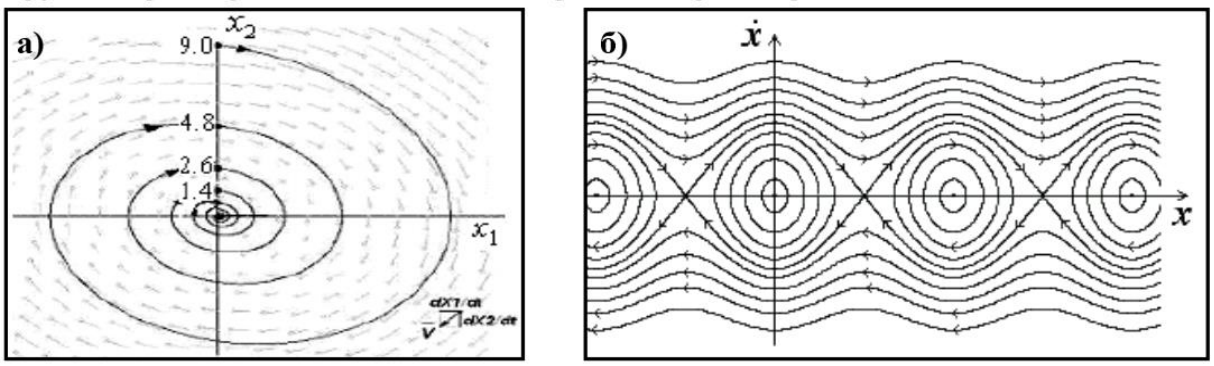


Рисунок 3.14 - Фазові портрети дисипативного (а) та звичайного (б) осциляторів

Стійкі стани зображуються точкою (стійким фокусом), до якого по спіралям сходяться фазові траєкторії (рисунок 3.14а). Нестійкі стани відображаються точкою, від якої спіралями фазові траєкторії розходяться. Граничні цикли та стійкі фокуси Пуанкаре назвав атракторами. При попаданні системи в область тяжіння атрактора вона зобов'язана (рисунок 3.15)

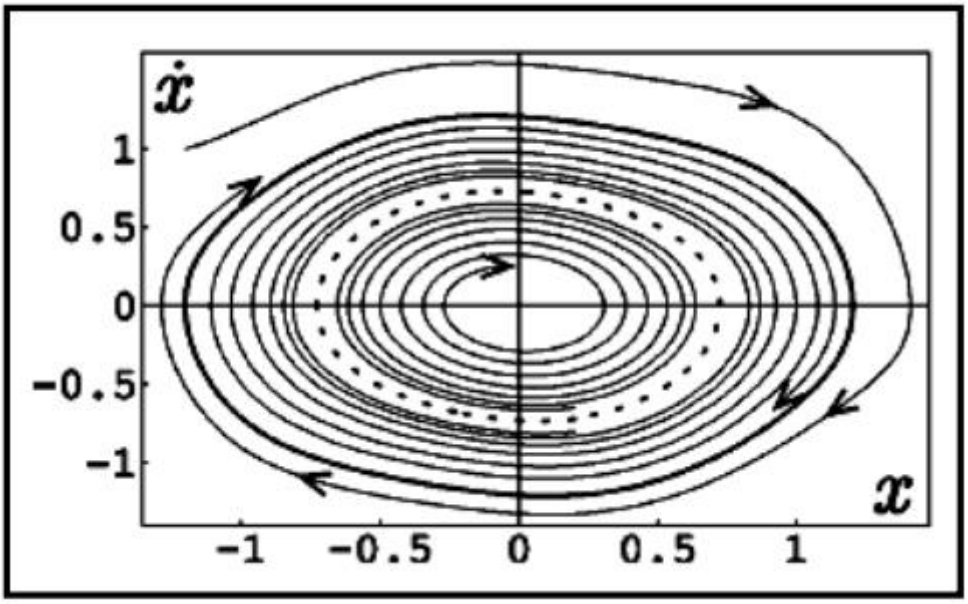


Рисунок 3.15 - Граничний цикл

здійснювати повільну еволюцію в його бік, а внутрішня побудова системи починає змінюватися відповідно до сценарію, закладеного в атракторі. Іншими словами, атрактори є еволюційними цілями на відповідному рівні світобудови, яких прагнуть усі системи під впливом потоків енергії, які змінюються у часі, кількості речовини та інформації. Атрактори визначають відносно стійкий стан об'єкта, змушуючи геометрією фазового портрета об’єкта зміщуватися в свою бік. Тому їх іноді називають "воронками" або "жерлами". Якщо система знаходиться в околиці атрактора, вона відчуває асимптотичну стійкість: виходячи з цього стану під впливом зовнішніх сил, система через певний проміжок часу знову повертається до атрактору по іншій фазовій траєкторії.

Крім атракторів у фазовому просторі зустрічаються точки біфуркації. (розгалуження) та дивні атрактори (наприклад, дивний атрактор Лоренца, рисунок 3.16).

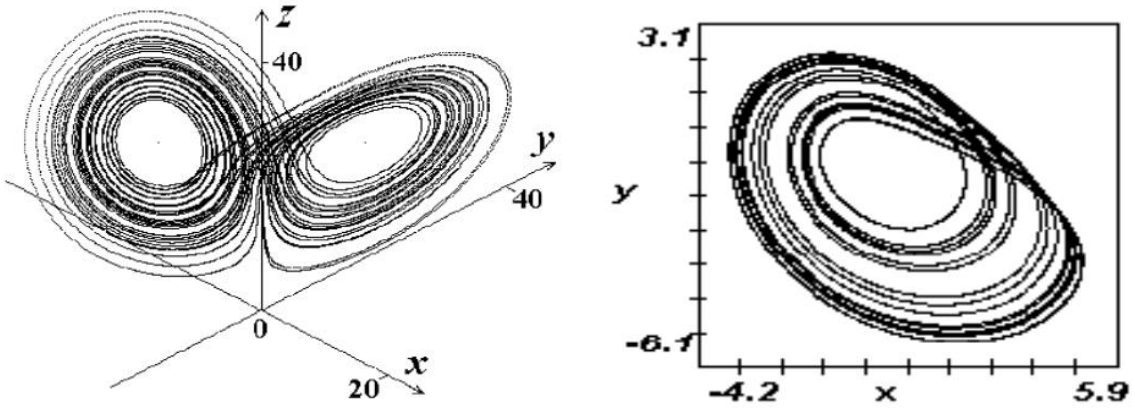


Рисунок 3.16 - Дивні атрактори Лоренца

Поблизу точки розгалуження величини флуктуацій різко зростають: система проводить серед них природний відбір за їхньою відповідністю зовнішнім умовам та своєму внутрішньому стану. Вибір того чи іншого напряму еволюції визначається не за детермінованими канонами, а збігом обставин.

Переміщення по новому шляху розвитку може призвести як до прогресивніших властивостей системи, так і розвинути в ній деградаційні процеси. Тут чітко простежується залежність від керуючих параметрів, що визначають вид фазового портрета об'єкта, що досліджується. Дивний атрактор зображується у фазовому просторі як області з хаотичним нагромадженням фазових траєкторій. У цих областях динамічні системи є повністю стійкими, мабуть, ці області є областями джокерів. Система може перебувати лише в певних станах, обмежених областю дивного атрактора (можливо, дивний атрактор відповідає лабільним рівновагам, які є нестійкими, та такими, що мають обмежену область існування).

Дослідники нелінійних динамічних систем, як правило, багато уваги приділяють структурі фазового портрета, проте часто замовчують про наступне:

• скільки в системі може бути простих та дивних атракторів, а також точок біфуркації;

• у яких областях фазового простору слід очікувати їхньої появи;

• як залежать ці утворення від обраних керуючих параметрів, початкових та граничних умов;

• як впливають значення керуючих параметрів на вибір нового сталого стану;

• як видозмінюється фазовий портрет при протіканні кінетичних фазових

переходів;

• перебіг яких внутрішніх процесів у системі формують ті чи інші

зміни зовнішніх умов;

• за яких обставин виникає нова інформація;

• як впливає інформація, що виникає і запам'ятовується, на подальшу еволюцію системи;

• чи властива нелінійним динамічним середовищам будь-яка ієрархія;

• чи існує глобальний еволюційний мінімум?

На ці та деякі інші аналогічні питання синергетика поки що не має відповіді, тому необхідні подальші дослідження ,як динаміки нелінійних систем, так і нерівноважних нелінійних процесів на всіх рівнях організації неорганічної і живої матерії.

4 ДИНАМІЧНІ СИСТЕМИ: ХАОС, ІНФОРМАЦІЯ, ОБОРОТНІСТЬ, ЦИКЛИ

4.1. Основні визначення

Динамічні системи характеризуються набором змінних, значення яких може бути визначено за допомогою розв'язків відповідних рівнянь її руху.

Система визначається місцезнаходженням та швидкістю руху, які відображаються у фазовому просторі у вигляді точки.

Серед динамічних систем виділяють два види динамічних систем: консервативні та дисипативні. Стан других на відміну від перших систем залежить від початкових умов. При досягненні рівноважного стану консервативні системи можуть залишатися у ньому нескінченно тривалий час за постійних зовнішніх умов. Дисипативні системи досягають режиму поблизу атракторів. Однак у дисипативних системах можуть виникати хаотичні рухи при будь-якій малій зміні початкових умов, внаслідок чого неможливо передбачати поведінку системи на великих інтервалах часу. Такі зміни призводять до виникнення хаосу з порядку та порядку з хаосу (див., наприклад, картину Ешера на рисунку 4.1).

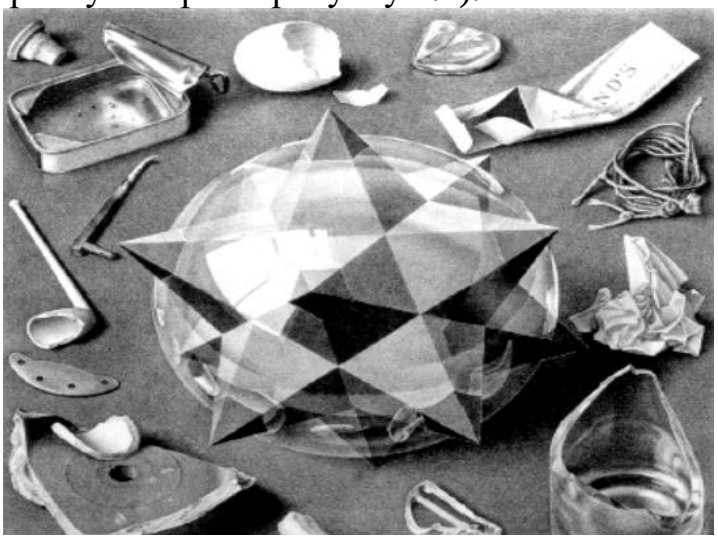


Рисунок 4.1 - Порядок та Хаос Ешера

Вперше явище виникнення хаосу в механічній системі було виявлено Пуанкаре (1892) при вивченні динаміки руху трьох тел. Він писав: "Вражаєшся складності цієї фігури, яку я навіть не намагаюся зобразити. Ніщо не є більш підходящим, щоб дати уявлення про складність завдання трьох тіл, у якій немає однозначного інтеграла та ряди розходяться…". Вперше експериментальне спостереження хаосу було здійснено для генератора Ван дер Поля, який демонстрував нелінійні періодичні автоколивання. Іншим прикладом прояви хаотичного руху є

виникнення турбулентності при течії рідини в паралельних каналах, яке вперше спостерігав О. Рейнольдс (1883).

Термодинамічна система, що наближається до рівноваги, проходить у фазовому просторі по одній траєкторії, що заповнює майже всі точки енергетичної поверхні (ергодична теорема Больцмана-Еренфеста). Однак більш важливою проблемою є стійкість цієї траєкторії по відношенню до скільки завгодно малих змін початкових умов. Дослідження в цієї області призвели до введення сильнішого властивості нелінійної динамічної системи, ніж ергодичність, - перемішування. Відмінність консервативних систем від дисипативних у тому, що енергія консервативних систем не змінюється з часом, а енергія дисипативних систем розсіюється і перетворюється на інші форми. Крім того, обсяг фазового простору, що відповідає консервативній системі, не змінюється з протягом часу, а лише змінює свою форму. Фазовий об'єм дисипативної системи з часом зменшується і концентрується поблизу атракторів (стійкий стан рівноваги чи граничний цикл). Безліч точок фазового простору, з яких фазові траєкторії наближаються до атрактора, називається його басейном. Третя відмінність консервативних систем від дисипативних полягає в наступному: флуктуації, що виникають у консервативній системі, пригнічуються, а дисипативной системі вони можуть посилюватися і призводити до появи динамічного хаосу (на фазовій площині він відповідає дивному атрактору). Незважаючи на те, що динамічний хаос начебто суперечить детермінованому передбаченню поведінки системи, але ця суперечність здається. Для його зняття розглянемо низку простих дискретних динамічних моделей:

1. "Зуб пили". Розглянемо відображення $x_{n+1} = \{\ \} 2 x_n$ де фігурні дужки означають дрібну частину числа $2 x_n$ (ітераційна діаграма цього відображення представлена на рисунку 4.2).

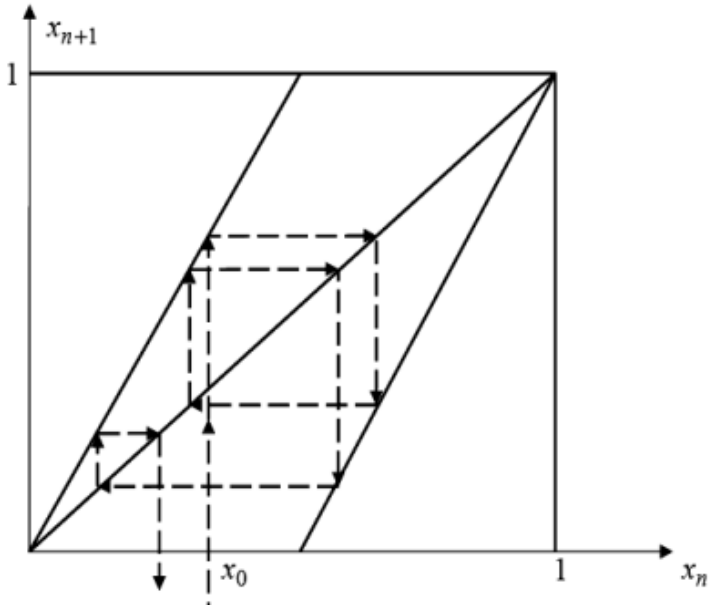


Рисунок 4.2 - Ітераційна діаграма динамічної системи "зуб пили"

Нехай, як початкове значення вибрано деяке число x 0 з інтервалу від 0 до 1, яке напишемо в двійковій системі обчислення:

$x_0 = 0{,}010100 \ldots,$

причому нуль після коми вказує, що число знаходиться у лівій половині інтервалу [0; 1]. Наступний крок ітерації призводить до переходу цього числа на праву половину цього інтервалу та зсуву цифр ліворуч . Число, що виявилося ліворуч від коми, відкидається. Таким чином, цифра після коми фіксує розташування числа x_{n+1} у тій чи іншій половині інтервалу [0; 1]. Якщо число x_0 раціональне, воно буде представлено в двійковому коді періодичним виразом. В результаті кількох кроків ітерації знову повертаємось до значенням вихідного числа (перевірте самостійно). Це твердження є справедливим для будь-якого раціонального числа. Отже, динамічна система "Зуб пили" має нескінченну, але лічильну безліч циклів. Для ірраціональних чисел, що представляють неперіодичним двійковим кодом, безліч буде незліченним (має потужність континууму), що веде до появи динамічний хаос. Завдання послідовності нулів та одиниць довільним чином призводить до хаотичної зміни початкових умов детермінованого відображення $x_{n+1} = \{\ \} 2\, x_n$, як і створює хаос.

Знання перших n цифр після коми дозволяє впевнено передбачати поведінку системи до n-ої ітерації, але подальша поведінка системи може докорінно змінитися внаслідок відсутності інформації про чергування нулів та одиниць після n-ої цифри вихідного числа. Цей ефект пов'язаний із зміною початкових умов: знання цифр до n-ої включно. Збільшення інформації про цифри після коми до нескінченності для суб'єкта (дослідника) є абсурдним через кінцевість часу його існування. Тому нестача інформації про початкові умови має компенсуватися запровадженням несуперечливих, фізично обгрунтованих гіпотез.

4.2 Логістичне відображення

Логістичне відображення задається формулою $x_{n+1} = 1 - a\, x_{n+2}$ і зображено на рисунку 4.3.

Згідно з Уламом та фон Нейманом при значенні параметра a = 2 проведемо заміну змінної $x_n = -\cos(2\pi y_n)$. Тоді логістичне відображення набуде вигляду:

$$-\cos(2\pi y_{n+1}) = 1 - 2\cos^2(2\pi y_n) \text{ або } \cos(2\pi y_{n+1}) = 2\cos^2(2\pi y_n) - 1$$

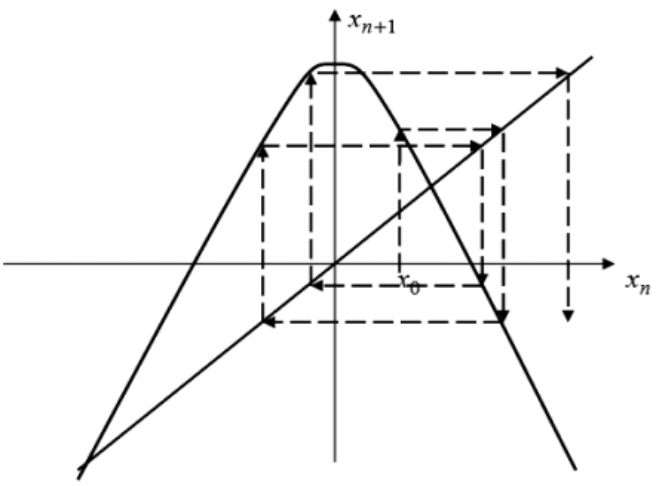


Рисунок 4.3 – "Логістичне відображення" при значенні параметра a = 2

Відповідно до тригонометричної формули 2 cos (2 α) − 1 = cos (2 α) , отже cos(2π y_{n+1}) = cos(4π y_n) . Одним із розв'язків цього рівняння є відображення “зуб пили”. У попередньому прикладі було показано виникнення хаосу, отже, і цього зображення він виникає для ірраціональних початкових умов. Якщо розглядати зворотну у часі еволюцію системи згідно з рівнянням

$$x_n = \pm\sqrt{\frac{1 - x_{n+1}}{2}}$$

Присутність знаків “+” та “–” перед квадратним коренем відображує неоднозначність при зворотному перетворенні. Якщо вказати правило відбору знаків, можна забезпечити оборотність еволюційного процесу у часі.

“Симетричний та косий тенти” описуються наступними формулами:

"косий тент" –

$$x_{n+1} = \begin{cases} \dfrac{x_n}{a}, & 0 < x_n < a \\ \dfrac{1 - x_n}{1 - a}, & a < x_n \le 1 \end{cases}$$

При значенні параметра a = 1/2 “косий тент” вироджується у “симетричний тент” (рисунок 4.4).

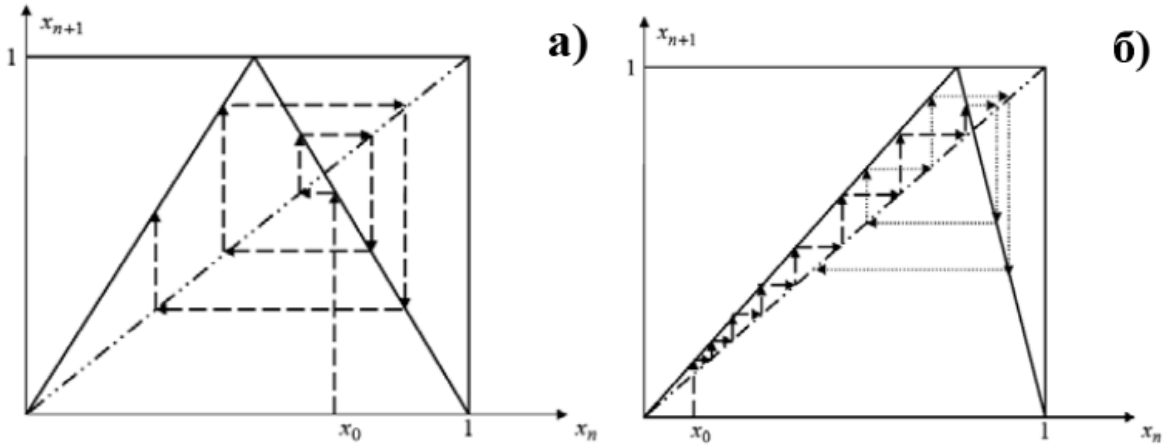


Рисунок 4.4 - "Симетричний" (а) та "косий тенти" (б)

Тенти і раніше розглянуті відображення не тільки демонструють наявність хаосу, але й показують, що в таких системах відбувається періодичне повернення до стану, досить близько розташованого до вихідного положення (наявність циклів).

Таким чином, можна говорити про те, що:

• для раціональних чисел розглянуті відображення здійснюють повернення

системи у вихідну рівновагу (енергія системи зберігається і при виході

зі стану рівноваги система знову до нього повертається після закінчення деякого часу, необхідного для релаксації системи);

• для ірраціональних чисел розглянуті відображення демонструють виникнення динамічного хаосу, залежність від початкових умов (недолік інформації) та перехід системи в якісно новий стан (енергія розсіюється; система стійка поблизу деякого встановленого стану; виникають квазіперіодичні рухи).

Крім одновимірних безперервних відображень виду $x_{n+1} = f(x_n)$ розглянемо двовимірне "відображення пекаря", яке визначається формулами:

$$\begin{cases} x_{n+1} = \{2\,x_n\} \\ y_{n+1} = (y_n + [2\,x_n])/2 \end{cases},$$

де фігурні дужки означають дробову частину, а квадратні дужки – цілу частину числа 2 x_n. “Відображення пекаря” визначає консервативну систему, оскільки воно зберігає площу фігури на площині (x; y). Це відображення демонструє одне з найважливіших властивостей динамічної системи – перемішування. Якщо взяти квадрат, розрізати його на дві рівні половини, пофарбувати ліву половину в темний колір, потім накласти темну половину на світлу і розкотити до початкового розміру, то при

досить тривалому розкочуванні квадрат зовні стане однорідно сірим (процес показаний на рисунку 4.5).

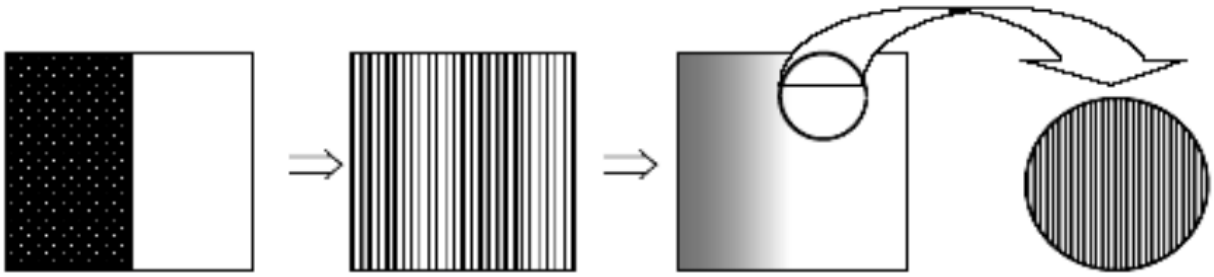


Рисунок 4.5 - "Відображення пекаря" - демонстрація перемішування

З перемішування випливає властивість ергодичності: обчислення статистичних середніх за ансамблем еквівалентно усередненню за часом вздовж індивідуальної фазової траєкторії.

На закінчення відзначимо, що наявність у фазовому просторі притягуючи множин зі складною структурою породжує дивні атрактори. В цих множинах спостерігається стійкість щодо тяжінні до атрактору і нестійкість, яка проявляється в розбіганні фазових точок по периметру дивного атрактора.

4.3 Стаціонарні стани та стійкість

Нехай об'єкт, що досліджується, описується системою диференціальних рівнянь першого порядку виду

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1; x_2; ...; x_n) \ (i = 1 \div n)$$

(що відповідає суцільній динамічній системі). Якщо функції $f_i\ (x_1; x_2; ...; x_n)$ аналітичні та не мають загального множника, то згідно з теоремою Коші система диференціальних рівнянь першого порядку має єдине рішення, що задовольняє початковим умовам $x_i\ (0) = x_i$.

Якщо динамічні змінні $x_i(t)$ не залежать від часу, система знаходиться в стаціонарному режимі. Дослідимо стійкість стаціонарного стану динамічної системи, що визначається рівняннями $f_i\ (x_1; x_2; ...; x_n) = 0$.

Вирішення цих рівнянь визначають спеціальні точки фазового простору, на відміну від інших точок, які називаються регулярними, або звичайними. Сукупність динамічних змінних , які забезпечують перехід системи у стаціонарний стан, позначимо через x . Стійкість цього стану визначається малим відхиленням динамічних змінних від їх значень у стаціонарному режимі $\delta x_i(t) = x_i(t) - x_i(0)$, які задовольняють лінеаризованим динамічним рівнянням виду:

$$\frac{d(\delta x_i)}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\delta x_j \quad , \tag{4.1}$$

де коефіцієнти у правій частині рівняння визначаються як

$$a_{ij} = \partial f_i / \partial(\delta x_j)\Big|_{\delta x_j = \delta x_j(0)} \quad ,$$

а початкові умови мають вигляд

$$\delta x_i(0) = x_{i0} - x_{is} \quad ,$$

причому величини δx_i , x називаються числами, або показниками Ляпунова. Розв'язання цього рівняння шукатимемо стандартним чином, представивши рішення у вигляді:

$$\delta x_i(t) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_{ik} e^{x_{ks} t} \tag{4.2}$$

Тут величини

$$\lambda_{ik} = \lambda_{ik}(\delta x_1(0); \delta x_2(0); ...; \delta x_n(0))$$

Тоді, система рівнянь (4.1) приймає вид однорідної системи лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_{ik} x_{ks} e^{x_{ks} t} = \sum_{j,k=1}^{n} a_{ij} \lambda_{jk} e^{x_{ks} t} \quad , \tag{4.3}$$

яка має рішення лише у тому випадку, коли її головний детермінант (4.1) дорівнює нулю, тобто

$$\det\left| a_{ij} - \delta_{ij} x_{is} \right| = 0 \quad ,$$

де

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$$

- символ Кронекера. З виду розв’язків (4.2) випливає, що їхня k-а складова загасатиме з часом, якщо $\mathrm{Re}(x_{ks}) < 0$, і наростатиме, якщо $\mathrm{Re}(x_{ks}) > 0$. Якщо хоча б для одного з показників Ляпунова його реальна частина буде позитивною, то стаціонарний стан буде нестійким. Якщо для k-ої компоненти виконується рівність $\mathrm{Re}(x_{ks}) = 0$, то стан системи буде нейтральним (лабільним), а для аналізу стійкості динамічної системи треба

вводити на розгляд нелінійні поправки, що виникають при обліку, наприклад, квадратичних доданків у розкладанні функції

$$f_i(x_1; x_2; ...; x_n)$$

в ряд Тейлора, тобто величин

$$\sum_{j=1}^{n} b_{ijk}\,\delta x_j\,\delta x_k \qquad ,$$

де коефіцієнти розкладання

$$b_{ijk} = \partial^2 f_i / \partial(\delta x_j)\partial(\delta x_k)\Big|_{\delta x_i(t)=\delta x_i(0)}$$

Розглянемо поведінку фазових траєкторій у малому околі особливої точки. Через звичайну точку фазового простору проходить одна і лише одна траєкторія. В особливій точці ці траєкторії можуть перетинатися. Однак це неможливо спостерігати на протязі кінцевого проміжку часу через однозначність розв'язків рівнянь руху.

Для простоти дослідимо поведінку одновимірної динамічної системи, яка описується рівнянням виду

$$\frac{dx}{dt} = f(x)$$

Припустимо, що права частина рівняння перетинає вісь абсцис у трьох точках (рисунок 4.6).

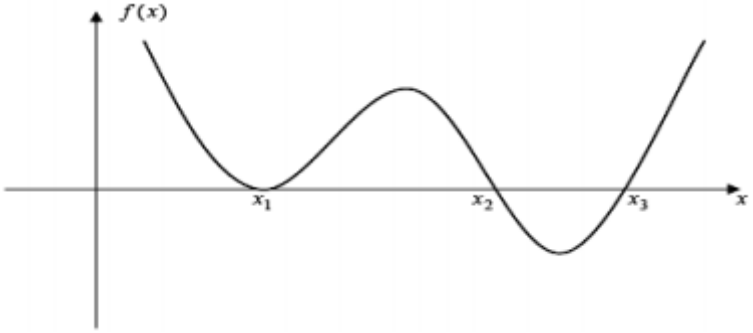


Рисунок 4.6 - Графік правої частини одновимірного рівняння руху

Лінеаризуємо рівняння руху у околі особливих точок x_1, x_2 *і* x_3, враховуючи :

$$\frac{d(\delta x)}{dt} = \left(\frac{\partial f}{\partial(\delta x)}\right)\Big|_{\delta x=\delta x(0)} \delta x$$

Для точок x_1, x_2 *та* x_3 показники Ляпунова дорівнюють

$$x_{1s}=\left(\frac{\partial f}{\partial(\delta x)}\right)\Big|_{\delta x=\delta x(0)}=0,\ x_{2s}=\left(\frac{\partial f}{\partial(\delta x)}\right)\Big|_{\delta x=\delta x(0)}<0 \text{ и } x_{3s}=\left(\frac{\partial f}{\partial(\delta x)}\right)\Big|_{\delta x=\delta x(0)}>0$$

відповідно. Отже, поблизу точки x_2 фазові траєкторії з плином часу експоненційно сходяться, а поблизу x_3 – розходяться. Для аналізу поведінки фазових траєкторій поблизу точки x_1 необхідно враховувати квадратичні члени розкладу. У цьому випадку рішення має вигляд:

$$\delta x(t)=\frac{\delta x(0)}{1-b\delta x(0)t}$$

$$b=\partial^2 f/\partial(\delta x)^2\Big|_{\delta x(t)=\delta x(0)}$$

З виду отриманого рішення випливає, що воно залежить від початкових умов. Стійкість стану x_1 залежить від знака початкового значення $\delta x(0)$, при цьому всі траєкторії, що починаються праворуч від точки x_1 $(\delta x > 0)$, розходяться, а зліва $(\delta x < 0)$ – сходяться. Усі випадки динамічного поведінки одновимірної системи повністю описуються зазначеними трьома точками.

У двовимірному випадку характеристичне рівняння системи лінійних диференціальних рівнянь першого порядку зводиться до квадратного рівняння. Аналіз коренів цього рівняння призводить до 6 типів поведінки фазових траєкторій, зображених на рисунку 4.7:

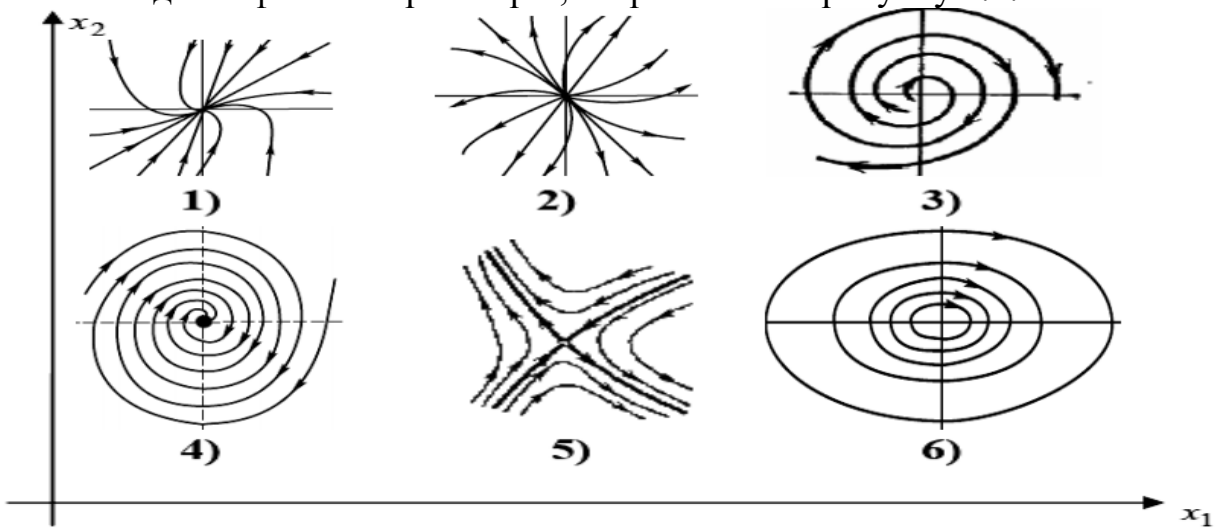


Рисунок 4.7 - Особливі точки двохвимірної динамічної системи:

1) $Re(x_{1s}) < 0, Im(x_{1s}) = 0; Re(x_{2s}) < 0, Im(x_{2s}) = 0$ - стійкий вузол;
2) $Re(x_{1s}) > 0; Im(x_{1s}) = 0; Re(x_{2s}) > 0, Im(x_{2s}) = 0$ - нестійкий вузол;
3) $Re(x_{1s}) < 0, Im(x_{1s}) \neq 0; Re(x_{2s}) < 0, Im(x_{2s}) \neq 0$ – нестійкий фокус;
4) $Re(x_{1s}) > 0, Im(x_{1s}) \neq 0; Re(x_{2s}) > 0, Im(x_{2s}) \neq 0$ – стійкий фокус;
5) $Re(x_{1s})\ Re(x_{2s}) < 0$– сідлова точка (числа Ляпунова мають різні знаки);
6) $Re(x_{1s}) = 0; Re(x_{2s}) = 0$ – центр

Поблизу кожної особливої точки лінеаризована система диференціальних рівнянь має вигляд:

$$\frac{dx_1}{dt}=a_{11}x_1+a_{12}x_2 \quad \frac{dx_2}{dt}=a_{21}x_1+a_{22}x_2.$$

Розділивши перше рівняння на друге, отримаємо

$$\frac{dx_1}{dx_2}=\frac{a_{11}x_1+a_{12}x_2}{a_{21}x_1+a_{22}x_2}$$

Якщо детермінант А відмінний від нуля:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad ,$$

тоді можна визначити похідну $\frac{dx_1}{dx_2}$

в особливій точці. Проте ця точка все рівно залишається точкою розриву напрямків руху у часі.

Будь-яка фазова траєкторія, яка починається у звичайній точці фазового простору, буде обов'язково наближатися до будь-якої з особливих точок, або до замкненого циклу (періодичний рух). Це призводить до того, що весь фазовий простір динамічної системи розбивається на області при тяжіння до особливої точки або граничного циклу. Границі цих областей, які поділяють басейни особливих точок, називають сепаратрисами (на сепаратрисі період коливань формально дорівнює нескінченності).

5 ЗАГАЛЬНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ОСЦИЛЯЦІЙНИХ ПРОЦЕСІВ

5.1 Осцилятори

Осцилятори, ротатори та інші фізичні об'єкти, стан яких з протягом часу описується періодичною або квазіперіодичною функцією, відносяться до коливальних систем (рисунок 5.1). Коливання в них поділяють на :

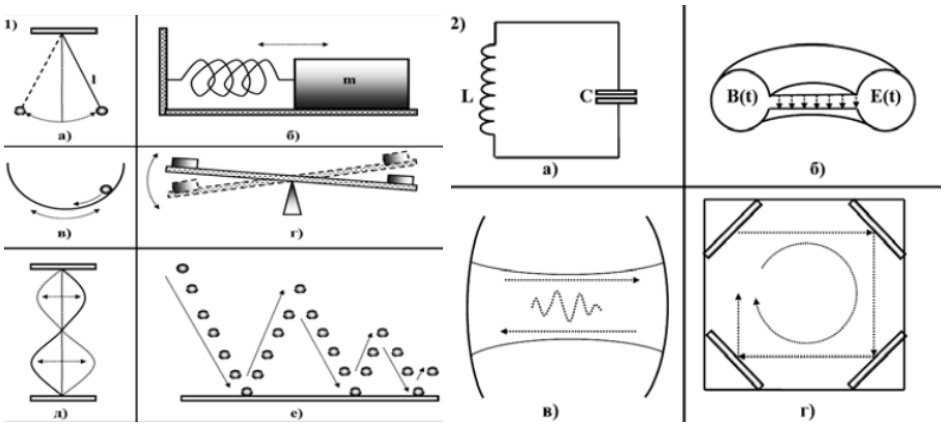


Рисунок 5.1 - Приклади періодичних рухів:
1) механічні: а) маятник; б) пружинний осцилятор; в) кулька в ямці; г) гойдалки; д) струна; е) стрибаючий м'ячик;
2) електричні та оптичні: а) коливальний контур; б) резонатор; в) хвильовий пакет між параболічним дзеркалом; г) світловий промінь у системі чотирьох дзеркал

Розрізняють періодичні та аперіодичні коливання. До першого типу відносяться синусоїдальні, ангармонічні та релаксаційні коливання. Аперіодичні зміни відбуваються при загасаючих, квазіперіодичних та хаотичних коливаннях. Стан коливальної системи характеризується динамічними змінними, тобто. величинами, що змінюються з часом t . Наприклад, для механічних коливань такими характеристиками є координата x(t) та швидкість переміщення x(t) у вибраній системі координат. Завдання набору динамічних змінних та закону їх зміни визначає детерміноване поведінку системи. Вони описують стан коливальної системи в будь-який момент часу. Коливальні системи ще називають динамічними.

З геометричної точки зору динамічні змінні утворюють фазовий простір, які зміни в часі задають фазові траєкторії. Зазвичай коливання протікають у строго визначеному динамічному сценарії і діапазоні динамічних змінних. Якщо коливання відбуваються в малому околі

положення рівноваги та описуються рівнянням лінійної динаміки (вільні коливання):

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

(друга похідна від x – прискорення, $\omega = 2\pi / T$ – кругова частота, T – період коливань), тоді говорять про малі коливання. Рішенням лінійного рівняння коливань є синусоїда:

$$x(t) = A\sin(\omega t + \delta) \quad ,$$

де A – амплітуда коливань, δ – початкова фаза. Амплітуда коливань A і початкова фаза визначаються початковими значеннями координати і швидкості руху. Для мінімальних коливань характерна амплітудна інваріантність, тобто. Мінімальні коливання з однією і тією ж частотою вільних коливань розрізняються лише амплітудою коливань. Величина амплітуди визначає розмір області, де справедлива лінійна динаміка. За межами області малих коливань виникають явища, що описуються нелінійною динамікою, зокрема, можуть виникати хаотичні рухи. Коливальні системи поділяють на консервативні (зберігають повну енергію системи) та дисипативні (частина повної енергії розсіюється та переходить в інші форми існування). Консервативні системи "зберігають" інформацію про початкові умови виникнення коливань, які визначають амплітуду та початкову фазу . Дисипативні системи, які надані протягом тривалого часу самим собі, “страждають втратою пам'яті” (“амнезією”) щодо до джерела свого виникнення. Переходячи в режим існування, вони локалізуються поблизу атракторів (стан рівноваги, граничний цикл або стійкий фокус). Наприклад, наявність граничного циклу призводить до виникнення автоколивань у дисипативних системах (рисунок 5.2).

5.2 Автоколивання

Поява автоколивань не може бути пояснена в рамках лінійної моделі, в якій відсутній характерний масштаб амплітуди. Наявність такого масштабу і як раз і визначає незалежність стану дисипативної системи, що встановився, від моменту її “народження”.

За своєю протяжністю у просторі коливальні системи поділяються на зосереджені (кінцевомірні) та розподілені. Зосереджені динамічні системи характеризуються кінцевим (дискретним) числом динамічних змінних, а розподілені – безперервними величинами у частині системи (наприклад, щільністю). Коливальний процес у розподіленій динамічній системі називається хвилею, і може бути описаний обмеженим числом змінних лише приблизно. Виникнення турбулентності, автохвиль та відокремлених хвиль (солітонів) описується в рамках єдиної теорії-нелінійної динаміки. Багато частинок, що утворюють розподілені системи, взаємодіють між

собою специфічним чином, що призводить до виникнення таких структур, як хвилі. Поява просторово-часових образів у динамічних системах отримала назву самоорганізації. Дослідження законів самоорганізації ,або виникнення дисипативних структур є предметом синергетики.

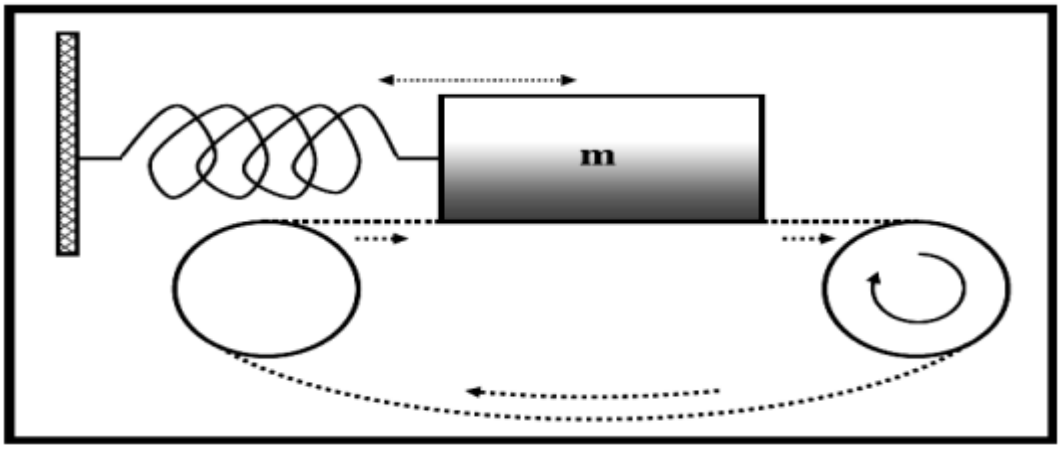


Рисунок 5.2 - Пружинний маятник на рухомій стрічці транспортера

5.3 Явища, породжені нелінійністю

Будь-яка складна система складається з елементів (компонентів чи складових), взаємодія яких визначає властивості системи. Компоненти поділяють на лінійні та нелінійні. Для перших компонентів характерний лінійний зв'язок між зовнішнім впливом та відгуком системи (рисунок 5.3), наприклад:

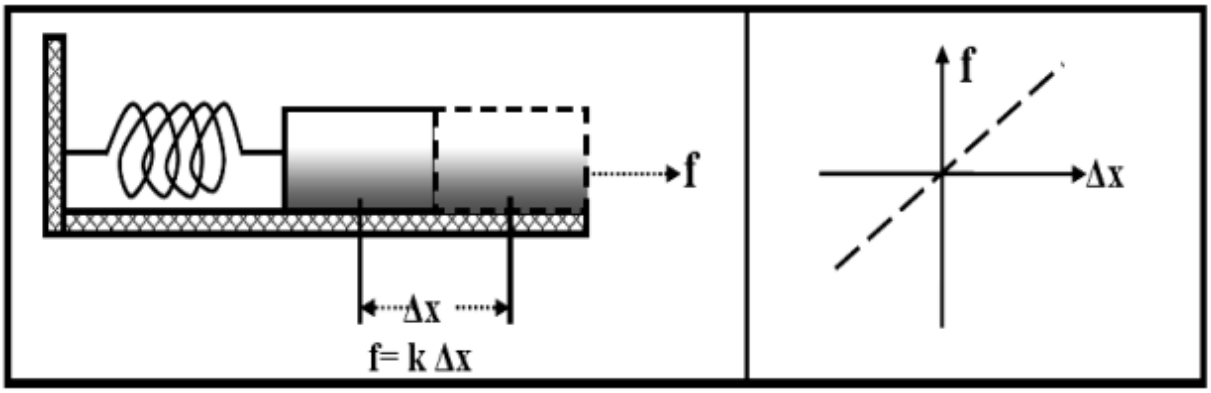


Рисунок 5.3 - Лінійний елемент

пружна сила f для ідеально пружної пружини прямо пропорційна зсуву Δ x за його малих значень: f = kΔx (k – коефіцієнт пружності). При перевищенні прикладеної силою певної (критичної) величини лінійний закон змінюється нелінійною залежністю (рисунок 5.4).

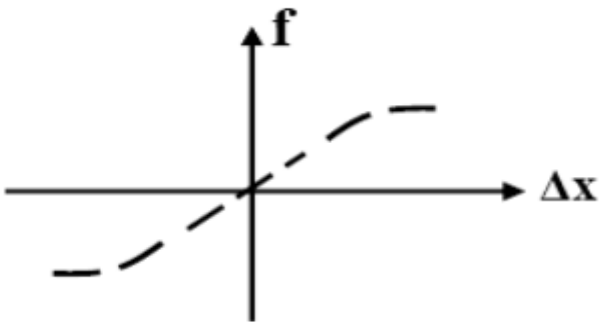


Рисунок 5.4 - Нелінійний зв'язок

У деякому діапазоні параметрів деформації новий зв'язок можна описати залежністю:

$$f = k\,\Delta x + \alpha\,(\Delta x)^2 \quad ,$$

яка містить квадратичний внесок в термінах зміщення. Наявність у системі нелінійного елемента може призводити до таких явищ, як неізохорність, ангармонічність, автоколивання, біфуркації, мультистабільність, динамічний хаос та резонанс.

Період коливань практично постійний тільки при кутах, які значно менше π (α << π), і залежить від амплітуди поза межами малих коливань. Неізохорність коливальної системи пов'язана саме із залежністю періоду коливань від амплітуди. Як приклад розглянемо обертання електрона із зарядом e та масою спокою m_0 у постійному магнітному полі з напруженістю *B*. Рух електрона зі швидкістю *v* по колу радіусу *r* відбувається під дією сили Лоренца *evB* , причому кутове прискорення ε = v^2/ r : *mε = evB*, де релятивістська маса електрона *m = m₀/1−(v/c)* . Швидкість руху v пов'язана з круговою частотою формулою: *v = ωr*. Отже, період коливань дорівнює

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi m}{eB} = \frac{2\pi m_0}{eB}\sqrt{1+\left(\frac{eBr}{m_0 c}\right)^2}$$

Таким чином, період коливань зростатиме зі збільшенням радіусу орбіти (амплітуди коливань). Якщо періодичні рухи системи описуються рівнянням відмінним від рівняння вільних коливань, то вони описуються періодичною функцією, яка відрізняється від синусоїди *x(t) = =Asin(ωt +δ)*. Виникнення таких коливань свідчить про ангармонічність системи. Як відомо, будь-яку періодичну функцію можна представити у вигляді ряду Фур'є (розкласти за гармоніками з різними амплітудами, початковими фазами та частотами, кратними круговій частоті *ω = 2π /T*):

$$x(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(k\omega t + \delta_k)$$

Вибравши спеціальним чином систему координат, можна домогтися того, що постійна складова A_0 дорівнюватиме нулю. Якщо перша

амплітуда $A_1 \neq 0$, а інші амплітуди дорівнюють нулю, то ангармонізм відсутній і протікає нормальний синусоїдальний процес. Для більшості осциляцій перша амплітуда є найбільшою, тому перша гармоніка є основною. Інші складові ряду Фур'є з амплітудами A_k , відмінними від нуля, називаються *k*-тими гармоніками. Отже, ангармонічність коливальної системи пов'язана з наявністю в коливальному процесі гармонік з частотами *2ω, 3ω, 4ω, …*

Для характеристики відхилення коливального процесу від синусоїдального вводять коефіцієнт нелінійних спотворень за формулою

$$\chi = \sqrt{\sum_{k=2}^{\infty} A_k^2} / A_1$$

Ще одним проявом нелінійності є мимовільне виникнення в ряді дисипативних систем автоколивань, які визначаються властивостями коливальної системи та не залежать від стартових умов процесу.

Як приклад розглянемо появу автоколивань в електронному генераторі, який схематично показаний на рисунку 5.5.

Присутні в коливальному контурі осциляції за рахунок електромагнітної індукції викликають струм у котушці зв'язку. Його амплітуда збільшується за допомогою підсилювача.

Новий сигнал подається в коливальний контур (позитивний зворотний зв'язок) так, щоб відбувалося "розгойдування" коливань. Зростання амплітуди коливань призводить до зростання дисипації (розсіювання) енергії. Стабілізація амплітуди коливань відбувається тоді, коли потужність втрат починає дорівнювати потужності, яку підсилювач подає в коливальний контур. Відмітимо, що енергія підтримки автоколивань черпається із зовнішнього джерела.

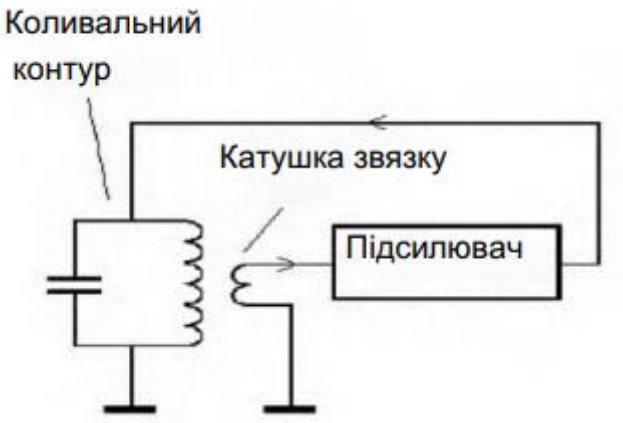


Рисунок 5.5 - Електронний генератор

Крім динамічних змінних стан коливальної системи визначається низкою параметрів, значення яких змінюються з часом.

Задаючи той чи інший перелік та значення параметрів, можна реалізувати той чи інший режим існування системи: рівновагу, стаціонарний стан,

періодичні чи ангармонічні коливання. Перехід системи на якісно новий рівень існування в залежності від величин керуючих параметрів називається біфуркацією. Зміна параметрів, що управляють, має відбуватися досить повільно (повільні змінні), щоб система встигала підлаштовуватись до нових умов за рахунок зміни динамічних змінних . Розглянемо біфуркацію, що має місце у разі виникнення автоколивань в електронному генераторі. Доки коефіцієнт підсилення малий (втрати переважають над надходженням енергії в коливальний контур), коливання з часом загасають. Якщо повільно збільшувати коефіцієнт підсилення, відбувається біфуркація: коливання починають нарощувати амплітуду. Це означає, що будь-яка мінімальна "затравка" призведе до виникнення коливального процесу. Амплітуда осциляцій наростатиме до рівня стабілізації (біфуркація Андронова-Хопфа): існуюча у фазовому просторі нерухома точка втрачає стійкість, а фазові траєкторії системи замикаються навколо граничного циклу (атрактора). За наявності кількох атракторів система притягується до найближчого енергетично більш вигідного стану, тому що кожному атрактору відповідають свої значення динамічних змінних та відповідно - басейн притяжіння. Наявність такої ситуації призводить до мультистабільності, що виникає внаслідок нелінійності осциляцій. В результаті зміни керуючих параметрів може статися злиття стійкого та нестійкого станів коливальної системи (біфуркація злиття). Після такого злиття зникає локальний мінімум (один із рівноважних станів), при цьому стан системи змінюється стрибком при повільній зміні параметрів (так звана жорстка біфуркація, чи катастрофа). Залежно від того, як змінювалися параметри система займає той чи інший стаціонарний стан (рисунок 5.6).

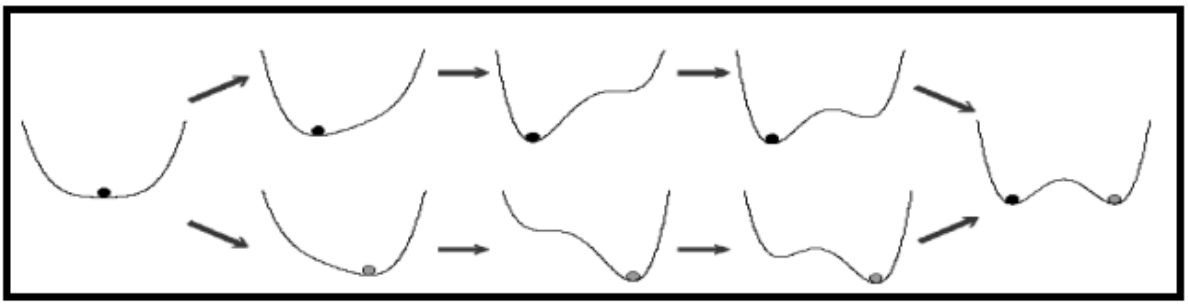


Рисунок 5.6 - Перехід у новий стан під час руху у вздовж різних траєкторій у параметричному просторі

Таким чином, не лінійність зв'язку між впливом та відгуком призводить до мультистабільності станів коливальної системи. Відзначимо властивість універсальності нескінченного ланцюжка біфуркацій подвоєння: інтервал зміни параметра керуючого параметру b , всередині якого існує цикл періоду 2 n із зростанням n зменшується за законом Фейгенбаума, тобто

$$(b_n - b_{n-1}) / (b_{n+1} - b_n) = \eta \quad ,$$

де η = 4,66920 … – постійна Фейгенбаума.

Ще однією особливістю нелінійних систем є те, що коливання з різними амплітудами відбуваються по-різному. У фазовому просторі їм відповідають різні фазові траєкторії, отже, і різні види динамічної поведінки. Якщо число динамічних змінних більше або дорівнює трьом, то можлива наступна ситуація: існують такі рухи, при яких дві близько розташовані фазові траєкторії (досить близькі значення початкових умов) з часом розходяться. Якщо такою властивістю володіють усі можливі фазові траєкторії, створюються умови виникнення динамічного хаосу. Такі області притягують у свій басейн усі фазові траєкторії та називаються дивними атракторами. Як приклад розглянемо систему рівнянь Лоренца, яка описує конвекцію рідини у вертикально розташованій кільцевій трубці, що підігрівається знизу та охолоджується

$$\begin{cases} \dot{x} = a\,(y - x) \\ \dot{y} = b\,x - y - x\,z \\ \dot{z} = -c\,z + x\,y \end{cases}$$

У цій системі динамічні змінні описують такі величини: ẋ відповідає швидкості руху рідини по кільцю; у та *z* пропорційні відхиленням температури від середнього значення у правій та нижній частині кільця. Параметр *a* дорівнює відношенню коефіцієнтів в'язкості та теплопровідності, коефіцієнт *b* визначає ступінь підігріву, а константа с характеризує геометрію цього завдання (для кільця *c =1*). Е. Лоренц розв’язав систему диференціальних рівнянь на комп'ютері за умов визначених значень параметрів

$$a=10,\ b=28 \text{ и } c=8/3$$

Результати розрахунків показані на рисунку 5.7. З рисунку 5.7 видно, що в досліджуваної коливальній системі відсутнє прагнення до встановлення стаціонарного чи періодичного режимів, тобто. спостерігається динамічний хаос.

У реальних осциляторах завжди відбувається розсіювання енергії коливань за рахунок тертя, яке виникає під час руху в середовищі, внаслідок чого відбувається загасання коливань. Отже, для підтримки коливань треба додавати енергію до системи шляхом впливу на її періодичною зовнішньою силою $F = F_0 \cos(\omega t)$.

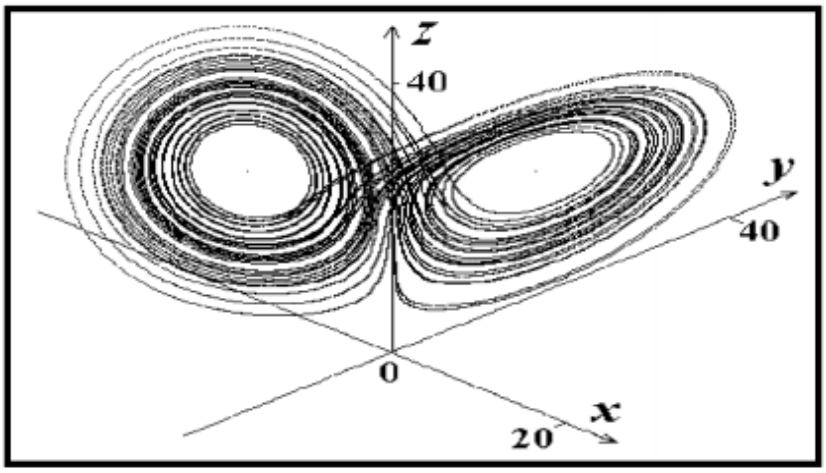


Рисунок 5.7 - Дивний атрактор Лоренца

Динамічне рівняння руху при цьому має вигляд:

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos(\omega t) \quad ,$$

де β – коефіцієнт загасання, $\omega_0 = k / m$ – кругова частота власних коливань, k – коефіцієнт пружності, m – маса маятника $f_0 = F_0 / m$, ω – кругова частота зовнішнього впливу. Рішення наведеного рівняння дає для амплітуди коливань наступний вираз

$$A = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}$$

Так як амплітуда залежить від частоти зовнішнього впливу, то при деякій частоті $\omega = \omega p = \omega_0 - 2\beta$ спостерігається пікоподібне наростання амплітуди коливань

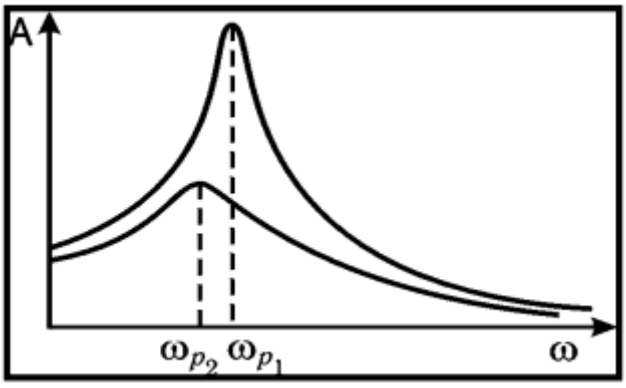


Рисунок 5.8 - Ефект резонансу

Це явище називається резонансом. Таким чином, у нелінійних динамічних системах спостерігається ціла низка фізично цікавих явищ і процесів, теоретичне та експериментальне дослідження яких, поки що, недостатньо розвинені.

5.4 Нелінійні маятники

Коливання в консервативних системах описуються рівнянням $x + f(x) = 0$, а дисипативні осциляції рівнянням $x + \mu x + f(x) = 0$, де параметр μ є коефіцієнтом дисипації, а $f(x)$ – нелінійна функція. Слід розуміти, що динамічна змінна x наповнюється різним фізичним (або іншим) змістом.

Розглянемо коливання у потенційній ямі (нелінійний консервативний осцилятор). Нехай на частинку з масою m діє сила F(x) ($F(x) = -\partial U(x)/\partial x$, U – потенційна енергія), що переміщає частинку у напрямку осі абсцис. Відповідно до другого закону Ньютона $F(x) = mx$ або $x + f(x) = 0$, де $f(x) = -F(x) / m$.

Помноживши отримане рівняння на mx, перепишемо його у вигляді

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m\dot{x}^2}{2} + U(x)\right) = 0$$

Отже, повна енергія осцилятора буде дорівнювати

$$E = \frac{m\dot{x}^2}{2} + U(x) = const$$

і не змінюється з плином часу (консервативна система). Якщо потенційна енергія має мінімум у точці x_0

$$\partial U(x)/\partial x\big|_{x=x_0} = 0$$

то можливі коливання в малому околі цієї точки. Розкладемо потенційну енергію в ряд Тейлора поблизу точки x_0:

$$U(x) = U(x_0) + \frac{U''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{U'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \ldots$$

Якщо обмежитися лише першими двома членами ряду Тейлора, то отримаємо рівняння вільних коливань. Нелінійність виникає при врахуванні третього та наступних доданків у наведеному ряді.

У загальному випадку рівняння коливань записують у динамічних змінних фазового простору:

$$\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = -f(x) \end{cases}$$

а динаміку системи відображають фазовими портретами змінних $(\dot{x};\ \dot{x} = v)$. За умов збереження повної енергії системи можна записати, що

$$\dot{x} = \pm\sqrt{2(E - U(x))/m}$$

Знак “+” відповідає фазовим траєкторіям у верхній, а знак “–”– у нижній півплощинах фазового простору (рисунок 5.9).

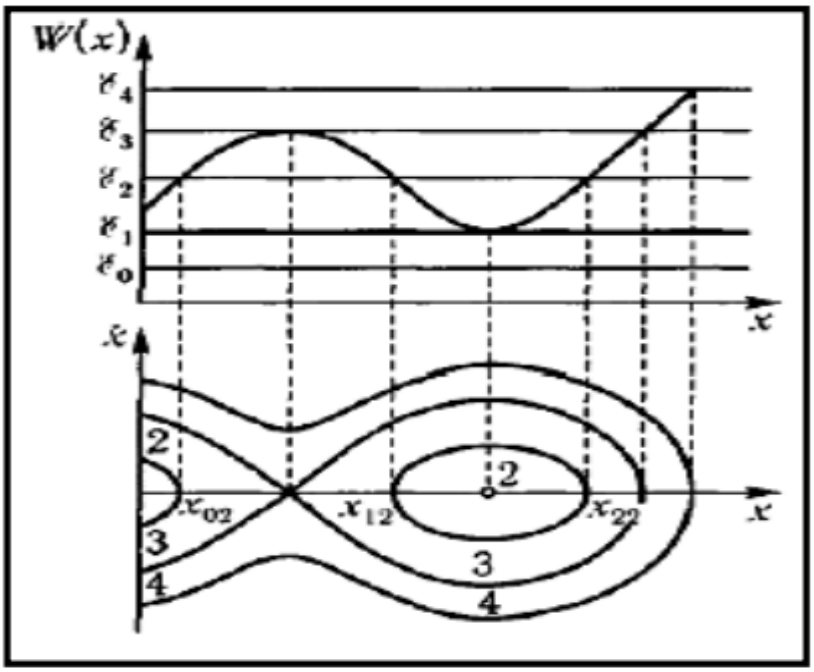


Рисунок 5.9 - Функціональна залежність потенційної енергії та фазовий портрет нелінійного осцилятора

Інтегруючи отриману рівність у границях, які відповідають умовам спостереження, отримаємо для періоду коливань

$$T = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \frac{dx}{\sqrt{2(E-U(x))/m}}$$

У випадку лінійної динаміки функція

$$U(x) = U(x_0) + \frac{k}{2}(x-x_0)^2$$

Вибравши систему відліку так, щоб її початок співпадав із нижньою точкою потенційної ями, отримаємо

$$U(\tilde{x}) = \frac{k\tilde{x}^2}{2}$$

У нових змінних вираз для періоду набуває вигляду:

$$T = 2\int_{-a}^{a} \frac{d\tilde{x}}{\sqrt{(2E-k\tilde{x}^2)/m}} = \frac{4}{\omega_0}\int_{0}^{a} \frac{d\tilde{x}}{\sqrt{a^2-\tilde{x}^2}} = \frac{4}{\omega_0}\arcsin\left(\frac{\tilde{x}}{a}\right)\Bigg|_0^a = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

тут параметри $\omega_0 = k/m$ и $a = 2E/k$.

Розглянемо тепер фізичний маятник. Нехай вантаж масою m розташований на кінці стрижня довжиною l з малою масою, може вільно обертатися у вертикальній площині. На тіло діє сила тяжіння $F = mg$ (прискорення вільного падіння g = 9,81 м/сек). Після відхилення стрижня

на кут x і звільнення маятник починає коливатися, при цьому його обертальний момент дорівнює $M_1 = m\ g\ l\ sin\ x$. Цей момент дорівнює за абсолютною величиною, але протилежно спрямований моменту вантажу $M_2 = ml2x$. Рівняння динаміки після введення нового часу $\tau = t\ g\ /\ l$ набуде вигляду $x+sinx = 0$. Фазовий портрет фізичного маятника показаний на Рисунок 5.10а. Якщо маятник рухається в середовищі,яке створює опір руху, то рівняння коливань має вигляд $x+ \mu\ x\ +sinx = 0$. Відповідний фазовий портрет за умов малої дисипації енергії відображено на рисунку 5.10б. Такими ж рівняннями описуються обертальні рухи по колу.

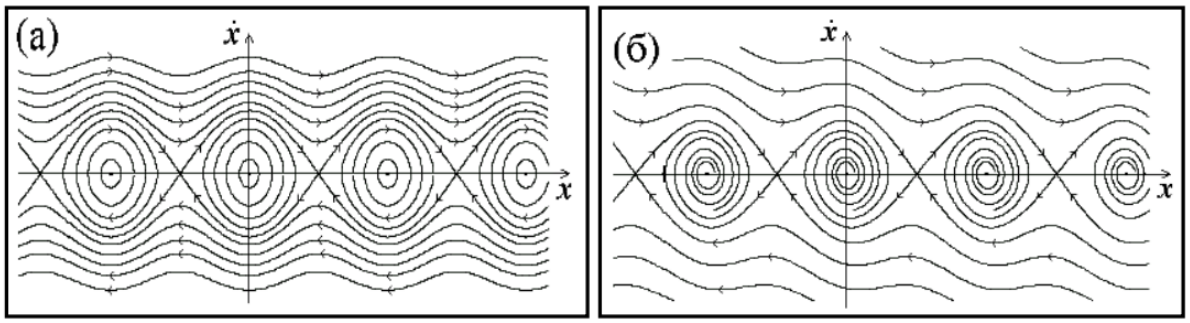


Рисунок 5.10 - Фазові портрети консервативного (а) та дисипативного (б) фізичних маятників

Рівняння з нелінійністю типу синуса зустрічається досить часто під час вирішення різних фізичних завдань: дослідження контакту Джозефсона в теорії надпровідності; самоіндукованої прозорості в нелінійній оптичній моделі; розв'язанні задачі про згин пружної балки та в інших задачах. Цей факт вказує на те, що методи нелінійної динаміки можуть використовуватися в самих різних галузях знань із використанням з ідентичного математичного опису відповідних періодичних процесів.

6 ХВИЛІ

6.1 Класифікація хвильових процесів

У попередніх розділах було розглянуто індивідуальні якості окремо взятої динамічної системи. Об'єднання незв'язаних між собою осциляторів в "спільноту" призводить до того, що воно характеризується набором власних частот і не має нових якостей (ідеальна система). Якщо осцилятори однакові (тотожні), то відгук системи на зовнішній вплив дорівнює відгуку одного осцилятора помноженого на їхнє число. Якщо ж осцилятори незначно відрізняються своїми частотами, то з часом у системі на будь-який зовнішній сигнал знайдеться антисигнал, що гасить. Це призводить до того, що відгук системи майже тотожних коливальних систем дорівнюватиме нулю. Включення взаємодії між значною кількістю елементів (реальна система) породжує нові властивості динамічної системи: синхронізація рухів “часток” системи внаслідок самоорганізації; поява меж у системи; безперервність середовища; прояв корпускулярно-хвильового дуалізму; виникнення різноманітних тимчасово- та просторово-періодичних структур; існування кількох агрегатних станів. Яскравими представниками колективного руху є хвилі (рисунок 6.1).

Рисунок 6.1 - Види водних хвиль

Хвилею називається процес періодичного поширення в просторі збурення тієї чи іншої фізичної характеристики у середовищі (в речовині чи полі), що супроводжується перенесенням імпульсу та енергії. Область простору, де відбувається поширення хвилі, називається хвильовим полем. Усі точки хвильового поля, які мають у вибраний момент часу однакову фазу, утворюють фронт хвилі. Границя хвильового поля називається переднім фронтом хвилі. Поширення хвилі в однорідному та ізотропному просторі відбувається у напрямку нормалі до переднього фронту хвилі, тому інколи говорять про поширення хвилі у вигляді променю. Наука, що вивчає такі хвилі, називається геометричною оптикою. Промені відносяться до найпростіших хвиль, що виникають при спільному переміщенні великої кількості частинок. Можна виділити три типи хвиль: пружні (наприклад: звукові, сейсмічні), електромагнітні (світло,

радіохвилі) та хвилі на поверхні рідини. Як писав Р. Фейнман про поверхневі хвилі: "…ці хвилі анітрохи не схожі ні на звук, ні на світло, тут зібрані всі проблеми, які можуть бути у хвилях". Така інтерпретація пов'язана із тим, що у рідинах не може поширюватися поперечна хвиля (див. нижче її визначення) через те, що модуль зсуву для такого середовища дорівнює нулю. Однак, спостереження за поверхневим шаром рідкого середовища показує, що такі хвилі можна віднести до поперечних. Облік різних чинників, що впливають на формування поверхневих хвиль, показує, що для їхнього математичного опису необхідно залучати моделі, як з теорії коливань і хвиль, так і з нелінійної динаміки. Важливість дослідження течій та рухів рідких середовищ, зокрема, пов'язана з використанням плаваючих засобів пересування.

Деформація середовища призводить до поширення у ній різних напруг. Вони можуть поширюватися у вигляді поздовжньої чи поперечної хвиль. Поздовжньою хвилею називається процес, у якому коливання частинок тіла здійснюється у напрямі поширення хвилі. Ці хвилі пов'язані з об'ємною деформацією середовища і тому спостерігаються у газах, рідинах та твердих тілах. Якщо коливання частинок середовища відбуваються у напрямку, який є перпендикулярним до напряму поширення збурення, то говорять про поперечні хвилі. Це, наприклад ,коли йдеться про зсувні деформації середовищ поширення. Поперечними хвилями, наприклад, є світлові хвилі (рисунок 6.2).

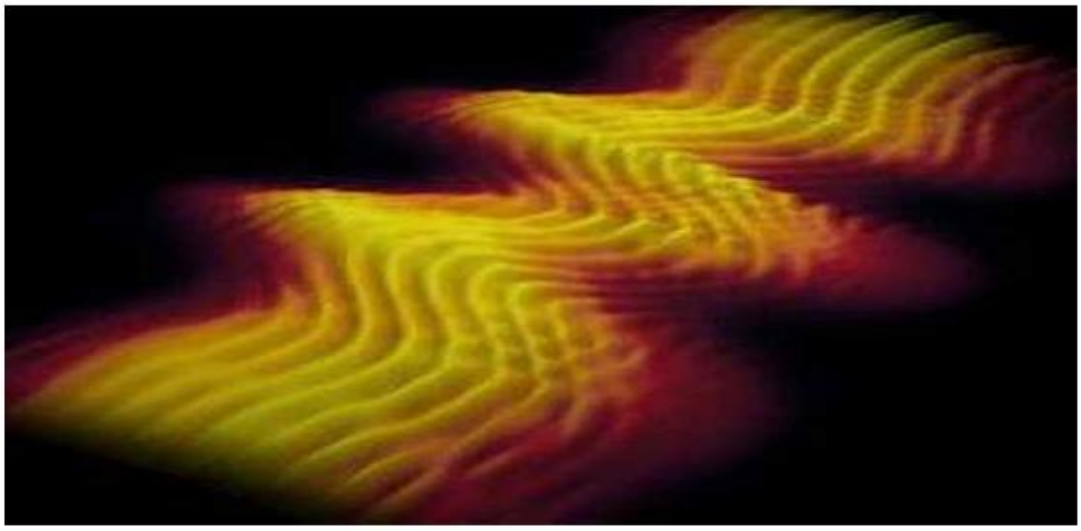


Рисунок 6.2 - Фотозображення світлової хвилі

Розглянемо математичну модель поздовжньої хвилі, що виникає в пружному середовищі (механічні хвилі). Нехай джерело коливань призводить до колективних рухів частинок вздовж осі абсцис за законом синусоїди $x(t) = Asin(\omega t)$ з амплітуда коливань A круговою частотою ω і нульовою початковою фазою. За проміжок часу Δt хвиля пройде відстань s зі швидкістю розповсюдження v . На відстані s від джерела в точці $x(t + \Delta t)$

коливання відставатимуть по фазі на величину $\delta = -\omega s/v$. Отже, рівняння хвилі, що біжить має вигляд $x(t + \Delta t) = A\sin(\omega(t - s/v))$. За період коливань T хвиля, яка розповсюджується , пройде відстань $\lambda = vT$, яка називається довжиною хвилі. У точках простору, розділених довжиною хвилі, коливання відбуваються з однаковою фазою.

Хвильові рухи супроводжуються цілою низкою ефектів: інтерференція, стояча хвиля, ефект Допплера, дифракція та інші. Інтерференція хвиль відбувається при накладенні двох когерентних хвиль, внаслідок чого у певних точках простору виникає зростання, а в інших точках – спад амплітуди коливань. Хвилі називаються когерентними, якщо вони мають однакову кругову частоту і різницю фаз, яка не змінюється з часом. Ця різниця фаз дорівнює $\Delta\delta = 2\pi\,\Delta s/\lambda$, *де* $\Delta s = s_2 - s_1$ – різниця відстаней від двох когерентних джерел хвиль (різниця ходу хвиль). Якщо різниця ходу дорівнює парному числу напівхвиль $\Delta s = 2n(\lambda / 2)\ (n = 0, 1, 2, \ldots)$, то спостерігається інтерференційний максимум (складання амплітуд когерентних хвиль).У протилежному випадку в обраній точці простору відбувається "гасіння" амплітуд (віднімання амплітуд когерентних хвиль). Окремим випадком інтерференції когерентних хвиль є виникнення стоячої хвилі (рисунок 6.3). Вона виникає при інтерференції когерентних хвиль з однаковою амплітудою, що рухаються назустріч одна одній.

Наприклад, таке явище спостерігається при відбиванні хвилі від будь-якої перешкоди: відбита хвиля інтерферує з падаючою хвилею. У точках простору, у яких різниця ходу $\Delta s = 2n(\lambda / 2)\ (n = 0, 1, 2, \ldots)$, амплітуда збільшується удвічі (пучність). Взаємне знищення падаючої і

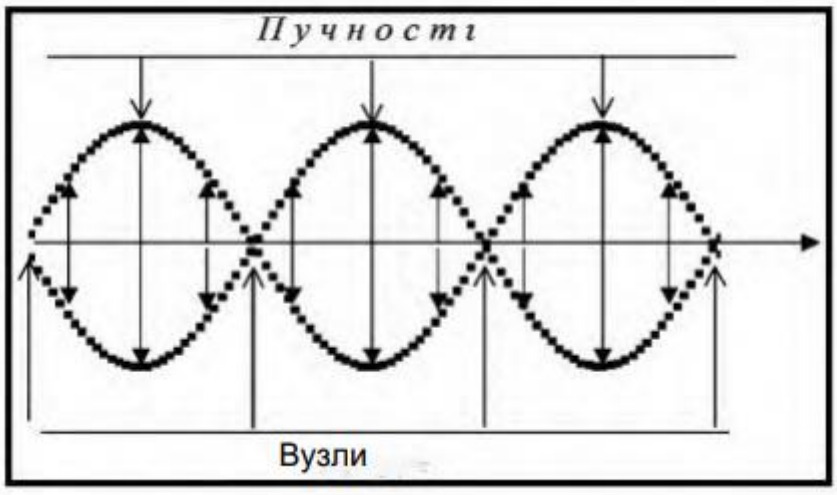


Рисунок 6.3 - Стояча хвиля

відбитої хвиль відбувається у точках (вузлах), з різницею ходу, яка визначається формулою $\Delta s = (2n + 1)(\lambda /2)\ (n = 0, 1, \ldots)$. Стояча хвиля має такі властивості:

• коливання між сусідніми вузлами відбувається з однаковою фазою (синфазно);

• рухи частинок по різні боки від вузла протилежні по фазі (якщо з одного боку від вузла частинка рухається вгору, то з іншого – вниз);

• стоячою хвилею енергія не переноситься, а перетворюється з одного виду на інший (наприклад, кінетична енергія частинки переходить у її потенційну енергію).

Стоячі хвилі спостерігаються у закритих водоймах, музичних інструментах та інших фізичних об'єктах. Як приклад, нижче розглянемо поперечні коливання струни.

6.2 Коливання струни та звук

Нехай струна має довжину l. Розглянемо малі відхилення частини струни від положення рівноваги: амплітуда відхилення має бути мала для того, щоб забезпечувалась сталість у часі довжини струни та її натягу T (рисунок 6.4).

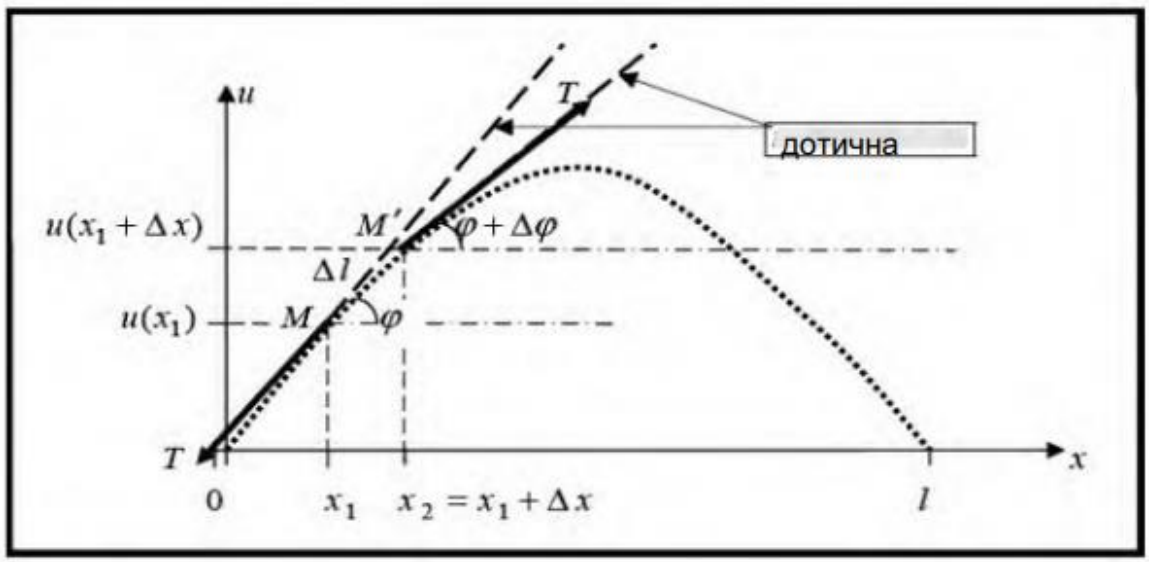


Рисунок 6.4 - Вигин струни

Рух довільної точки *M* струни відбувається в площині *x*0*u* в напрямку, перпендикулярному до осі 0*x*. Її зміщення з положення рівноваги будемо описувати функцією відхилення *u(t; x)*. Розглядатимемо досить малі відхилення *(u(x₁ + Δ x) −u(x₁) << u(x₁))*, при цьому виконується наближена рівність $\Delta l \cong \Delta x$, і натяг струни (сила *T*) у всіх точках струни буде однаковим. Це означає, що до елемента струни ММ′ по дотичних до струни прикладені рівні сили *T*. Нехай дотична до струни в точці М утворює з позитивним напрямом осі 0*x* кут ϕ , а в точці *M ′* – кут ϕ

$+ \Delta\phi$. Проекція на вісь 0u сил, які діють на малий елемент струни ММ $'$, дорівнює $T \sin(\phi + \Delta\phi) - T \sin\phi$. Оскільки зміщення точок струни малі, то і кут також малий. Отже, використовуючи еквівалентність нескінченно малих функцій можна записати, *що* $\sin\phi \approx tg\phi = \partial u(t; x)/\partial x$.

Тоді проекція на ось *u* сил, прикладених до елемента *ММ* $'$, набуває наступного вигляду:

$$T\sin(\varphi+\Delta\varphi)-T\sin\varphi \approx T[\partial u(t;\, x+\Delta x)/\partial x-\partial u(t;\, x)/\partial x] = T\int_{x_1}^{x_1+\Delta x}\left[\partial^2 u/\partial x^2\right]dx$$

Позначимо через *f (t ; x)* зовнішню силу, що діє на струну в позитивному напрямку осі *u* викликає її вигин і розрахована на одиницю довжини. Її проекція на цю вісь дорівнює

$$\int_{x_1}^{x_1+\Delta x} f(t;\, x)\,dx$$

При малих коливаннях струни сила опору середовища прямо пропорційна швидкості руху, тоді її проекція на вісь *u* запишеться як

$$-2k\int_{x_1}^{x_1+\Delta x}\left[\partial u/\partial t\right]dx \qquad ,$$

де параметр *k* – коефіцієнт опору повітря. Відповідно до другого закону Ньютона рівнодіюча всіх сил, прикладених до елемента *ММ* $'$, дорівнює

$$\int_{x_1}^{x_1+\Delta x}\rho(x)\left[\partial^2 u/\partial t^2\right]dx \qquad ,$$

де $\rho(x)$ –лінійна густина. Таким чином, можна записати

$$\int_{x}^{x+\Delta x}\left[T\partial^2 u/\partial x^2 + f(t;\, x) - 2k\,\partial u/\partial t - \rho(x)\partial^2 u/\partial t^2\right]dx = 0$$

В силу довільності вибору точки x_1 підінтегральна функція обертається в нуль навколо обраної точки струни. При постійній лінійній щільності пружної нитки рівняння приводиться до виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2h\frac{\partial u}{\partial t} = v^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + q(t;\, x)$$

де коефіцієнти $h = k/\rho$, $v_2 = T/\rho$ ($v = T/\rho$ - швидкість хвилі) і $q\,(t;\, x) = f\,(t;\, x)/\rho$. За відсутності зовнішніх сил ($q\,(t\,;\, x) = 0$) та опору середовища ($h = 0$) співвідношення приймає вид рівняння, що описує вільні коливання струни:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (6.1)$$

Оскільки кінці струни жорстко закріплені, то в якості граничних умов

$$\begin{cases} u(t;\,0)=0 \\ u(t;\,l)=0 \end{cases}$$

вибираємо наступні (крайове умови першого типу), а як початкові умови – початковий профіль $u(0;\,x)=\psi(x)$ та швидкість $\partial u(0;\,x)/\partial t=\sigma(x)$. Рішення отриманого рівняння шукатимемо шляхом поділу змінних, тобто представлення зміщення у вигляді добутку двох функцій, кожна з яких залежить тільки від однієї із змінних: $u(t;\,x)=T(t)\,X(x)$. Тоді рівняння вільних коливань (6.1) набуде вигляду $T''(t)\,X(x)=v^2\,T(t)\,X''(x)$. Розділивши обидві частини рівності на величину $v\,2u(t;\,x)=v^2\,T(t)\,X(x)$, отримуємо

$$\frac{T''(t)}{v^2\,T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}=-\lambda \qquad ,$$

де λ – число(оскільки ліва частина рівності залежить лише від t, права - від x). Таким чином, вихідне рівняння зводиться до системи однорідних диференціальних рівнянь другого порядку

$$\begin{cases} T''+\lambda v^2 T=0 \\ X''+\lambda X=0 \end{cases}$$

(рівняння динаміки), за додаткових умовах $X(0)=X(l)=0$, при $T(t)\equiv 0$, $u(t;\,x)\equiv 0$ (задача Штурма-Ліувіля). Нескладно показати, що у випадках, коли параметр λ є від'ємним або дорівнює нулю, нетривіальних рішень задачі Штурма-Ліувіля немає. При позитивних значеннях параметра λ загальне рішення задачі має вигляд:

$$X(x)=C_1\cos(\sqrt{\lambda}\,x)+C_2\sin(\sqrt{\lambda}\,x)$$

При використанні граничних умов знаходимо:

$$\begin{cases} X(0)=C_1=0 \\ X(l)=C_2\sin(\sqrt{\lambda}l)=0 \end{cases}$$

Оскільки рішення не може бути тривіальним, то константа $C_2\neq 0$, тоді $\sin(\lambda\,l)=0$. Таким чином,

$$\sqrt{\lambda}l=\pi n\ \ (n\in Z)\ \text{ або }\quad \lambda=\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2$$

Цим власним значенням параметра відповідають власні функції

$$X_n(x)=\sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right)$$

довільна константа C_2 обрана рівною 1. Вирішення рівняння

$$T''(t)+\lambda v^2 T(t)=0$$

проводиться так само, як і рівняння для функції $X(x)$, отже, воно має аналогічний вигляд:

$$T_n(t)=A_n\cos\left(\frac{\pi nat}{l}\right)+B_n\sin\left(\frac{\pi nat}{l}\right)$$

Розв'язання задачі є сумою часткових розв'язків u $n(t; x) = T(n(t)) X(n(x))$, тобто

$$u(t;x)=T(t)X(x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(t;x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left[A_n\cos\left(\frac{\pi nat}{l}\right)+B_n\sin\left(\frac{\pi nat}{l}\right)\right]\sin\left(\frac{\pi nx}{l}\right)\right\} \quad (6.2)$$

$$\begin{cases} u(0;x)=\psi(x) \\ \partial u(0;x)/\partial t=\sigma(x) \end{cases}$$

функції $\psi(x)$ *і* $\sigma(x)$ розкладаються в ряди Фур'є, що дозволяє знайти константи A_n і B_n у рішенні (6.2).

У найпростішому випадку стояча хвиля на струні описується функцією $u(t\ ;\ x) = u_0\ sin(kx)\ sin(\omega\ t)$, де амплітуда $A(x) = u_0\ sin(kx)$ залежить від початкового зміщення u_0, хвильового числа $k = 2\pi\ n/l$ та координати x точки на осі абсцис. Вузлам відповідають точки, у яких $sin(kx) = 0$, а пучностям – $sin(kx)$ =1. Кругова частота пов'язана з хвильовим числом k дисперсійним співвідношенням виду $\omega = k\ v$.

Пружні хвилі в газах, рідинах і твердих тілах називаються акустичними, оскільки вони породжують звукові хвилі, частота яких лежить у межах від декількох Гц (інфразвук) до десять у тринадцятій степені Гц (гіперзвук). Вказаним частотам відповідають хвилі з довжиною від десятків кілометрів до кількох ангстрем . Струна, що вібрує, породжує в оточуючому повітрі звукову хвилю.

Звук є поздовжньою хвилею, що є періодичним чергуванням стисків і розріджень. Звукова хвиля поширюється без перенесення імпульсу, тобто. частинки речовини не беруть участь у поступальному русі, а коливаються поблизу своїх рівноважних положень. Взаємодія частинок призводить до руху розташованих на околі інших часток, який і сприймається ,як передача збурення від однієї точки середовища до іншої точки. Хвиля, що біжить, поширюється зі швидкістю v відповідно до рівняння (6.1). Швидкість звуку визначається фізичними характеристиками середовища. Наприклад, у повітрі швидкість звуку визначається за формулою

$$v=\sqrt{\frac{\gamma RT}{M}} \quad ,$$

де γ – постійна адіабати (для повітря цей параметр дорівнює 1,40), R = 8,31Дж·моль$^{-1}$ /К – універсальна газова стала (Дж – Джоуль, К – Кельвін), T – температура за абсолютною шкалою Кельвіна, M – молярна маса, (M повітря = $29 \cdot 10^{-3}$ кг·моль$^{-1}$). У разі малих хвильових амплітуд більш загальна формула для визначення швидкості розповсюдження звукової хвилі в реальних речовинах має вигляд

$$v = \sqrt{(dP/d\rho)_{\rho_0}} \quad ,$$

де P – тиск (в одиницях виміру Н·м$^{-2}$; Н – Ньютон), ρ – щільність середовища, а ρ_0 – її рівноважне значення. Якщо поздовжня хвиля проходить вздовж тонкого металевого стрижня (поперечний розмір стрижня значно менше довжини звукової хвилі, що розповсюджується, то її швидкість обчислюється згідно з формулою

$$v = \sqrt{E/\rho} \quad ,$$

де E – модуль Юнга (Па – Паскаль), ρ – густина матеріалу стрижня (кг·м$^{-3}$). В разі товстого стрижня (поперечний розмір стрижня значно більше довжини звукової хвилі, що поширюється) швидкість звуку дорівнює

$$v = \sqrt{Eq(\mu)/\rho} \quad ,$$

де функція

$$q(\mu) = \frac{1-\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)} \quad ,$$

а μ – коефіцієнт Пуассона. При всіляких значеннях коефіцієнта Пуассона функція $q(\mu) > 1$, тому в товстому стрижні звук поширюється швидше, ніж в тонкому. Найбільш складним для аналізу є випадок поширення звуку в стрижні, товщину якого можна порівняти з довжиною звукової хвилі. Фазова швидкість такої хвилі залежить від її частоти, а стрижень виконує роль хвилеводу: при його плавному згинанні хвиля рухається вздовж його осі.

6.3 Поверхневі хвилі

Для створення хвиль, що розповсюджуються по поверхні води, використовують вібратор з регульованою частотою коливань від 20 до 100 Гц (Герц) (див. праве зображення на рисунку 6.1). Вібратор використовується для створення збуджуючої сили, як "пружні" сили (які повертають у вихідне положення) при цьому виступають сили поверхневого натягу і тяжіння. Якщо на поверхню рідини не діють

зовнішні сили, крім сили тяжіння, вона має вигляд горизонтальної площині. Будь-яка дія ззовні призводить до викривлення поверхні води, що призводить за рахунок поверхневих сил до збільшення потенційної енергії.

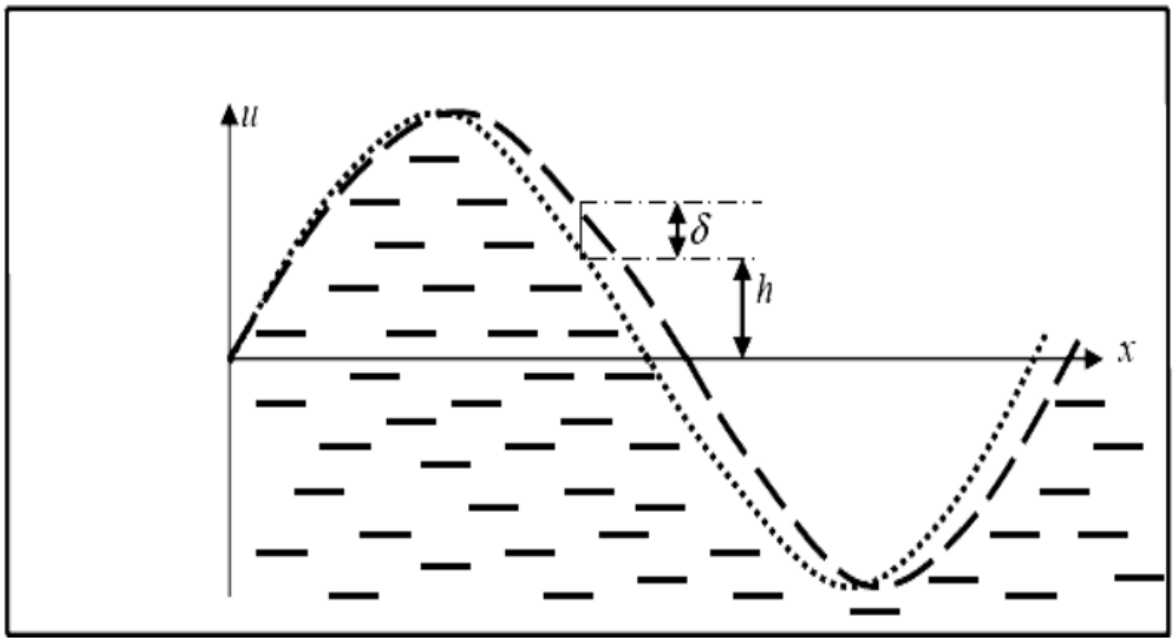


Рисунок 6.5 - Хвиля на поверхні рідкого середовища

Внаслідок чого поверхня намагається повернутися в її вихідний плоский стан з мінімальною потенційною енергією. Якщо амплітуда хвиль мала, то можна приблизно прийняти, що траєкторіями руху частинок води є кола.Коливання будуть вважатися малими, якщо радіус кола r буде значно менше довжини хвилі λ (r << λ). Окружність виникає при складанні поздовжніх та поперечних хвиль (гвинтовий рух). Радіус кола, яким рухаються молекули води, швидко зменшується під час переходу вглиб від поверхні води. В зв'язку з цим можна вважати, що хвиля рухається в тонкій пластинкоподібної області (прикордонний шар), а її решта залишається у стані спокою. Діаметр кола, по якому рухаються частинки дорівнює різниці між висотою гребеня та глибиною западини хвилі. Зазначимо, що на гребені хвилі частки рухаються у напрямку переміщення хвилі, а у западині – у протилежний бік.

Нехай система координат жорстко пов'язана з хвилею, що розповсюджується (рухома система відліку ,на відміну від нерухомої ,лабораторної системи відліку). У вибраній системі відліку спостерігається рух частинок поверхні так би мовити, “замороженої” хвилі з абсолютною

$$v_0 = \frac{2\pi r}{T}$$

швидкістю у бік протилежний до поширення хвилі. Отже, у западині хвилі відносна фазова швидкість їхнього переміщення буде дорівнювати

$$v+\frac{2\pi r}{T}$$

(v – швидкість поширення хвилі). На гребені хвилі фазова швидкість руху частинок дорівнюватиме

$$v-\frac{2\pi r}{T}$$

що пов'язане із збільшенням потенційної енергії частинок. Якщо знехтувати поверхневими силами порівняно з силами тяжіння, що виникають на поверхні води, хвилі називають "гравітаційними" (дана назва взята в лапки для того,щоб відрізняти такі хвилі від істинних хвиль гравітаційного поля). Для таких хвиль зміна потенційної енергії дорівнює добутку сили тяжіння mg (m – маса частки, g = 9,81м·сек$^{-2}$ – прискорення вільного падіння) на діаметр кола $d = 2r$: $\Delta U = mg \cdot 2r$. Зміна кінетичної енергії визначається за формулою

$$\Delta K=\frac{m}{2}\left[\left(v+\frac{2\pi r}{T}\right)^2-\left(v-\frac{2\pi r}{T}\right)^2\right]=\frac{4\pi m r v}{T}$$

Згідно із законом збереження енергії знайдені співвідношення мають дорівнювати один одному. Тобто фазова швидкість хвилі має дорівнювати

$$v=\frac{gT}{2\pi}$$

Для малих коливань поверхнева хвиля є практично синусоїдою; довжина хвилі дорівнює $\lambda = vT$. Таким чином, швидкість переміщення поверхневої хвилі пов'язана з її довжиною співвідношенням

$$v=\sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}$$

З цієї формули видно, що із зменшенням довжини хвилі λ швидкість руху знижується, і зі збільшенням λ – зростає за законом “квадратного кореня”. Оцінка впливу поверхневих сил на зміну потенційної енергії зводиться до необхідності враховувати роботу,яку вони виконують. Якщо елементарна поверхня ds піднімається на висоту δ (див. рисунок 6.5), причому початкова кривизна поверхні дорівнює $1/R$ (R - радіус кривизни вертикального перерізу хвилі), то вона буде рухатися проти сили, величина якої дорівнює $d\,s$

$$d\,f=\frac{\alpha}{R}d\,s$$

(α – коефіцієнт поверхневого натягу, який для води дорівнює $73\cdot10^{-3}$ Н·м$^{-1}$).

Позначимо через кут між висотою δ і радіусом кривизни *R* в початковій точці підйому, тоді робота, виконана силою *df* буде визначатися за формулою:

$$dA_1 = \frac{\alpha}{R}\delta\cos\varphi\ d\,s$$

Через суцільність рідкого середовища звільнена область простору повинна бути заповнена відповідною кількістю рідини, яка береться із області вихідної плоскої межі. Для цього треба зробити підйом речовини із щільністю ρ (щільність води дорівнює 10^{-3}кг·м$^{-3}$) на висоту *h* проти сил тяжіння, тобто, виконати роботу

$$dA_2 = \rho g\, h\ \delta\cos\varphi\, d\,s$$

Зміна потенційної енергії визначається сумою робіт:

$$dU = dA_1 + dA_2 = \left(\rho\, g\, h + \frac{\alpha}{R}\right)\delta\cos\varphi\ d\,s$$

Для застосування цієї формули сперше обчислюється радіус кривизни за формулою

$$\frac{1}{R} = \frac{d^{\,2}h}{d\,x^{\,2}}\sqrt{\left[1+\left(\frac{d\,h}{d\,x}\right)^{2}\right]^{-3}}$$

В разі малих амплітуд коливань ця формула набуває простого вигляду

$$\frac{1}{R} \approx \frac{d^{\,2}h}{d\,x^{\,2}}$$

а зміна положення точки підйому задається формулою

$$h = h_{\,0}\sin\left(2\,\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right)\right)$$

Отже

$$\frac{1}{R} \approx \frac{4\pi^2 h}{\lambda^2}$$

Тоді вираз для зміни потенційної енергії можна переписати у вигляді:

$$dU \approx \rho h\left(g+\frac{4\pi^2\alpha}{\rho\lambda^2}\right)\delta\cos\varphi\, d\,s$$

З отриманого співвідношення витікає,що поверхневий натяг ефективно збільшує прискорення вільного падіння на величину

$$\frac{4\,\pi^{\,2}\alpha}{\rho\,\lambda^{\,2}}$$

Отже, вираз для швидкості поширення поверхневої хвилі можна переписати у вигляді:

$$v=\sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}+\frac{2\pi\alpha}{\rho\lambda}}$$

Другий доданок під квадратним коренем з'явився в результаті обліку поверхневих сил, відповідальних за виникнення капілярних хвиль. Якщо поверхневе натяг значно перевищує дію сили гравітації

$$(\frac{g\lambda}{2\pi}<<\frac{2\pi\alpha}{\rho\lambda})$$

то капілярні хвилі рухаються зі швидкістю

$$v=\sqrt{\frac{2\pi\alpha}{\rho\lambda}}$$

Отримане співвідношення використовується для визначення коефіцієнта поверхневого натягу. Мінімально можлива довжина поверхневої хвилі дорівнює

$$\lambda_{\min}=2\pi\sqrt{\frac{\alpha}{\rho g}}$$

Реальний рух хвилі відбувається не з фазовою швидкістю, а зі швидкістю *V*, яка називається груповою швидкістю. Відмітимо, що

$$\begin{cases} V>v, & при \quad \lambda<\lambda_{\min} \\ V<v, & при \quad \lambda>\lambda_{\min} \end{cases}$$

Поверхневі хвилі, як і інші типи хвиль, можуть накладатися одна на іншу(суперпозиція хвиль), інтерферувати, огинати перешкоди, розмір яких можна порівняти з їх довжиною (дифракція) і т.д.

Залежність швидкості руху поверхневих хвиль від довжини хвилі призводить до породження звукових хвиль (наприклад, вони збуджуються у повітрі при русі суден). Довгі хвилі мають більшу швидкість і швидше досягають спостерігача. У зв'язку з цим спочатку ми відчіваємо рідкісні, а потім – частіші сплески води, викликані коротшими хвилями.

Неоднозначна поведінка хвиль у різних фізичних експериментах привела до необхідності введення квантів хвильових полів, що пов'язано з корпускулярно-хвильовим дуалізмом матерії. Наприклад, у квантовій фізиці твердого тіла квазічастинка акустичного поля називається фононом. Таким чином,вивчення хвиль показує ще одну особливість динамічних систем: іноді вони поводяься , як суцільна фізична субстанція (поле), а іноді, як дискретний об'єкт – частинка . Ця особливість фізичного світу контрастно проявлюється у випадку нелінійних хвиль.

7 НЕЛІНІЙНІ ЕЛЕМЕНТИ ТА ЇХ ВЗАЄМОДІЯ

7.1 Нелінійні ефекти

Розглянемо слабонелінійний осцилятор. Рівняння динамічної поведінки слабонелінійної коливальної системи, для якої досить малими величинами є нелінійність, диссипація енергії та амплітуда f_0 зовнішньої збуджуючої сили $f(t) = f_0 \cos(\Omega t)$ має вигляд:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \mu \left\{ f_0 \cos(\Omega t) - \alpha x^2 - \beta x^3 - 2\lambda \dot{x} \right\},$$

причому параметр μ є дуже малою величиною ($\mu << 1$). При дослідженні резонансу рішення динамічного рівняння шукається на зовнішній частоті сили, тобто. у вигляді $x(t) = A(t) \sin(\Omega t + \delta(t))$. Нехай власна частота осцилятора ω відрізняється на малу величину ε від частоти Ω : $\omega = \Omega - \varepsilon$ тоді динамічне рівняння можна переписати у вигляді

$$\ddot{x} + \Omega^2 x = \mu \left\{ f_0 \cos(\Omega t) - \alpha x^2 - \beta x^3 - 2\lambda \dot{x} + 2\varepsilon \Omega x \right\}$$

Використовуючи метод Ван дер Поля, сутність якого полягає у введенні двох величин з умовою зв'язку між ними, запишемо скорочені рівняння для амплітуди і фази:

$$\dot{A} = \frac{f_0}{2\Omega} \cos\delta - \lambda A \quad \text{и} \quad A\dot{\delta} = -\frac{f_0}{2\Omega} \sin\delta + \frac{3\beta}{8\Omega} A^3 - \varepsilon A$$

Нелінійну резонансну криву, що визначається залежністю $A(\varepsilon)$, знаходять за умов $A = 0$ та $\delta = 0$, які визначають стаціонарний стан. Резонанс описується співвідношенням

$$\varepsilon = \gamma A_0^2 \pm \sqrt{\left(\frac{f_0}{2 A_0 \Omega}\right)^2 - \lambda^2}$$

(A_0 – амплітуда коливань у стаціонарному режимі). При виконанні нерівності

$$A_0 < \frac{f_0}{2\Omega} = A^*_{BH}$$

графік залежності $A^2_0(\varepsilon)$ описує однозначну функцію, аналогічну кривій,зображеній на рисунку 3.8, але зі зміщеним максимумом. При збільшенні власної частоти коливань зі зростанням амплітуди максимум зміщується у бік більших частот, а інакше –у бік менших частот. Якщо

реалізується нерівність $A_0 > A^*_{ВН}$, то графік відображає неоднозначну функцію (рисунок 7.1) з “г”-подібною ділянкою.

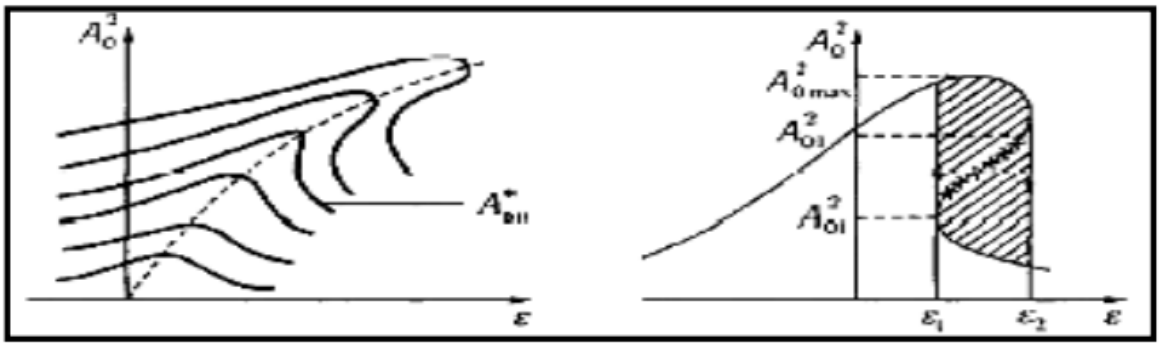


Рисунок 7.1 - Резонансні криві нелінійного осцилятора

З рисунку 7.1 видно, що з частоті ε_2 відбувається стрибкоподібне зменшення амплітуди коливань, а за частоті ε_1 – її зростання, тобто. ділянка кривої, відзначений хрестиками відповідає за виникнення “лавиноподібної” нестійкості. Така поведінка динамічної системи отримала назву гістерези. Зазначимо, що для системи пов'язаних нелінійних осциляторів можливі появи внутрішніх резонансів, коли можливе зростання одних амплітуд та зменьшення інших доти, доки не будуть врівноважені кількості амплітудз $A_0 < A^*_{ВН}$ *та* $A_0 > A^*_{ВН}$ (властивість перемішуваності).

7.2 Електрон у періодичному електричному полі поздовжньої хвилі

Розглянемо рух електрона з масою m в електричному полі, потенціал якого описується періодичною функцією $\phi\ (t) = \phi(0)\ cos(\omega t - k\ x\ )$. У системі відліку, пов'язаної з хвилею, рівняння руху електрона має вигляд (у вибраній системі координат потенціал $\phi(t) = \phi(0)\ cos(k\ x\ ))$: $m\ x + e\phi\ 0\ sin(kx) = 0$. Зазначимо,що аналогічне рівняння є основою елементарної теорії лазера для випадку, коли амплітуда хвилі вважається постійною. Фазовий портрет такої динамічної системи показано на рисунку 3.10. Якщо електрон переміщується вздовж хвилі з досить великою швидкістю, він не “помічає” потенційних ям, а його швидкість відчуває невеликі коливання. На фазовому портреті рух електрона відображується сепаратрисою (рисунок 7.2). Якщо швидкість електрона не перевищує критичної швидкості, яка визначається рівністю кінетичної та потенційної енергій електрона

$$v_{кр.} \le \sqrt{2\,e\,\varphi_0 / m} \quad ,$$

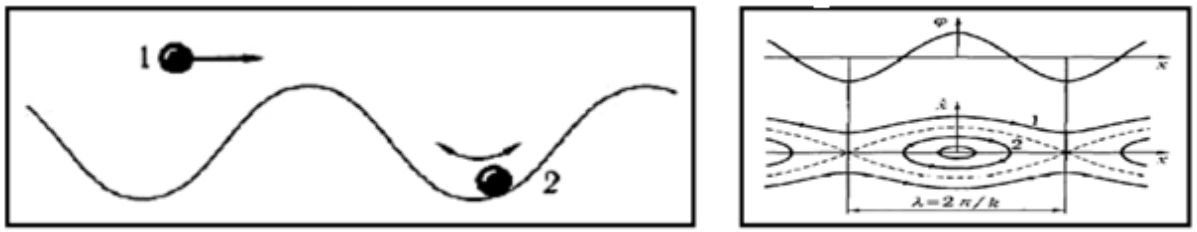


Рисунок 7.2 - Фазові траєкторії руху частинок

тоді він “захоплюється” потенційної ямою і здійснює у ній коливання (фазова траєкторія 2). Іншими словами, якщо швидкість електрона в лабораторній системі відліку менша, ніж сума фазової швидкості хвилі ω/k та $v_{кр}$. , він захоплюється хвилею. Пов'язані електрони можуть бути описані моделлю лінійного осцилятора, а пролітаючі – моделлю ротатора (рух по колу). Отже, поведінка електронів в косинусоїдальному потенційному полі може бути описано у вигляді консервативного ансамблю тотожних нелінійних осциляторів з початковими енергіями, що розрізняються. Поводінку ансамблю з плином часу описують за допомогою функції розподілу $f(v)$ електронів за їх швидкостями. Нехтування взаємодією електронів один з одним дозволяє розглянути якісну картину поведінки ансамблю. Нехай початковий фазовий об'єм, який займає ансамбль у початковий момент часу, знаходиться між сепаратрисами. Якщо похідна від функції розподілу, обчислена при швидкості рівної фазової швидкості руху хвилі, негативна, то з часом фазова область захоплених електронів перетвориться на спіраль з дедалі більшим числом витків. В силу консервативності динамічної системи (оборотність рівнянь руху в часі), вона повинна повернутися у вихідний стан після досить великого проміжку часу. Однак, як завгодно мала взаємодія між електронами і с хвилею призведе до рівномірного заповнення осциляторами вихідної області фазового простору При цьому кількості частинок, що пролітають і пов'язані, зрівнюються (властивість перемішуваності). Витрати енергії на цей процес компенсує хвиля (нелінійне загасання Ландау). Для дисипативних осциляторів можливий і зворотний процес: збільшення енергії хвилі за рахунок "захвату" частинок, що пролітають. Їхня енергія йде на збільшення амплітуди хвилі. В цьому випадку пов'язаних (повільних) електронів менше, ніж швидких. Збільшення амплітуди хвилі відбувається до тих пір, поки не зрівняються числа швидких та повільних електронів. Показаний механізм взаємодії осциляторів широко використовується для опису зародження турбулентності, в теорії прикордонного шару; для опису збудження нелінійних поверхневих хвиль.

7.3 Генератор Ван дер Поля

Робота генератора Ван дер Поля, одна із можливих схем якого показана на рисунку 7.3 описується рівнянням

$$\ddot{x} - \alpha(1 - \beta x^2)\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad ,$$

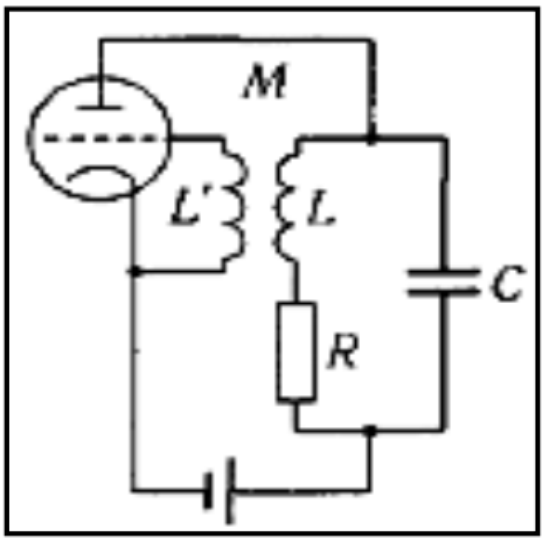


Рисунок 7.3 - Генератор Ван дер Поля

де параметр α характеризує ступінь збудження генератора (при $\alpha < 0$ збудження відсутнє), характеристика β визначає величину амплітуди автоколивань (чим менше β тим більше амплітуда), $\omega_0 = 1/(LC)$ – кругова частота власних коливань. Перейдемо до безрозмірних змінних, ввівши позначення $\tau = \omega_0 t$, $y = \beta x$ і $\mu = \alpha \omega_0$:

$$\ddot{y} - \mu(1 - y^2)\dot{y} + y = 0$$

В залежності від значення параметра μ отримане для осціллятора Ван дер Поля рівняння визначає різні форми автоколивань, показані на рисунку 7.4. З рисунку 7.4 видно, що зростання нелінійності істотно змінює не

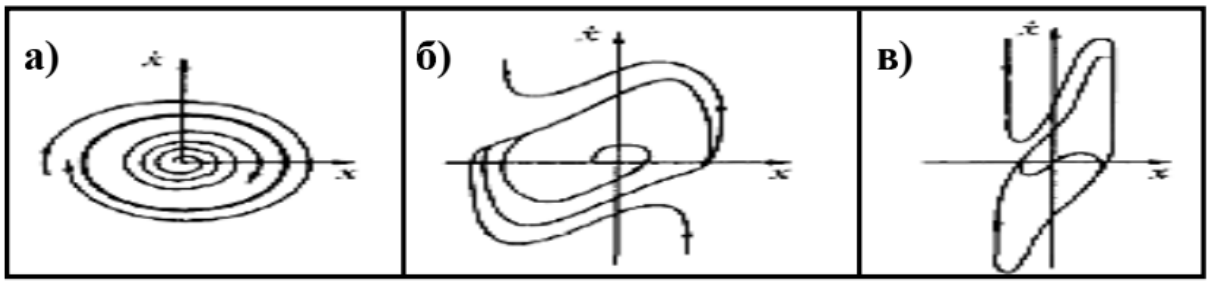


Рисунок 7.4 - Вплив параметра нелінійності на вид автоколивань: а) μ = 0,1 – квазігармонічні коливання; б) μ = 1 – сильно несинусоїдальні; в) μ = 10 – релаксаційні

тільки кількісну, а й якісну картину автоколивань. На рисунку 7.5 показані осцилограми коливань, що відповідають випадкам рисунку 7.4.

На рисунку 7.5в можна бачити ділянки “швидких” ($\mu \to 0$) та “повільних” ($\mu >> 1$) рухів, які знову підкреслюють присутність

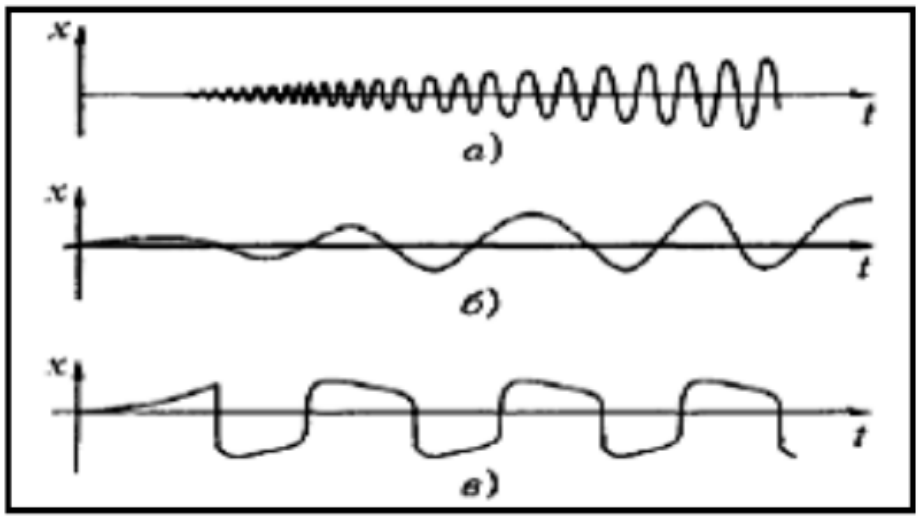


Рисунок 7.5 - Осцилограми автоколивань:
а) $\mu = 0{,}1$; б) $\mu = 1$; в) $\mu = 10$

перемішування та біфуркації (зміна параметра μ, що управляє, призводить до переходу від одного типу автоколивань до іншого) в динамічній системі.

7.4 Нелінійні хвилі: кноїдальні та відокремлені (солітони)

Теорія нелінійних хвиль базується на рівняннях:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + V(u)\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

– моделі однохвильового наближення, яке описує плоску хвилю, що біжить, у нелінійному середовищі;

$$\frac{\partial u}{\partial t} + V(u)\frac{\partial u}{\partial x} - \alpha\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

– моделі Бюргерса для середовищ із загасанням;

$$\frac{\partial u}{\partial t} + V(u)\frac{\partial u}{\partial x} + \beta\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0$$

– узагальнених рівняннях Кортевега-де Фриза для опису хвилі, що біжить, у середовищі з дисперсією (дисперсія – нелінійна залежність кругової частоти від хвильового числа та амплітуди) в області високих частот;

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - V^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mathrm{P}(u) = 0$$

- рівнянь Клейна-Гордона, що враховують взаємодію зустрічних хвиль (середовище з дисперсією в області низьких частот).

У лінійних середовищах без дисперсії хвиля поширюється з постійною швидкістю V відповідно до рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} + V \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

(проста хвиля,чи хвиля Рімана). Така хвиля не може існувати в нелінійному середовищі, тому що спотворення, що виникають в ній, будуть накопичуватися, що призведе до неминучої деформації профілю хвилі (наприклад, хвиля Кортевега-де Фриза, рисунок 7.6). У нелінійному середовищі за відсутності дисперсії спостерігаються ефекти деформації профілю хвилі (компоненти швидкості поширення хвилі залежать один від одного) та розриви фронту хвилі. Малі збурення хвилі перед розривом рухаються повільно, тому вони поглинаються розривом, при цьому розрив розсіює енергію, що призводить до зменшення загальної енергії хвилі. Отже, розрив фронту хвилі може бути стійким лише за дисипації енергії.

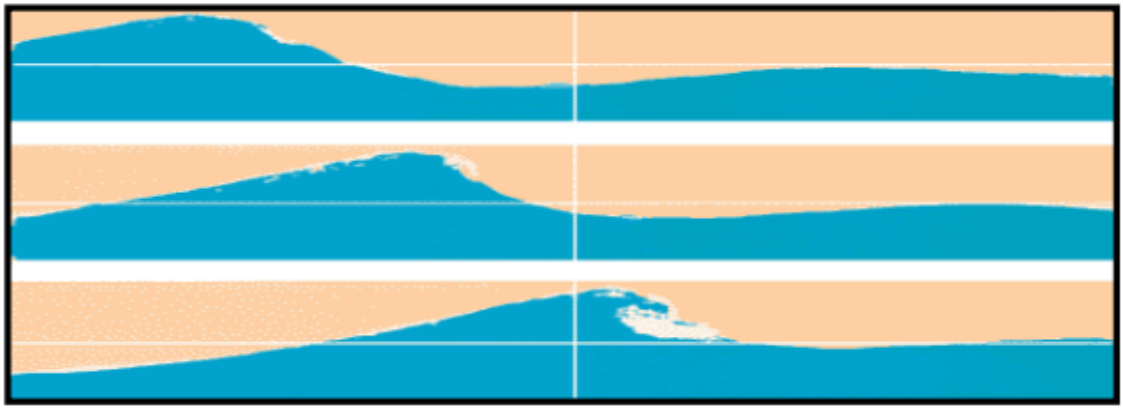


Рисунок 7.6 - Хвиля Кортевега де Фриза

Присутність дисипаційного процесу робить незворотними зміни, що з'являються. При наявність дисперсії середовища виникає питання про те, який з процесів переважатиме: дисипативний або дисперсійний. В силу нелінійності середовища фазова швидкість обурень, що генеруються, буде відрізнятися від групової швидкості хвилі, але дисперсія обмежує сферу їх існування шириною розриву. Таким чином, нехтування дисперсією середовища призводитиме до консервативності хвильового процесу: через деякий час відбувається відновлення деформованого нелінійністю

синусоїдального профілю хвилі. Процес деформування-відновлення профілю хвилі стає періодичним. Однак при деяких співвідношеннях між амплітудами та фазами обурень, що виникають через нелінійність середовища, обмін енергією між окремими гармоніками може відбуватися. І тут система переходить до стану рівноваги, а профіль хвилі залежить від часу (стаціонарна хвиля). Майже стаціонарні хвилі виникають у цілій низці задач, пов'язаних з дослідженням нестаціонарних збурень у динамічних системах. Стійкість стаціонарних хвиль властива дисипативним та консервативним системам. Прикладом сталої консервативної системи зі стаціонарною хвилею є солітон (відокремлена хвиля).

Нехай по поверхні бездисипативної рідини поширюється хвиля, яка описується рівнянням Кортевега-де Фріза (рисунок 7.6):

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + \beta\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0$$

Третій доданок у цьому рівнянні описує дисперсійне “розпливання” хвилі, яке перешкоджає перекиданню фронту, стабілізує профіль та швидкість поширення хвилі V . У цьому випадку функція u(x; t) залежить лише від координати хвилі, що біжить $\xi = x - V t$. Тоді рівняння Кортевега-де Фриза перетворюється з диференціального рівняння на приватних похідних на звичайне диференціальне рівняння

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{d u}{d \xi}\frac{d \xi}{d t} = -V\frac{d u}{d \xi} \quad \text{і} \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{d u}{d \xi}\frac{d \xi}{d x} = \frac{d u}{d \xi}\right) ,$$

$$(u - V)\frac{d u}{d \xi} + \beta\frac{d^3 u}{d \xi^3} = 0$$

Інтегруючи це рівняння, отримаємо

$$\left(\frac{u^2}{2} - V u\right) + \beta\frac{d^2 u}{d \xi^2} = C_1$$

За своїм виглядом це рівняння збігається з рівнянням нелінійного консервативного осцилятора з потенційною енергією (константу інтегрування C_1 покладемо такій, що дорівнює нулю)

$$U(u) = -\left(\frac{u^3}{6} - V\frac{u^2}{2}\right)$$

Фазовий портрет такого осцилятора показаний на рисунку 7.7. З рисунку 7.7 видно, що можливим є цілий ряд розв’язків в залежності від того, в якій частині фазового простору знаходиться хвиля.

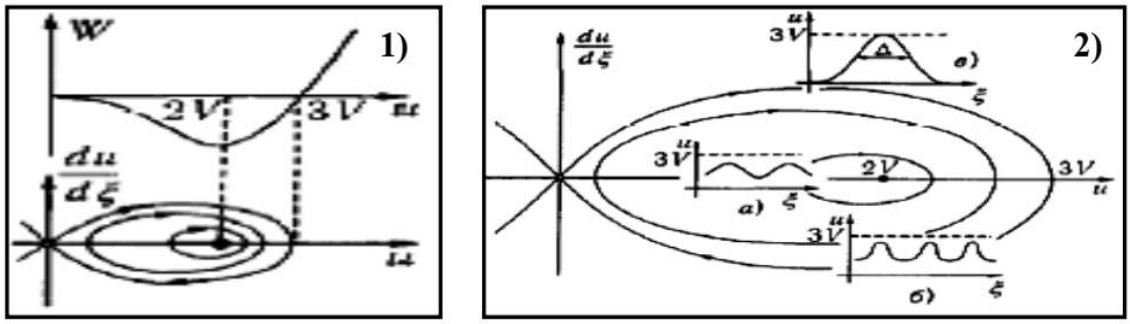


Рисунок 7.7 - Потенційна енергія нелінійного консервативного осцилятора (1)і види рішень рівняння Кортевега-де Фріза (2): а) квазісинусоїдальна хвиля(осциляції поблизу центру); б) кноїдальна хвиля (коливання поблизу сепаратриси); в) відокремлена хвиля або солітон (рух приходить уздовж сепаратриси)

Поблизу центру нелінійність системи не позначається на хвилі з малою амплітудою, тому форма хвилі близька до синусоїдальної. На околиці сепаратриси проявляється сильна нелінійність системи, що призводить до формування особливого виду хвиль: кноїдальних та відокремлених (солітонів, рисунок 7.8).

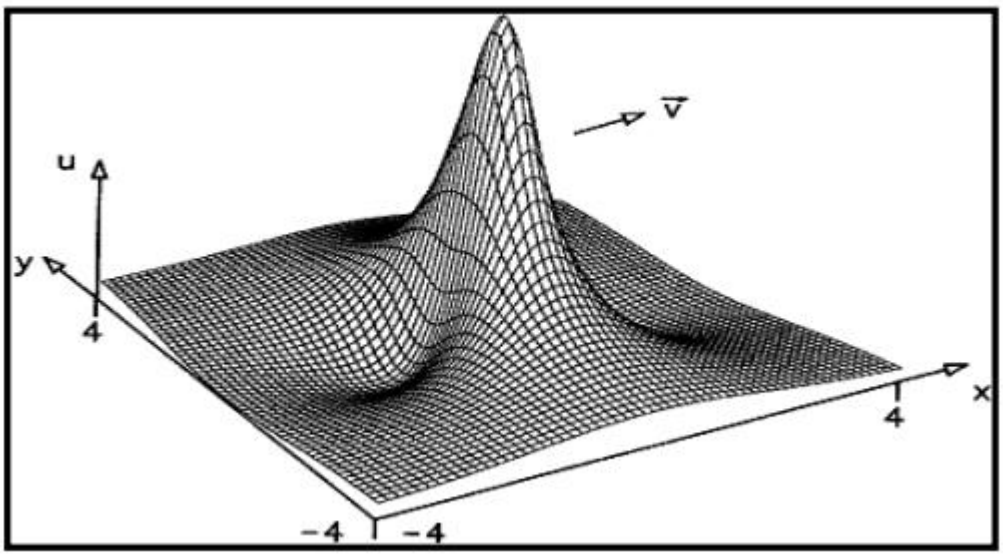


Рисунок 7.8 - Відокремлена хвиля (солітон)

Рішення рівняння Кортевега де Фріза, що описує солітон, має вигляд:

$$u(x;t) = \frac{u_{\max}}{ch^2(\xi/\Delta)}$$

де $u_{max} = 3V$ – амплітуда та

$$\Delta = \sqrt{4\beta/V}$$

- ширина солітону, відповідно. З отриманих рівностей видно: вузький солітон має велику амплітуду і рухається швидше за широкий солітон. Однак властивість перемішування динамічної системи призводить до однакової кількості "швидких" *(Δ → 0)* та “повільних” *(Δ >> 1)* солітонів. Відокремлена хвиля є стійкою освітою. Для роз'яснення цього факту введемо до розгляду безрозмірний параметр

$$\sigma = \frac{V\,\Delta}{4\,\beta} \quad ,$$

який характеризує відношення нелінійності до дисперсії в системі: чим вищий чисельник дробу, тім сильніша нелінійність. Для солітону це відношення дорівнює 1, тобто. Ефекти нелінійної перебудови компенсуються дисперсійним розпливанням солітону. Якщо параметр σ малий ($\sigma << 1$), то обурення, що виникають, сприймають середовище у вигляді речовини з лінійною дисперсією: у системі з'являються гармоніки з великою довжиною хвилі, що спричиняє збільшення параметра σ аж до"народження" солітону. У протилежному випадку ($\sigma >> 1$) дисперсійні ефекти практично не спостерігаються, нелінійність системи породжує гармоніки з дуже малою довжиною хвилі. Тільки після формування цих коротких імпульсів включається дисперсія середовища, яка і призводить до утворення відокремленого хвилі.

Відокремлені хвилі виникають у системах, які різняться за фізичною природою. Наприклад, на рисунку 7.9 показані солітони на магнітній поверхні рідини, а на рисунку 7.10 - відокремлені хвилі, що виникають на резонансах в магнітній рідині.

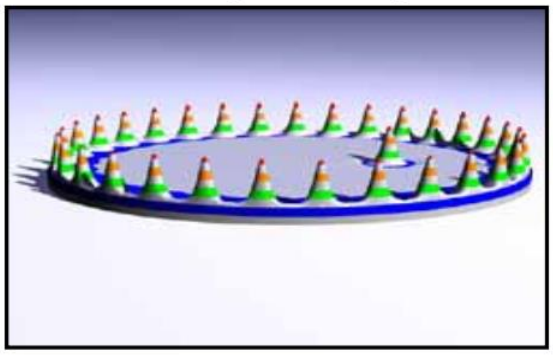


Рисунок 7.9 - Солітони на поверхні

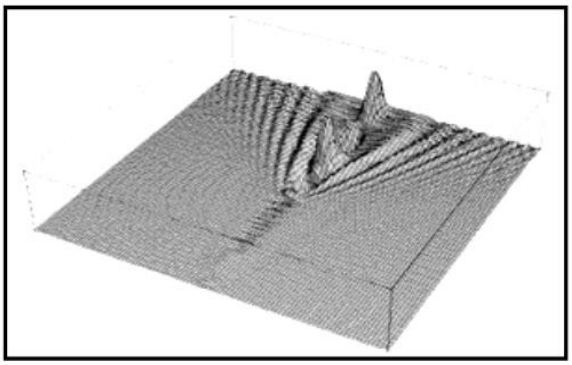


Рисунок 7.10 - Відокремлені хвилі

Дослідження взаємодії солітонів показує, що вони поводяться як класичні частинки: притягуються, відштовхуються і коливаються одна відносно іншої . Наприклад, якщо різниця швидкостей невелика і відстань між солітонами значно перевищує їх ширину, то взаємодія відокремлених хвиль може бути описана згідно із законом Ньютона. Солітони можуть існувати також у вигляді стійких вихорів в атмосфері (солітони Россбі). Обертання і напрямок руху вихору протилежні обертанню планети

(антициклон), а тиск у центрі вихору завжди більший, ніж на його границях.

7.5 Стохастичні рухи речовини

За відсутності випадкових зовнішніх сил (або полів) та досить великих швидкостях течії у суцільних середовищах виникають стохастичні рухи. Вивчимо поведінку детермінованої розподіленої системи та з'ясуємо фізичну сутність процесу, внаслідок якого виникає турбулентність (невпорядковані, хаотичні рухи у суцільному середовищі, рисунок 7.11).

Рисунок 7.11 - Невпорядковані, хаотичні рухи в цівці сигаретного диму

Гідродинамічні течії в'язкої рідини описуються:
- рівнянням Навье-Стокса:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u} = -\frac{\nabla P}{\rho} + \nu \Delta \vec{u}$$

- рівнянням нерозривності середовища:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \vec{u}) = 0$$

(рідина називається нестсискаємою, якщо $\nabla \cdot u = \mathrm{div}\, u = 0$)
- рівнянням стану рідини:

$$P = P(\rho) \quad ,$$

де u (x; *y; z; t)* - швидкість руху середовища;

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$$

- оператор градієнта; P – тиск у системі; ρ – густина рідини; v – коефіцієнт в'язкості;

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

- оператор Лапласа.

Виявилося, що вирішення цих рівнянь при великих швидкостях руху рідини суперечить експериментальним даним. Наприклад, згідно з експериментом, опір руху пропорційно квадрату середньої швидкості за перерізом труби (закон Шезі). За теорією Нав'є-Стокса воно зростає прямо пропорційно першій ступені середньої швидкості (закон Пуазейля). При дослідженні течії струмів підфарбованої рідини Рейнольдс ввів параметр $Re = u\ D/v$ (D – діаметр труби). Він показав, що при числах Re<2000 спостерігається ламінарний перебіг (ламінарний режим перебігу рідини відбувається при швидкостях менших 30 см/сек) і при цьому справедливий закон Пуазейля. При великих числах Рейнольдса виникають випадкові рухи (турбулентність), а опір потоку підпорядковується закону Шезі. Турбулентний режим супроводжується виникненням великої кількості вихорів (рисунки 7.12 і 7.13), причому малі, що виникають вихори

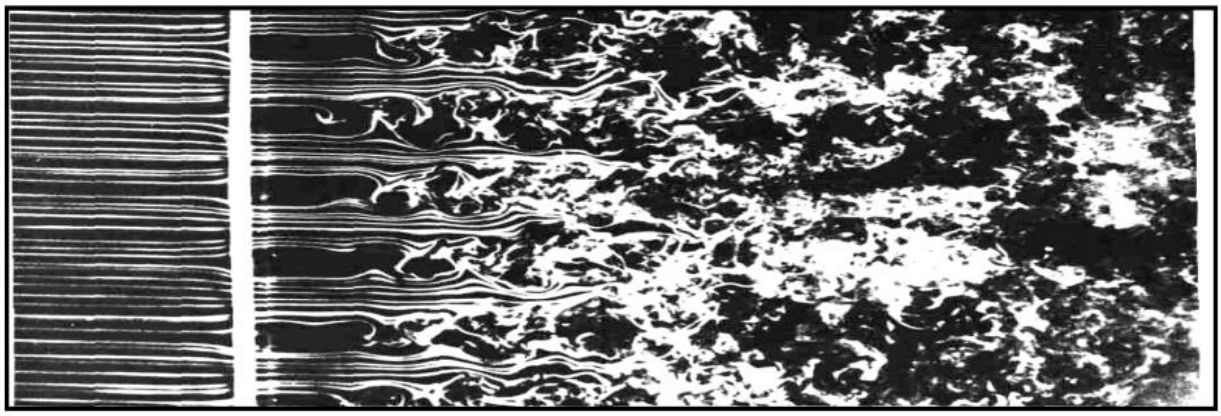


Рисунок 7.12 - Перехід від ламінарного до турбулентного режиму

Рисунок 7.13 - Виникнення вихору при турбулентному русі повітря

відбирають енергію у великих і передають її ще меншим вихорам. Отже, дисипація енергії при турбулентності породжує цілий спектр вихорів, мінімальний розмір яких регулюється в'язкістю середовища. Перемішування вихорів відбувається до вирівнювання числа великих і малих вихорів. Критичний лінійний розмір вихору можна оцінити, використовуючи визначення числа Рейнольдса

$$l_{кр} = \frac{D}{\mathrm{Re}_{кр}} = \frac{\nu}{u_{кр}}$$

Вихори, розмір яких можна порівняти з критичним, можна вважати малими, а за умов значного перевищення цього розміру – великими. Основною теоретичною проблемою при описі турбулентності є з'ясування причин її виникнення та механізму реалізації. Наприклад, у моделі Ландау-Хопфа виникнення хаотичних рухів пояснюється ,як серія послідовних нестійкостей. Переплутування збурень, що виникають, і постійна поява нових флуктуацій породжує хаос у спочатку впорядкованому стані . Пояснення причин виникнення турбулентності вимагає залучення нескінченної послідовності ступенів свободи. Це пов'язано з концепцією, яка походить із статистичної фізики: з погляду теорії Ньютона можна детерміновано описати рух кожної частинки, але рух системи навіть невзаємодіючих частинок настільки складний, що динамічний підхід втрачає сенс. За теорією Ландау-Хопфа перехід до хаосу системи з нескінченним числом ступенів свободи відбувається так: рівноважний стан стає нестійким і при певному значенні керуючого параметра породжує у своєму околі граничний цикл. У процесі появи граничного циклу відбувається виникнення періодичного руху, який також втрачає стійкість.

Замість граничного циклу виникає плоский тор, що потім вироджується в тривимірний тор. При досить великій кількості виникаючих гармонік описаний квазіперіодичний процес виглядає випадковим. В результаті чергової біфуркації стану динамічної системи можлива поява дивного атрактора, що відповідає виникненню стохастичної течії із суцільним енергетичним спектром. Аналогічно тому, як нелінійність та дисперсія середовища стабілізують новий стан при русі поблизу сепаратриси, так наявність в'язкості у середовищі пригнічує гармоніки з високою "самостійністю" (дрібномасштабні збурення). Це призводить до виникнення кінцевої множини в нескінченномірному фазовому просторі, до якого притягуються всі фазові траєкторії. системи під час переходу в турбулентний режим.

Особливий інтерес у теоретиків та експериментаторів викликають анізотропні турбулентні течії, у яких були виявлені когерентні структури. Вони істотно впливають на фізичні параметри потоків і є складовою турбулентної течії нарівні з глобально середньою течією та стохастичними компонентами. Стохастичний компонент пов'язаний із виникненням випадкових збурень та фрактальною структурою множини особливостей поля завихрення. Сильно анізотропні течії в приграничному шарі, або шарі змішування, поки не досліджені теоретично, що пов'язано, мабуть, з необхідністю обліку енергетичних ефектів і перерозподілу енергії між нормальними складовими тензора напруг.

8 СОЛІТОНОПОДІБНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ

8.1 Вейвлет аналіз

Розпізнавання образів, одиночних та множинних сигналів, дешифрування рентгенограм, дослідження турбулентності, кодування та компактизація великих обсягів інформації здійснюється за допомогою так званого вейвлет-аналізу (wavelet) [59,60], що у перекладі з англійської означає "маленька хвиля" або "сплеск". Солітоноподібне перетворення базується на використанні сукупності функцій, що мають властивість просторової (або часової) та частотної локалізованості. Локалізація сплеску дозволяє проаналізувати поведінку системи у звичайному просторово-часовому континуумі та у частотному просторі. Вейвлети утворюють ієрархічний базис і застосовуються для моделювання нелінійних процесів у динамічних системах, наприклад, переміжності. Вони дозволяють отримати великомасштабну та високочастотну інформацію про дисипативну систему. На відміну від Фур'є-аналізу, сплески є "математичним мікроскопом", за допомогою якого вивчають внутрішню природу неоднорідних об'єктів та його скейлінгові (масштабні) характеристики. Проведемо порівняння вейвлет-перетворення із 2π-періодичною функцією $f(t)$, яка записана у вигляді ряду Фур'є

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{int}$$

де коефіцієнти ряду знаходяться за формулою

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} \, dt$$

У цьому випадку функція розкладається на гармоніки, тобто задається у вигляді суперпозиції нескінченного числа синусоїдальних хвиль з різними амплітудами та частотами. Для неперіодичних і визначених на всій числовій осі функцій необхідно побудувати нові ряди, дозволяють обчислювати значення функції і відображати її графік у будь-якому інтервалі.

Для вирішення поставленої задачі будемо використовувати маленькі "хвилі", які швидко сходять нанівець при прагненні аргументу функції до нескінченності. Побудову вейвлета $\psi(t)$, здатного покрити всю числову ось, можна здійснити з допомогою зсувів, тобто, визначивши функцію $\psi(\omega t - n)$, де частота вейвлета $\omega = 2k$. Для простоти міркувань будемо вважати, що числа n і k є цілими. Якщо базисний вейвлет $\psi(t)$ має одиничну норму, всі інші функції множини $\psi(k - n) = 2k\psi(2kt - n)$ також будуть нормовані на одиницю, тобто

$$\int_{-\infty}^{\infty}\psi_{kn}(t)\psi_{lm}(t)\,dt=\delta_{kl}\delta_{nm}\ \ (\delta_{kl}=\begin{cases}1, & k=l\\ 0, & k\neq l\end{cases}$$

– символ Кронекера).

Отже, будь-яка неперіодична функція, задана на всій числовій осі, може бути представлена у вигляді вейвлет-ряду:

$$f(t)=\sum_{k,n=-\infty}^{\infty}b_{kn}\psi_{kn}(t)$$

Найпростішим ортогональним вейвлетом є функція Хаара, яка задається формулою

$$\psi(t)=\begin{cases}1, & 0\le t<1/2\\ -1, & 1/2\le t<1\\ 0, & t<0,\ t\ge 1\end{cases}$$

У цьому випадку вейвлет-базис може бути сконструйований із застосуванням масштабних перетворень (скейлінговий коефіцієнт a) та переносів (параметр *b*) материнського вейвлета *ψ (t):*

$$\psi(t):\ \psi_{ab}=\frac{1}{\sqrt{|a|}}\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)$$

(параметри *a* та *b* можуть бути у тому числі і комплексними числами). Тоді інтегральне вейвлет-перетворення довільної функції має вигляд

$$W_{\psi}f(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\psi_{ab}^{*}(t)\,dt$$

Зворотне перетворення при цьому задається співвідношенням

$$f(t)=\frac{1}{C_{\psi}}\int_{-\infty}^{\infty}W_{\psi}f(t)\psi_{ab}(t)\frac{da\,db}{a^2}\quad ,$$

де нормуючий коефіцієнт має вигляд

$$C_{\psi}=\int_{-\infty}^{\infty}\left|\tilde{\psi}_{ab}(\omega)\right|\frac{d\omega}{\omega}$$

З теорії сигналів відомо, що частота сигналу обернено пропорційна його тривалості. Отже, для отримання високочастотної інформації треба витягувати її з вузьких часових інтервалів, низькочастотну складову яка діє для тривалих проміжків часу. Саме такими властивостями сплеск володіє відповідно до свого визначення, а саме :

-локальність (нульове середнє порядку m за часом)

$$\int_{-\infty}^{\infty}t^{m}\psi(t)\,dt=0\ \ (m=0,\ 1,\ldots)$$

,

-обмеженість

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t)\psi^*(t)\,dt < \infty$$

Автомодельність базису зводиться до того, що всі члени множини базисного вейвлета мають таку ж кількість осциляцій, що й основний вейвлет.

На практиці найчастіше використовують вейвлети (та їхні Фур'є-образи), зображені на рисунку 8.1. На рисунку 8.1а б показані вейвлети, отримані за допомогою розподілу Гауса

$$\psi_m(t) = (-1)^m \frac{\partial^m}{\partial t^m}\left(\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)\right)$$

(фурье-образ якого дорівнює

$$\tilde{\psi}_m(k) = m(ik)^m \exp\left(-\frac{k^2}{2}\right)$$

при m = 1 та m = 2, відповідно). На рисунку 8.1в та 8.1г зображені вейвлети Морле

$$\psi(t) = \exp(ik_0 t)\exp\left(-t^2/2\right) \quad \left(\tilde{\psi}(k) = \theta(k)\exp\left(-(k-k_0)^2/2\right)\right.$$

Де тета -спеціальна функція Хевісайда

$$\theta(k) = \begin{cases} 1, & k > 0 \\ 0, & k \le 0 \end{cases}$$

при різних значеннях параметра k_0. Вейвлети Паулі, що використовуються в квантовій механіці і завдаються наступними формулами

$$\psi_m(t) = \Gamma(m+1)\frac{i^m}{(1-it)^{m+1}} \quad ,$$

а Фур'є-перетворення, яких має вигляд

$$\tilde{\psi}_m(k) = \theta(k)k^m \exp(-k)$$

показані на рисунку 8.1д та 8.1е. Вейвлети Гауса, наприклад,

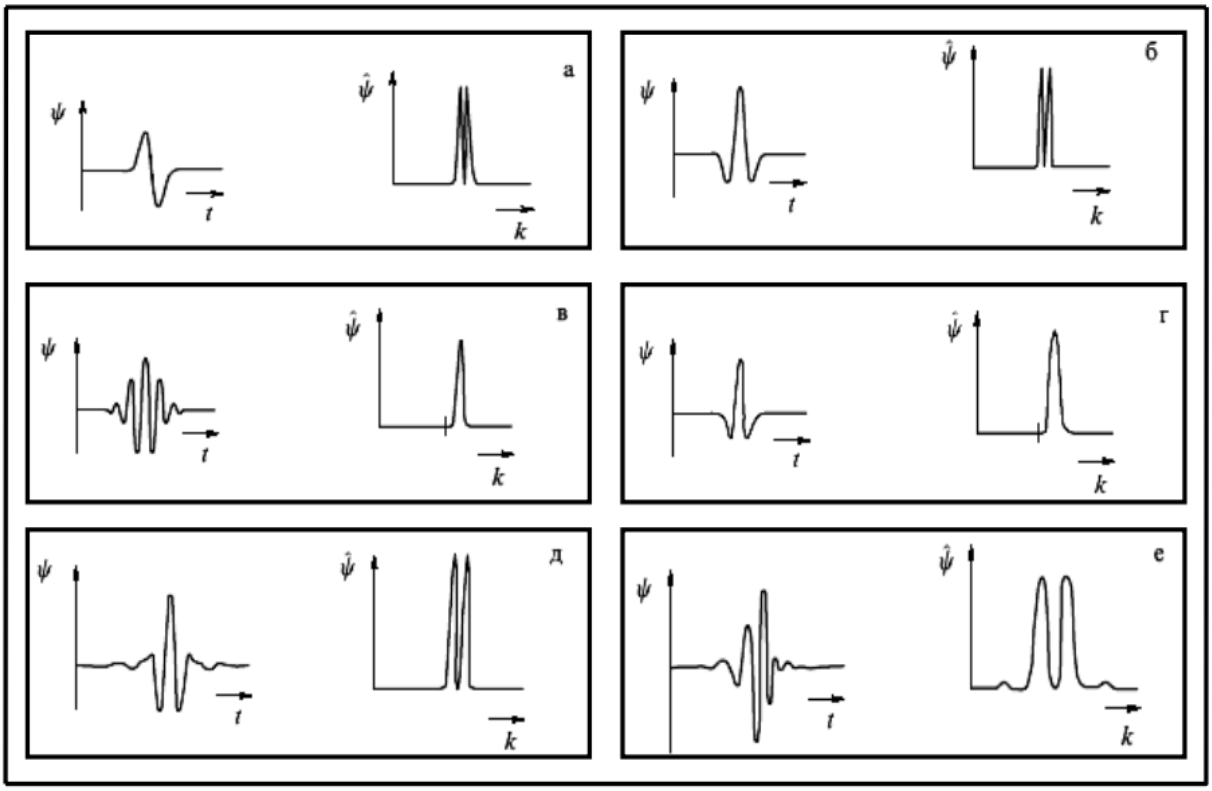


Рисунок 8.1 - Вейвлети та їх Фур'є-трансформанти:
а - WAVE; б - MHAT; в - Morlet; г – Pauli; д - LMB; е – Daubechies

використовуються при аналізі складних сигналів та ізотропних полів. Комплексні вейвлети Морле зберігають напрямок часу та застосовуються для дослідження причинно-наслідкових сигналів, вони не створюють інтерференційної картини між минулими та майбутніми подіями. В результаті застосування вейвлет-аналізу отримують двохпараметричну множину $W\psi(a; b)$, яка зазвичай відображається за допомогою ізолінії на площині параметрів a та b (рисунок 8.2). На рисунку 8.2б темні області відображають позитивні значення коефіцієнтів $W\psi(a;b)$, а світлі їх негативні значення.

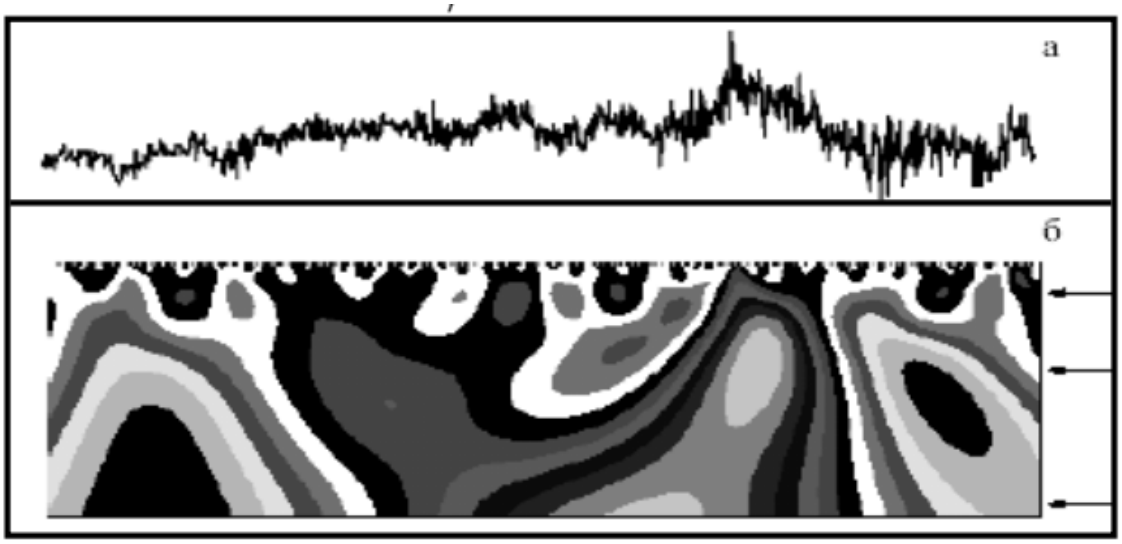


Рисунок 8.2 - Аналізований сигнал (а) та ізообласті параметрів *Wψ (a; b)* (б)

8.2 Вейвлет-образи модельних сигналів

Розглянемо алгоритм знаходження вейвлет-образів *Wψ (a;b)* синусоїдальної функції

$$\psi(t) = \sin\left(2\pi t / T_1\right) + \alpha \sin\left(2\pi t / T_2\right)$$

при різних значеннях параметрів:

1) T_1 = 25, =0. Вейвлет-перетворення синусоїди із частотою $\omega_1 = 2\pi / T_1$ відображений на рисунку 8.3а Верхня частина Рисунок 8.3б демонструє періодичний характер досліджуваного сигналу. Однакова довжина ліній та періодичність їх появи вказує на єдиність та сталість частоти синусоїди.

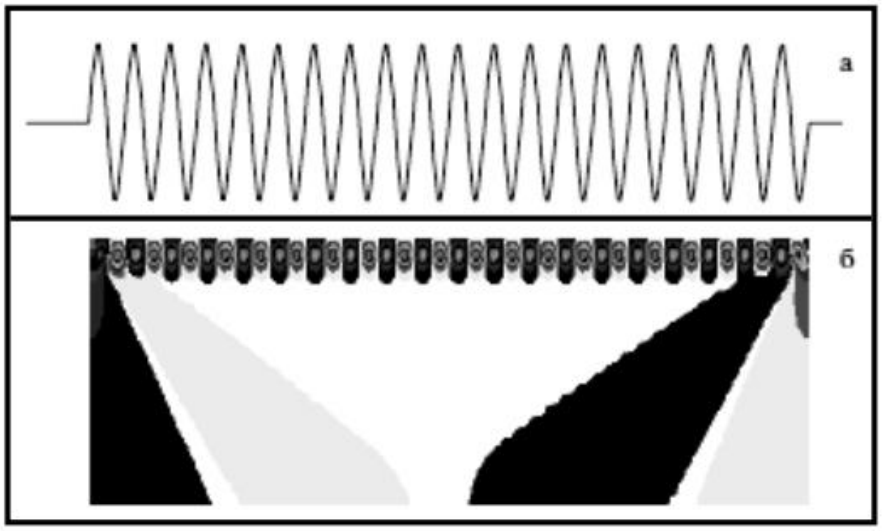


Рисунок 8.3 - Вейвлетне перетворення (б) синусоїди (а)

2) $T_1 = 200$, $T_2 = 40$, $\alpha = 0{,}4$. Коефіцієнти перетворення показані на рисунку 8.4.

Перетворювана функція представляє суму синусоїд із суттєво різними частотами $\omega_1 = 2\pi / T_1$ *і* $\omega_2 = 2\pi / T_2$. Внаслідок резонансу високочастотної компоненти синусоїдальної функції з дрібномасштабними вейвлетами у верхній частині рисунку 8.4б спостерігаються періодично розташовані дрібні деталі. Наявність кореляції між низькочастотною складовою досліджуваного сигналу та великомасштабними вейвлетами відображена на рисунку 8.4б у вигляді трьох темних та двох світлих областей параметрів відображення $W\psi\,(a;\, b)$.

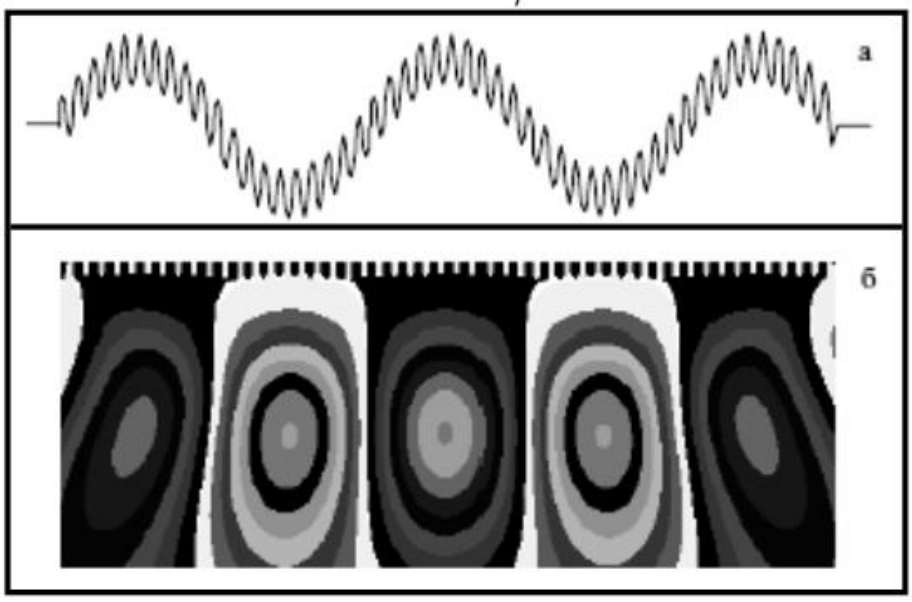


Рисунок 8.4 - Вейвлет-трансформанти $W\psi\ (a;\ b)$ (б) синусоїдальної функції (a)

Вейвлет-аналіз на відміну від Фур'є-перетворення дозволяє розрізняти включення сигналів через певний проміжок часу (наразі розглядаються синусоїди з періодами $T_1 = 25$, $T_2 = 50$) та сума синусоїд ($\alpha = 1$). Увімкнення сигналу показано на рисунку 8.5а, а сума синусоїд на рисунку 8.5б.

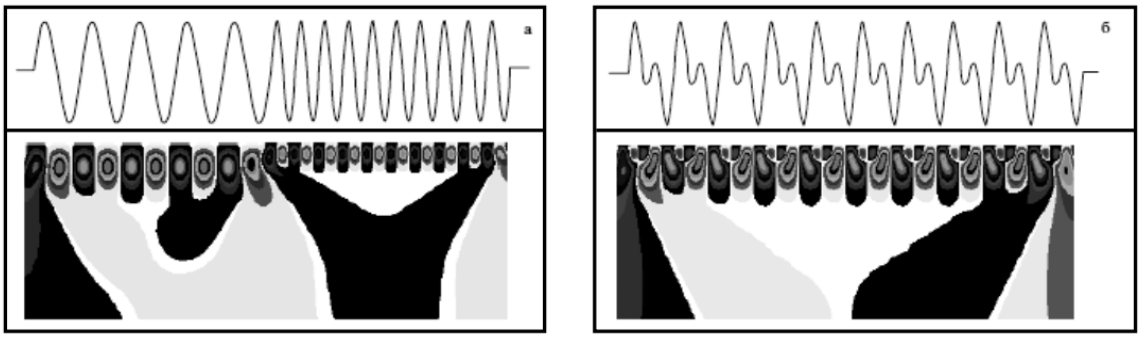


Рисунок 8.5 - Вейвлет-відображення включення сигналу (а) та суми синусоїд (б)

Використання "маленьких хвиль" дозволяє не тільки проаналізувати функцію, що відображається, але і виявити її особливості, пов'язані, наприклад, з фазовим змінами. Зазначена особливість при зміні фази на π синусоїди з періодом $T_1 = 25$ показана на рисунку 8.6. При аналізі особливості сигналу за допомогою ряду Фур'є призводить до появи

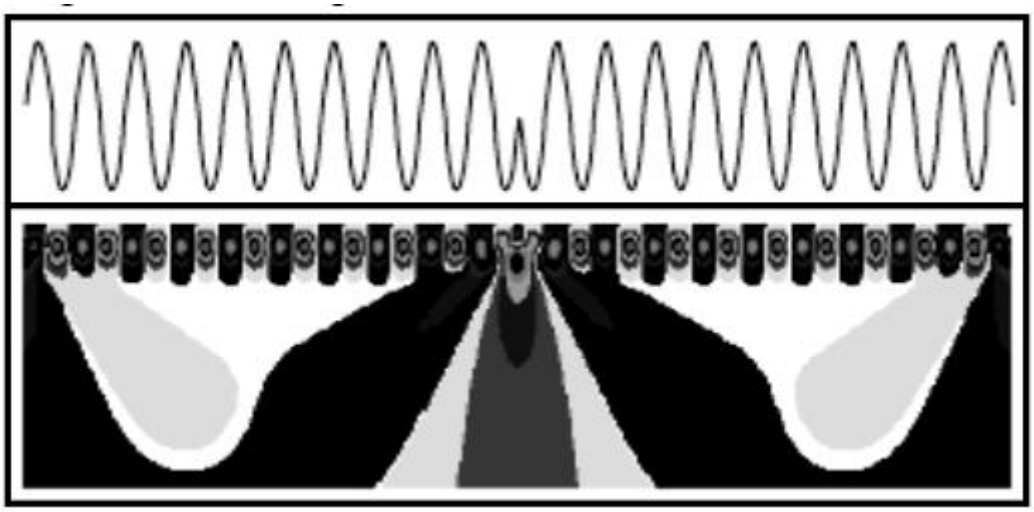


Рисунок 8.6 - Виявлення особливостей аналізуємого сигналу

додаткових піків, оскільки особливість впливає на значення всіх коефіцієнтів і частоти Фур'є-перетворення. Це призводить до неправильної інтерпретації сигналу: передбачається існування кількох масштабів, тоді як він один. У реальних сигналах часто присутні імпульсні перешкоди, різного роду нахили та сходи, які погано виявляються гармоніками Фур'є. Вейвлетні функції дозволяють визначити, як особливість сигналу, так і її розташування та вид. Ізольована особливість локально впливає на вейвлет, і контрастно відображається, тому її можна скоригувати або видалити із сигналу.

8.3 Застосування вейвлетного аналізу

Ієрархічність базису вейвлетів сприяє їх застосуванню для аналізу каскадів різної природи, турбулентності, фрактальних множин та часових рядів.

Розглянемо вейвлетне уявлення про фрактал Кантора. Ця множина будується так: даний відрізок ділиться на три частини, після чого середній відрізок викидається; описаний процес продовжується до нескінченності (“канторівський пил” показаний на рисунку 8.7а).

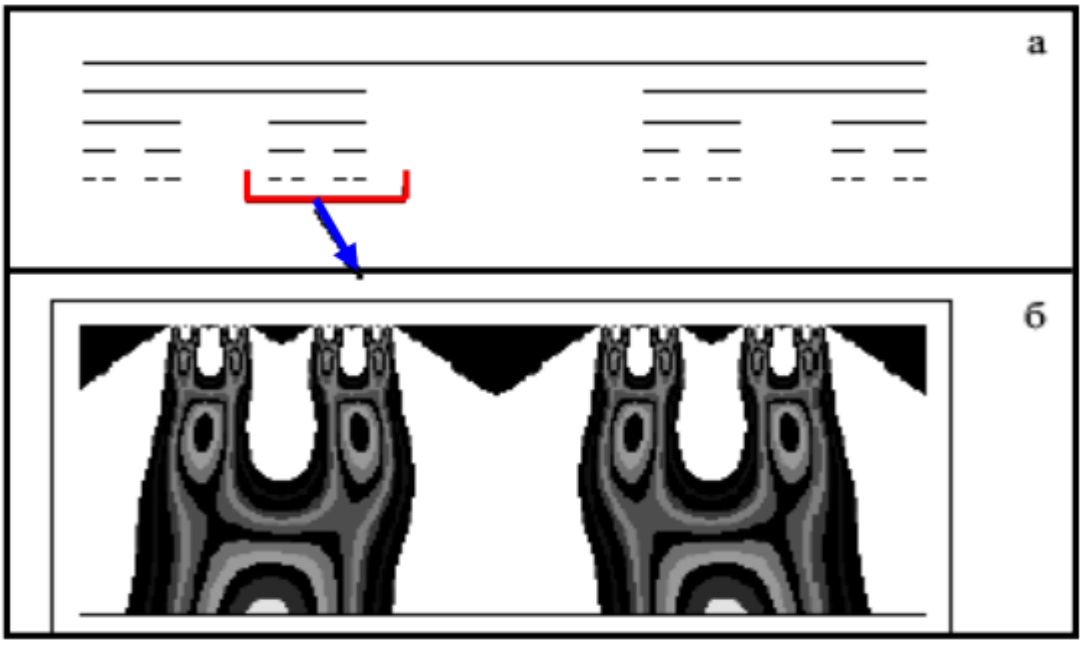


Рисунок 8.7 - Вейвлет-аналіз фракталу Кантора

"Канторовський пил" надалі використовується для побудови двійкової множини, що складається з послідовності нулів (відрізок відсутній) та одиниць (наявність відрізка). Картина вейвлетних коефіцієнтів (рисунок 8.7б) чітко демонструє ієрархію підмножин фракталу Кантора, відображаючи розпад кожного максимуму вищого рівня на два максимуми нижньої множини.

Деякі фізичні процеси описуються тимчасовими рядами, які описують довгострокові спостереження за параметрами фізичного явища. Наприклад, вивчення метеорологічних умов у океані призвело до виявлення великомасштабних атмосферно-океанічних явищ. Цей процес виникає внаслідок різкого потепління води поблизу узбережжя і призводить до переміщення величезних мас повітря, що впливає на стан усієї земної атмосфери. Такі планетарні “гойдалки”, не тільки переганяють маси повітря, але й є причиною виникнення мусонів, що супроводжуються проливними дощами. Атмосферно-океанічні зміни описуються за допомогою часової залежності деякого індексу *C(t)*, що визначає стан системи океан-атмосфера. За негативного значення цього індексу відбувається помітне зниження градієнта тиску між земними півкулями. Зменшення опору вітру викликає рух теплих океанічних вод, що призводить до виникнення коливань в атмосфері планети. Різкі зміни температури води та повітря можуть привести до екологічних катастроф в океані та на суші: тайфунів , холодних зим, посух, розливів і т.п.

Вейвлет аналіз середньомісячних коливань індексу *C(t)* дає можливість виявити автомодельність процесів та наявність ієрархії періодів, що відображають каскадність процесу(від місяця до кількох десятків років).

Складні атомні структури. Відсутність точного аналітичного методу вирішення проблеми багатьох тіл вимагає застосувань наближених методів. Тому нині превалюють експериментальні методи дослідження електронних спектрів багаточасткових атомарно-молекулярних систем. Складність та фрактальна природа спектрів ускладнює їх розшифровку за допомогою гармонійних рядів Фур'є. Наприклад, для опису потенціалу атома урану потрібно 2100 коефіцієнтів Фур'є, обчислення яких є непосильним завданням навіть для сучасних швидкодіючих комп'ютерів. Використання сплескових функцій дозволяє відновити потенціал атома з високою точністю та надійністю (рисунок 8.8).

Зіткнення частинок з достатньо високими енергіями супроводжується народженням великої кількості нових коротко- та довго живучих частинок. Знову народжену частинку можна уявляти, як точку у фазовому просторі. Динаміка процесу зіткнення при цьому описується різними конфігураціями таких точок. Ідентифікація об'єктів у фазовому просторі може проводитись із застосуванням вейвлетів, що дозволить відкривати нові явища у сфері ядерних процесів.

Зокрема, сплескові функції дозволили виявити кільцеві структури, які були інтерпретовані як статистичні флуктуації. Вейвлет-аналіз, таким чином, виділяє найінтенсивніші флуктуації, які можуть визначатися статистичними закономірностями і свідчить про народження нової частинки.

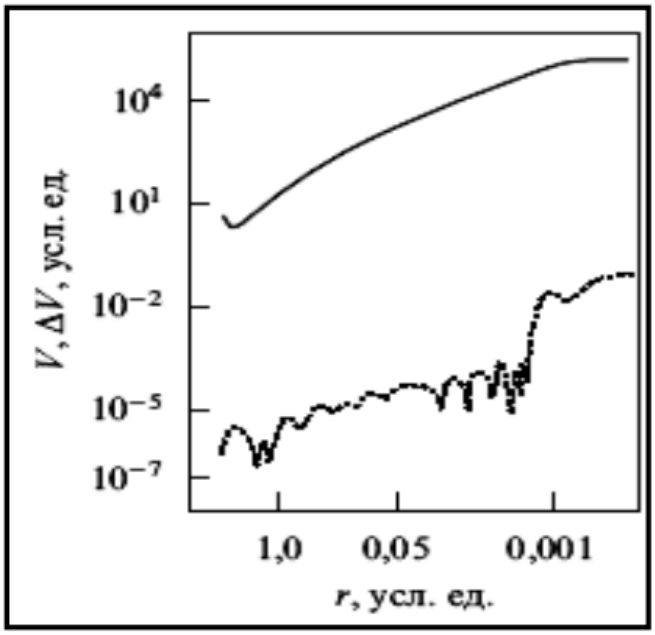


Рисунок 8.8 - Кулонівський потенціал V та точність його обчислення ΔV в залежності від відстані r до атома

Вивчення часових інтервалів між биттями серця за допомогою "маленьких хвиль" призвело до встановлення нового заходу у визначенні ритмічної динаміки серця. Для аналізу складається часова послідовність

інтервалів між серцебиттями, що описується функцією від номера інтервалу, що дає змогу розрізняти здорових та хворих пацієнтів (рисунок 8.9). Однак, у даному випадку, треба зауважити, що наведена методика викликає сумнів у зв'язку із статистичною залежністю вейвлет-коефіцієнтів між собою. Розшифровка вимірювань електричної активності серця (електрокардіограма) та мозку (енцефалограма) виявила ряд особливостей у діяльності цих органів. Аномалії в електрокардіограмі виявляються на більших масштабах, а нормальні структури спостерігаються на малих масштабах. Вейвлетне дослідження енцефалограми надійно виявляє центри епілептичної активності та та дозволяє купірувати її поширення у мозку.

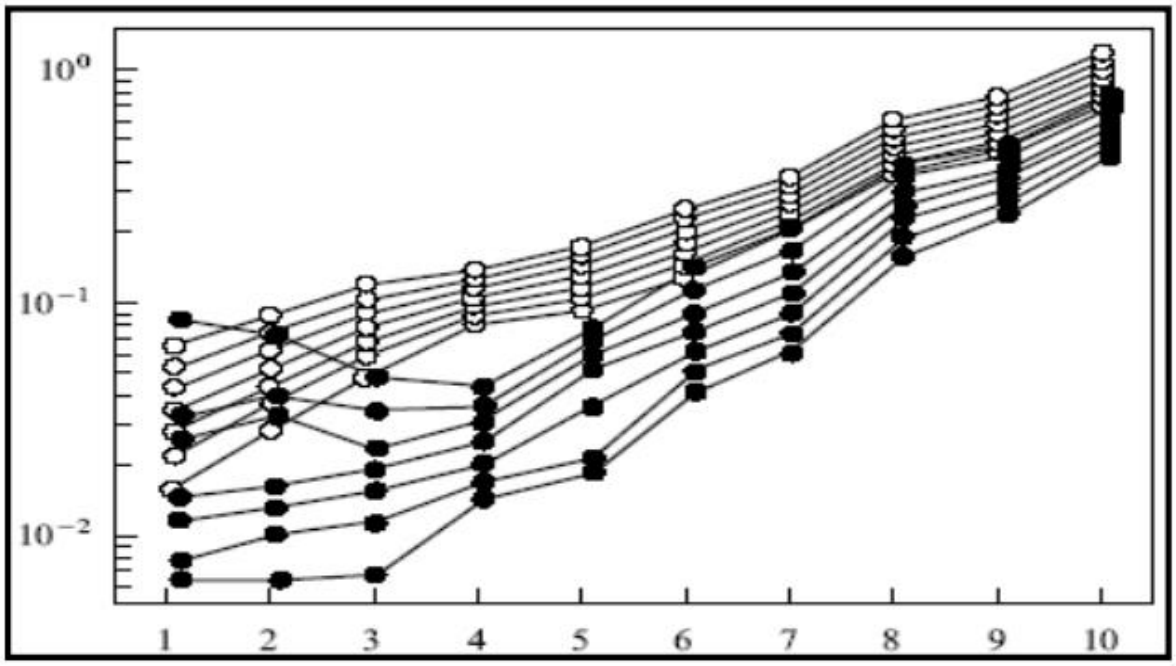


Рисунок 8.9 - Дисперсії вейвлет-коефіцієнтів здорових (○) та хворих (●) пацієнтів

Еритроцити або клітини крові різняться геометричною формою, яка залежить від виду захворювання. У зв'язку з цим фіксація відмінностей в контурі еритроцитів є основним завданням діагностики хвороби. Застосування двовимірних вейвлетів навіть до неякісних фотографій мазків крові призводить до гарного розпізнавання еритроцитів після видалення шумів та випадкових деталей (рисунок 8.10). Сортування клітин крові

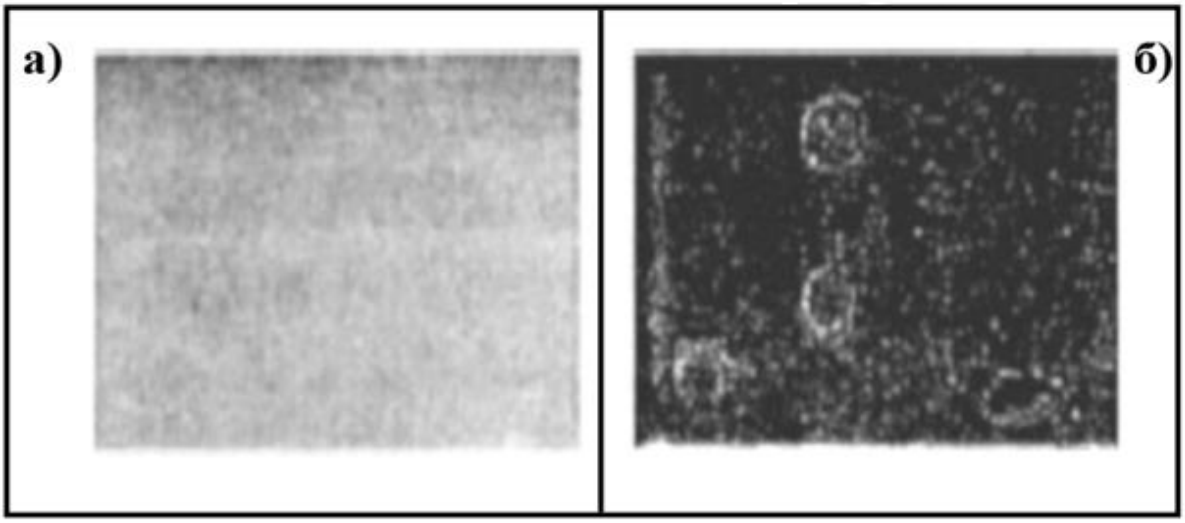


Рисунок 8.10 - Мікроскопічне (а) та після вейвлетної обробки (б) зображення еритроцитів

після експертизи та висновків може бути закладено у програму розпізнавання та класифікації форм еритроцитів, що значно скорочує час аналізу клітин крові.

Зберігання та кодування інформації в комп'ютері з обмеженою пам'яттю та передача даних по лініях зв'язку з обмеженою пропускною здатністю потребує їх стиснення та декодування. Стиснення сигналу та його реконструкція проводяться із застосуванням прямого та зворотного вейвлет-перетворення. Оцифрування інформації використовується надалі для відтворення даних та картин на екрані комп'ютера. Однак зберігання інформації в оцифрованому вигляді вимагає великого обсягу пам'яті. У зв'язку з цим були розроблено різні способи стиснення інформації: архівація даних відбувається без втрати їхнього первісного виду, а при квантуванні інформації відбувається її часткова втрата.

Виходячи з вищевикладеного матеріалу, можна стверджувати, що вейвлетне уявлення виявляє структуру аналізованої інформації, масштаби подій, що відбуваються, дає їх частотну характеристику. Сплескові функції виявляють особливості стаціонарних та змінних сигналів, локалізовані періодичності процесів, позбавляють інформаційний об'єкт від зашумленості та добре реконструюють вихідні дані. Слід зазначити, що вейвлет-перетворення не є заміною гармонійного аналізу Фур'є, воно його доповнює та уточнює. Вейвлети являють собою перспективний інструментарій для чисельного розв'язання звичайних та інших диференціальних рівнянь, що описують нелінійні, нерівноважні та необоротні процеси, у яких присутні нелокальні взаємодії з різними часовими та просторовими масштабами. Простота та краса вейвлет-аналізу є привабливою рисою для дослідників як фундаментальних, і прикладних завдань. Це пов'язано з властивостями вейвлетів: їхня ортогональність

призводить до отримання незалежної інформації на різних масштабах; збереження інформації на різних етапах перетворень забезпечується нормируємість вейвлетів; локальність дозволяє, як визначити будову сигналу, так і “висвітити” наявні особливості; повнота вейвлетного базису дає можливість відновити первісний вид сигналу під час демпфування шумів різної природи. Ці характерні риси вейвлетів дозволяють аналізувати та синтезувати об'єкти, що належать різним рівням організації матерії. Узагальнення вейвлет-перетворення на багатовимірні випадки призводить до можливості аналізу та відображення об'ємних процесів та явищ, до виключно продуктивної ролі вейвлетів при розпізнаванні різної сигналів природи.

9 КАТАСТРОФИ

9.1 Складання та рівновага

Класифікація статичних нестійкостей в загальній теорії Уітні-Тома-Мозера заснована на топологічному підході та використовує поняття структурної стійкості по Андронову та Понтрягіну . Такий підхід дозволяє виділити класи нестійкостей в залежності від кількості управляючих параметрів. Відомо, що структурна стійкість пов'язана із зміною функції стану при малих збуреннях. Як приклади розглянемо поведінку елементарних *функцій* $y = x_2$, $y = x_3$, та $y = x_4$, перша похідна яких обертається в нуль при значенні аргументу $x = 0$ (критична точка). Нехай ці функції зазнали малих збурень: $y = x_2 - \varepsilon x$ (див. рисунок 9.1а), $y = x_3 - \varepsilon x$ (рисунок 9.1б) та $y = x_4 - \varepsilon x_2$ (рисунок 9.1в), *де* $\varepsilon << 1$ малий параметр.

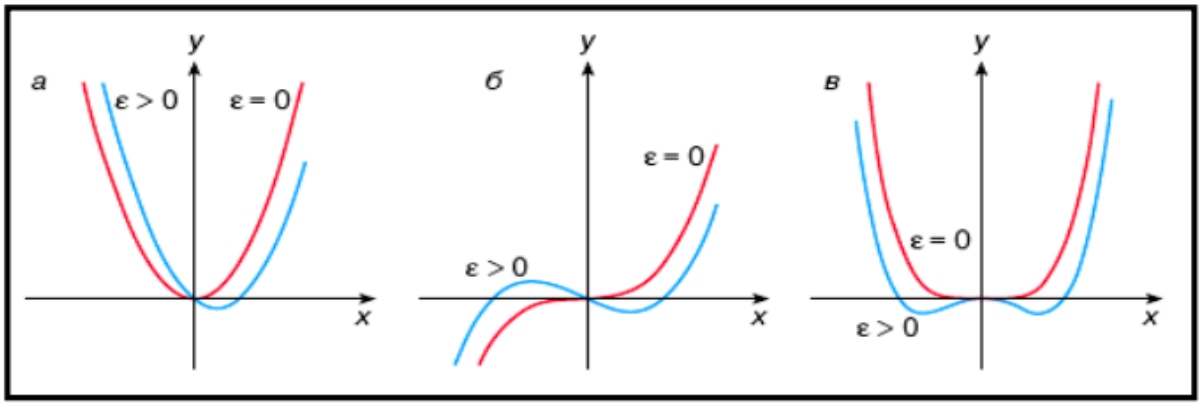


Рисунок 9.1 - Зміна функцій за умов надання малих збурень

Критична точка першої функції залишилася єдиною, а мінімум функції зрушив праворуч і вниз. У другій та третій функціях з'явилися нові критичні точки. У цьому перша функція є структурно стійкою, а друга і третя – структурно нестійкими. Будь-яка математична модель будується з урахуванням нехтування малими внесками. Для систем, що описуються структурно стійкими функціями це цілком виправдано. Однак для систем, які відображаються структурно нестійкими функціями, відкидання малих величин може призводити до втрати інформації про можливі фізичні явища, ефекти та процеси. Розрізняють статичні (елементарна теорія катастроф) та динамічні (теорія катастроф) структурні нестійкості. Статичні структурні нестійкості описуються залежностями $U(q)$ від узагальнених координат, причому рівняння катастрофи має вигляд $\partial U(q) / \partial q = 0$. Динамічні структурні перетворення системи описуються функціями $Z(q)$, що залежать від узагальненої швидкості процесу, катастрофа якого визначається рівнянням $\partial Z(q) / \partial q = 0$. Катастрофою називається

стрибкоподібна зміна поведінки системи при повільній зміні параметрів, що управляють. Зведені результати, отримані за допомогою теорії катастроф, наведені у таблиці 9.1. На практиці найчастіше зустрічаються системи, в яких спостерігаються катастрофи типу складки чи збірки.

Таблиця 9.1 – Залежність потенційних енергій від керуючих параметрів

Вид потенційної енергії	Число керуючих параметрів	Структура катастрофи
$U=q^3+aq$	**1** – параметр a	Складання
$U=\frac{1}{4}q^4+\frac{1}{2}aq^2+bq$	**2** – параметри a і b	Збірка
$U=q^5+aq^3+bq^2+cq$	**3** – параметри a, b і c	Хвіст ластівки
$U=q^5+aq^4+bq^3+cq^2+dq$	**4** – параметри a, b, c і d	Метелик
$U=q_1^3+q_2^3+aq_1q_2-bq_1-cq_2$	**3** – параметри a, b і c	Гіперболічна омбілікa
$U=q_1^3-3q_1q_2^2+a\left(q_1^2+q_2^2\right)-bq_1-cq_2$	**3** – параметри a, b і c	Еліптична омбілікa
$U=q_1^2q_2+q_2^4+aq_1^2+bq_2^2-cq_1-dq_2$	**4** – параметри a, b, c і d	Параболічна омбілікa

На рисунку 9.2 показано сімейство параметризованих кривих, що показують зміну потенційної енергії в залежності від одного параметра, що управляє, при виникненні складки. На рисунку 9.3 показано, що при повільній зміні параметра, що управляє, може відбуватися стрибкоподібний перехід динамічної системи з одного стану в інше (траєкторія abcd)

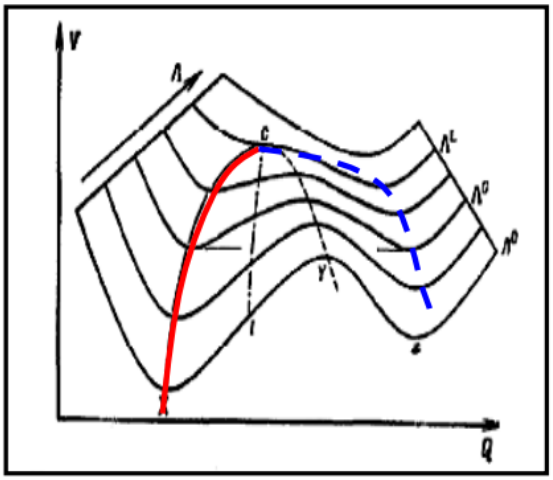


Рисунок 9.2 - Складання

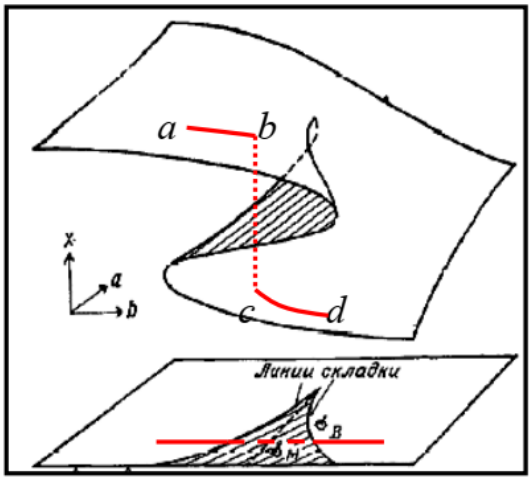


Рисунок 9.3 - Збірка

у разі катастрофи типу складання. Зокрема, явище гістерезиса виникає тоді, коли зворотний стрибок не відбувається при послідовній зворотній зміні тих самих значень керуючих параметрів.

Як приклад катастрофи типу складки розглянемо рівновагу стрижня, сполученого з основою за допомогою пружини. Нехай жорсткий стрижень довжиною l з'єднаний з основою нелінійно-пружною пружиною та знаходиться під дією сили N, яка зберігає свій напрямок при відхиленні стрижня (рисунок 9.4). В початковий час відхилення від вертикалі задається кутом θ_0 при недеформованій пружині. При куті θ сила N створює обертальний момент

$$M_1 = N\,l\sin\theta$$

якому протидіє відновлюючий момент

$$M_2 = k_1(\theta-\theta_0)-k_2(\theta-\theta_0)^2$$

стиснутої нелінійно-пружної пружини. Рівність цих моментів визначає стаціонарний стан стрижня, який описується рівнянням

$$k_1(\theta-\theta_0)-k_2(\theta-\theta_0)^2 - Nl\sin\theta=0 \qquad (9.1)$$

Рівняння (9.1) визначає екстремум потенційної енергії жорсткого стрижня, що має вигляд:

$$U(\theta)=\frac{1}{2}k_1(\theta-\theta_0)^2-\frac{1}{3}k_2(\theta-\theta_0)^3-Nl(1-\cos\theta)\ ,$$

де доданок $-Nl$ фіксує початок відліку потенційної енергії твердого стрижня (рисунок 9.4). При досить малих кутах відхилення $\theta << 1$ (початковий кут досить малий, тобто. $\theta_0 << 1$) можна скористатися еквівалентністю нескінченно малих величин і записати: $\sin\theta \approx \theta$ і $1-\cos\theta \approx \theta_2$. Це дозволяє переписати нормований на коефіцієнт k_2 вираз для потенційної енергії у вигляді

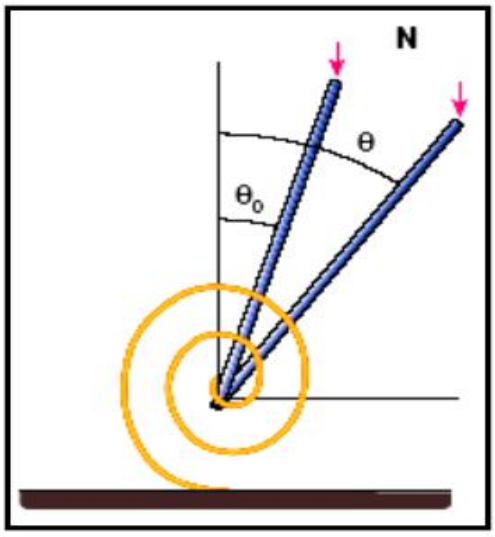


Рисунок 9.4 - Рівновага енергії жорсткого стрижня

$$\frac{U(\theta)}{k_2} = -\frac{1}{3}\theta^3 + a_2\theta^2 + a_1\theta + a_0$$

$$a_2 = \frac{k_1}{2k_2} + \theta_0 - \frac{Nl}{k_2};\ a_1 = -\left(\frac{k_1}{k_2} + \theta_0\right)\theta_0 \quad \text{і} \quad a_0 = \left(\frac{k_1}{2k_2} + \frac{\theta_0}{3}\right)\theta_0^2$$

лінійний зсув $\theta = q + a_2$. Позбавимося квадратичного члена, тоді вираз для наведеної потенційної енергії набуде вигляду

$$\Pi(q) = \frac{U(q + a_2)}{k_2} + \frac{2a_2^3}{3} - a_1 a_2 - a_0 = -\frac{1}{3}q^3 + aq, \tag{9.2}$$

де параметр $a = a_2 + a_1$. Вираз (9.2) визначає функцію, характерну для катастрофи типу складка. Рівняння (9.1) з урахуванням (9.2) набуде вигляду $q_2 - a = 0$. При позитивному значенні параметра керуючого а (а >0) отримане рівняння має два корені $q_{1,2} = \pm a$. Це корені визначають два стаціонарні стани жорсткого стрижня, один з яких буде структурно стійким (мінімум наведеної потенційної енергії), а інший – структурно нестійким (максимум наведеної потенційної енергії). Якщо коефіцієнт а обертається на нуль, то відбувається злиття цих двох станів, а стрижень переходить до лабільного стану. У цьому стані система стійка щодо негативних флуктуацій величини q і нестійка до її позитивних збурень. Перехід стрижня в лабільний стан відповідає біфуркації параметра, який є управляючим. Для негативних значень параметра *а (а<0)* функція (9.2) екстремумів не містить.

9.2 Складання та фазові переходи

Катастрофа виду збирання дозволяє пояснити цілий клас різноманітних явищ із різних галузей фізики, зокрема, виникнення фазових переходів першого та другого типів. Відмінність між цими переходами полягає у наступному (рисунок 9.5):

– фазові переходи першого роду (наприклад, сублімація ,тверде тіло-пар; кристал-рідина; рідина-газ) відбуваються при зміні станів увздовж гілок фазової діаграми 0 або 1; нелокальні (протікають у всіх точках об’єму системи); є критична точка, в якій речовина знаходиться у “флюїдному” стані; виділяється фаза з новими властивостями, відмінними від показників вихідної системи;

– фазові переходи другого роду відбуваються під час руху траєкторією 2; локальні і пов'язані з порушенням (рисунок 9.5) симетрії (відбувається зміна симетрії станів системи); при малих збуреннях траєкторія 2 може не проходити через вершину складання, що викликає зникнення фазового переходу другого роду.

Фазові переходи першого роду супроводжуються стрибкоподібним характером зміни деяких фізичних властивостей та у термодинаміці визначаються , наприклад, термодинамічними рівняннями типу:

$$\left(\partial P/\partial V\right)_{T=T_c}=0 \quad \text{і} \quad \left(\partial^2 P/\partial V^2\right)_{T=T_c}=0$$

P – тиск; *V* – об'єм фази; *T* та *Tc*– температура та її значення у критичній точці. Для фазових переходів другого роду характерна безперервна зміна фізичних властивостей при стрибкоподібній зміни симетрії системи.

З фізичної точки зору катастрофа типу складання може бути визначена наступними ознаками:

- гетерогенність (наявність двох фаз);

-метастабільність (можливі стани переохолодженої пари та перегрітої рідини);

-стрибкоподібність (наявність області стрибко-подібної зміни параметрів-різких змін) і плавність (переведення однієї фази в іншу навколо критичної точки через область значень параметрів системи, що лежить поза межами стрибків) переходу з однієї фази до іншої;

-гістерезис (виникнення "пам'яті" про процес, що відбувався попередньо);

-аномальність поведінки фізичних показників у критичній області (зменшення швидкості поширення звукових хвиль;

-критична опалесценція (виникнення каламутності рідкої фази-гетерофазних станів)).

В околі критичної точки зв'язок між керуючими параметрами (*a* і *b*) та фізичними характеристиками фази тиском *P* та температурою *T* має бути лінійним. Однак параметри а та *b* безрозмірні, а тиск і температура мають розмірність. Ця перешкода може бути усунена запровадженням

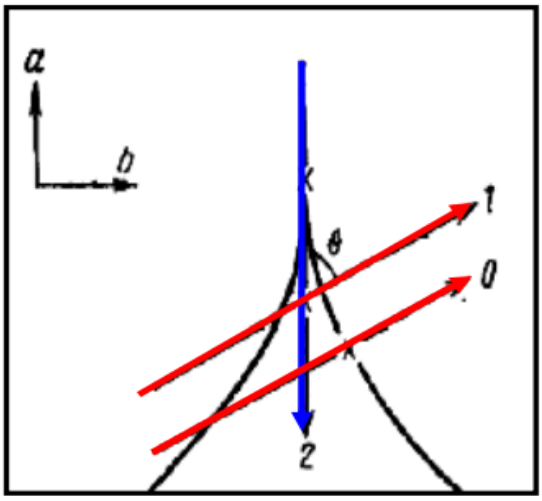


Рисунок 9.5 - Фазова діаграма в термінах траєкторій симетрії

характеристик з урахуванням їх значень у критичній точці *(Pc* та *Tc*): *(P − Pc) / Pc = p − 1 (P / Pc = p) та (T − T c) / Tc = t − 1 (T / T c = t)*. Тоді безрозмірних зв'язок між зазначеними величинами можна задати за допомогою матриці лінійного відгуку

$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ у вигляді $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p-1 \\ t-1 \end{pmatrix}$

Звідси випливає, що керуючі параметри дорівнюють:

$$\begin{cases} a = A(p-1) + B(t-1) \\ b = C(p-1) + D(t-1) \end{cases}$$

Стан системи визначається узагальненою координатою $q = (\rho - \rho c) / \rho c = \varsigma - 1$ ($\rho = N / V$ та ρ *c* – щільність речовини та її значення в критичній точці; N - число частинок в об'ємі системи V; $\rho / \rho_c = \zeta$). Рівняння збірки має вигляд $\partial U / \partial q = 0 = q3 + aq + b$ або з урахуванням введених позначень та лінійності відгуку:

$$(\zeta - 1)^3 + [A(p-1) + B(t-1)](\zeta - 1) + C(p-1) + D(t-1) = 0 \qquad (9.3)$$

Для знаходження констант *A, B, C* і *D* треба залучати фізичні аргументи.

При $t \to \infty$ це рівняння має вироджуватись у рівняння стану ідеального газу. Ідеальний газ описується рівнянням стану Менделєєва-Клапейрона

$$P = \frac{m}{M}\frac{RT}{V}$$

де *m* – маса газу з молекулярною масою *M* , *R* =8,314 Дж·К$^{-1}$ ·моль$^{-1}$ – універсальна газова стала. У безрозмірних змінних це рівняння має вид $Z_c\, p = t$, де $Z_c = p_c / (\zeta_c\, t_c)$ - коефіцієнт стисливості в критичній точці. В границі $t \to \infty$ щільність газу та тиск у системі прямують до нуля ($\zeta \to 0$ та $p \to 0$), отже, для виконання рівняння (9.3) потрібно, щоб різниця коефіцієнтів $D - B = 0$ (інакше в рівнянні (9.3) буде присутній нескінченний доданок). Тоді $-1 + A + B - C - D = 0$ або з урахуванням рівності $D - B = 0$ остаточно знаходимо, що $-1 + A - C = 0$. Якщо згрупувати подібні члени в (9.3) і розділити це рівняння на ζ , то отримаємо

$$\zeta^2 - 3\zeta + 3 - A - B - (p / \varsigma) + A\, p + B\, t = 0 \qquad (9.4)$$

У рівнянні (9.4) при $t \to \infty$ ($\zeta \to 0$ і $p \to 0$) крім доданків *Bt* і невизначеності p/ζ , яка компенсує нескінченний доданок *Bt* ,залишається вираз з констант $3 - A - B$, який має дорівнювати нулю. Отже, рівняння (9.4) набуває вигляду

$$\zeta^2 - 3\zeta - \frac{p}{\zeta} + A\,p + (3 - A)\,t = 0 \qquad (9.5)$$

Рівняння (9.5) можна перетворити на безрозмірне рівняння Ван дер Ваальса , якщо параметр

$$A = \frac{1}{3} : \left(p + 3\zeta^2\right)\left(\frac{1}{\zeta} - \frac{1}{3}\right) = \frac{8}{3}t$$

Якщо повернутись до розмірних величин, то рівняння Ван дер Ваальса набуває вигляду

$$\left(P + \frac{\alpha}{V^2}\right)(V - \beta) = \frac{m}{M} R\,T$$

тут параметри рівняння

$$\alpha = 3P_c V_c^2,\ \beta = V_c/3 \text{ и } mR/M = 8Z_c/3$$

Рівняння Ван дер Ваальса не задовільняє закону відповідних станів, експериментальну основу якого заклав Гуггенгейм, досліджуючи залежність наведеної температури від безрозмірної щільності ζ . Експериментальні дані для різних газів укладаються на деяку універсальну криву (рисунок 9.6). З цих даних випливає, зокрема, що

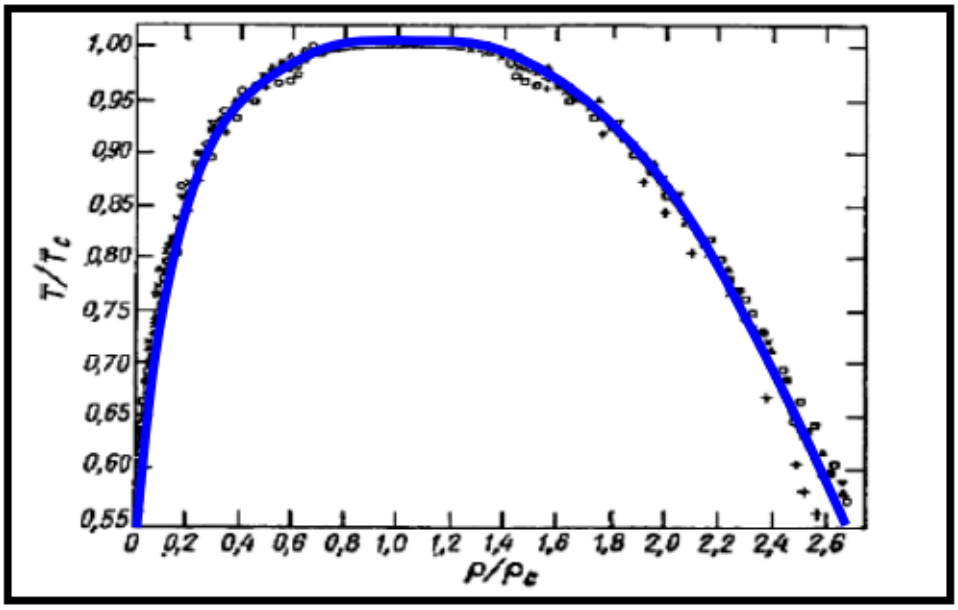


Рисунок 9.6 - Крива Гуггенгейма, що відображає закон відповідних станів

• виконується правило прямолінійного діаметра (правило Кальєте-Матіаса): середня щільність двофазної системи (газ із щільністю ρg і

рідина із щільністю ρ l) лінійно залежить від відстані до критичної точки вздовж кривої фазової рівноваги та описується формулою

$$\frac{\rho_g + \rho_l}{2} = \rho_c \left(1 + \frac{3}{4} \frac{T_c - T}{T_c} \right)$$

• параметр порядку (різниця щільностей рідкої та газової фаз) вздовж Кривої фазової рівноваги має критичний індекс, що дорівнює 1/3 (для рівняння Ван дер Ваальса він дорівнює 1/2), тобто. описується формулою

$$\rho_l - \rho_g = \frac{7}{2} \rho_c \left(\frac{T_c - T}{T_c} \right)^{1/3}$$

Отже, рівняння складання можна використовувати для виведення рівняння стану речовини ну околі критичної точки. Проте обмеженість застосування рівняння Ван дер Ваальса та його модифікацій яскраво проявляється у незадовільній згоді із законом відповідних станів, який насправді демонструє універсальний характер поведінки речовин при фазових переходах.

Складки та складання зустрічаються в багатьох прикладних задачах, пов'язаних і зі структурною нестійкістю: гідростатичною нестійкістю меніска; пробою електроізоляції; проходження світла через середовище; описом поведінки тварини та в інших задачах. Наприклад, розглянемо поведінку тварини, яка одночасно відчуває страх і лють (рисунок 9.7). Лють спонукає його до нападу, а страх – на втечу. І та, і інша

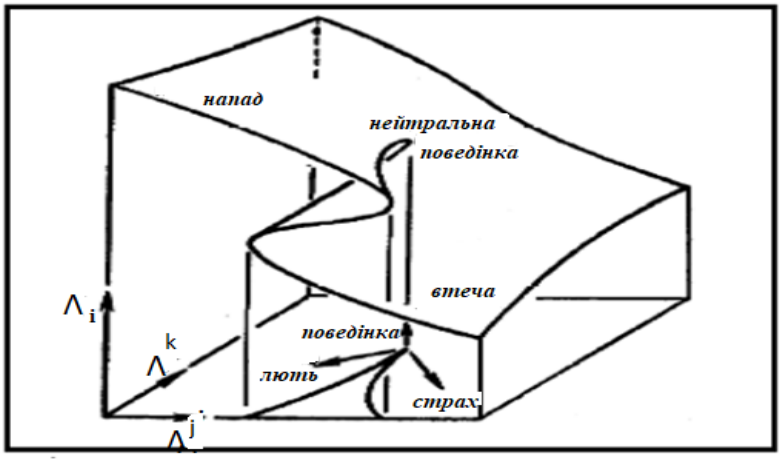


Рисунок 9.7 - Поведінка тварини в залежності від значення біфуркаційного параметра

Форми поведінки сприяють самозбереженню та виживання виду. Якщо ситуація не небезпечна, то реакція тварини індиферентна (нейтральна). Таким чином, наявність біфуркаційного складання призводить до появи яскраво виражених, протилежних емоцій які і визначають поведінку тварини.

9.3 Галопування, флаттер та вихори

Крім структурних нестійкостей, що виникають при статичних збуреннях, системи відчувають ще й динамічні біфуркації: галопування, вихровий резонанс та флаттер. Наприклад, вплив вітру з незмінною швидкістю на мости, зледенілі підвісні дроти та аналогічні об'єкти може спричинити їх стаціонарні коливання. Частота осциляцій залежить від параметра, який визначає повернення системи до початкового положення. Дослідження показують, навіть слабкий вітер може призвести до динамічної нестійкості підвісних конструкцій.

Для математичного аналізу чистого галопування представимо міст у вигляді квадратної призми, яка має масу m, висоту h, довжину l, спирається на пружину з коефіцієнтом пружності k і приєднана до демпфера з коефіцієнтом опору . Нехай під дією вітру, що рухається зі швидкістю v, призма переміщується по вертикалі під прямим кутом напряму вітру. Позначимо через z зсув від положення рівноваги, тоді гальмівна сила демпфера дорівнює λz (z – швидкість руху призми). При куті обдування $\alpha = arctg(z/v)$ вітер створює вертикальну складову підйомної сили $F = \rho v2 S B(\alpha) / 2$, де ρ – щільність повітря, $S = h l$ – площа поверхні обдування, $B(\alpha)$ – коефіцієнт пропорційності, який може бути позитивним при малих кутах α і негативним при більших значеннях. Аеродинамічна сила посилює будь-яке початкове зміщення призми при збігу знаків коефіцієнта $B(\alpha)$ та швидкості руху призми z . Демпфер і пружна пружина прагнуть компенсувати зміни положення призми, що призводить до виникнення аеропружних коливань, що описуються рівнянням $mz+ \lambda z + k z = \rho v^2 S B(\alpha) / 2$. При малих значеннях кута α можна покласти $B(\alpha) \approx B_0 z / v$, тоді ефективний коефіцієнт опору руху дорівнює $\lambda_{еф} = \lambda - (\rho v S B_0/2)$. При позитивному значенні параметра B_0 опір руху зникає при критичній швидкості вітру, яка дорівнює $v c = 2\lambda/(\rho S B0)$ ($\lambda_{еф} = 0$). Малі обурення вихідного стану призми будуть загасати при v < v c і зростатимуть при $v > vc$. Отже, рівновага призми буде нестійкою при критичній швидкості вітру, при цій швидкості починається галопування (неконтрольоване розгойдування) підвісних конструкцій. У випадку галопування описується рівнянням $z+ \omega_0^2 z = f(z)$, де ω_0 – кругова частота вільних коливань. Динамічна нестійкість виникає за зверненні в нуль правої частини рівняння неконтрольованого розгойдування. Розгойдування нелінійно-пружних несучих поверхонь з амплітудою коливань, що наростає, називається статичним флаттером. Він спостерігається при надзвуковому переміщенні літаків та ракет. Незважаючи на те, що статичний флаттер пригнічується структурною нелінійністю мембран, він призводить, врешті-решт, до руйнування крил літаків і стабілізаторів ракет. Динамічний флаттер виникає при досить

швидкому переміщенні рідин у гнучких та пружних трубах. В даному випадку невигнута форма труби є нестійкою. Нестійкість розвивається під дією динамічних коливань, що наростають по амплітуді, викликаних рідиною, що рухається. Галопування складових при обтіканні тіл у стаціонарному потоці рідини може призводити до виникненню вихорів різної структури та вихровому резонансу. Вихори та вихрові кільця (різні вихрові структури показані на рисунку 9.8) являють собою автохвильові системи, які зустрічаються в природі дуже часто: від структур, що

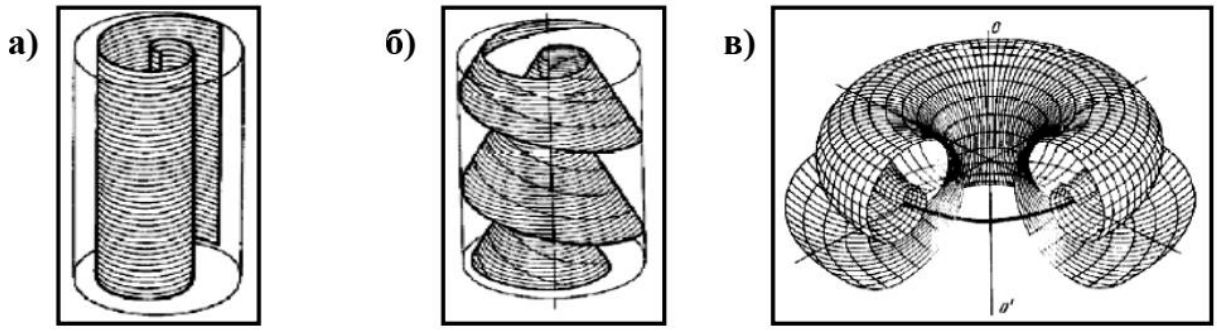


Рисунок 9.8 - Види вихорів: а) простий; б) скручений; в) вихрове кільце

виникають при обертанні рідини, до спіралеподібних галактик (рисунок 9.9). Вони також утворюються при польоті літальних апаратів, птахів та комах (рисунок 9.10). При польоті метелик створює своїми крилами вихрові

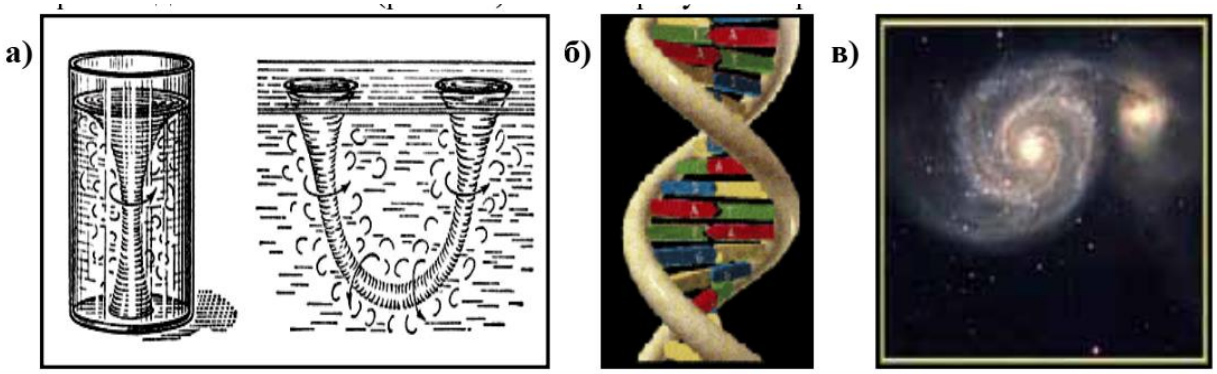


Рисунок 9.9 - Поширеність структур, що виникають при обертанні:
а) вихори у рідині; б) спіраль ДНК; в) спіральна галактика

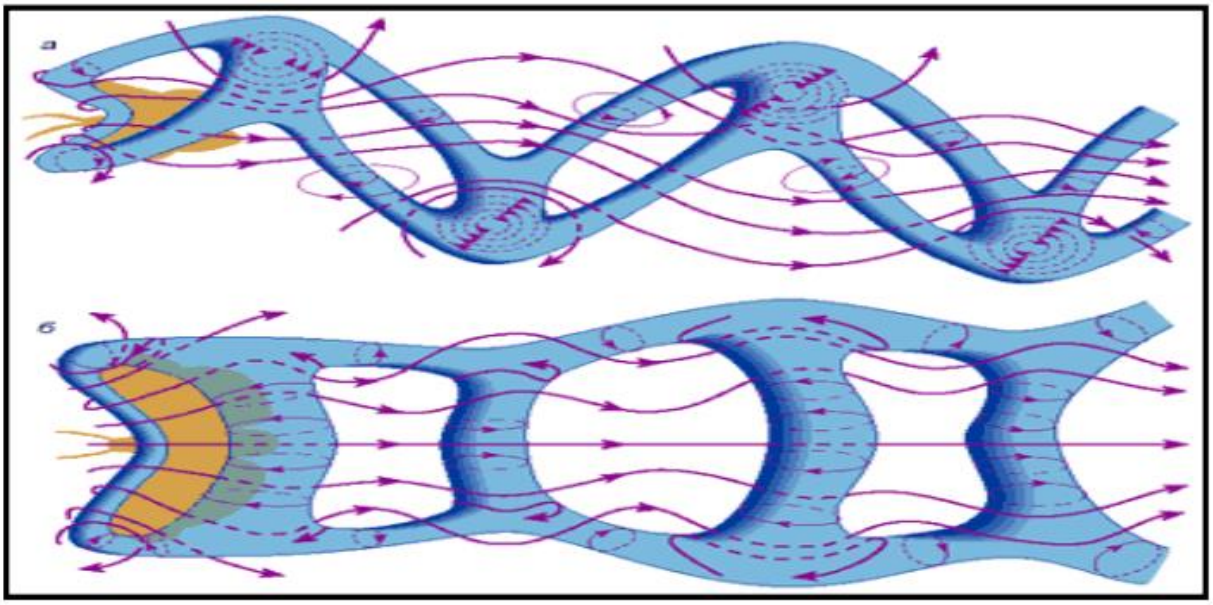


Рисунок 9.10 - Газодинамічна картина польоту метелика

потоки і переміщується у просторі, використовуючи “коридори” найменшого опору. Дослідження показали, що існують топологічні обмеження на існування довільних тривимірних вихрових утворень (наприклад, заборонено існування двох зчеплених вихрових кілець), їхня внутрішня будова значно складніша (рисунок 9.11). Характер сил,

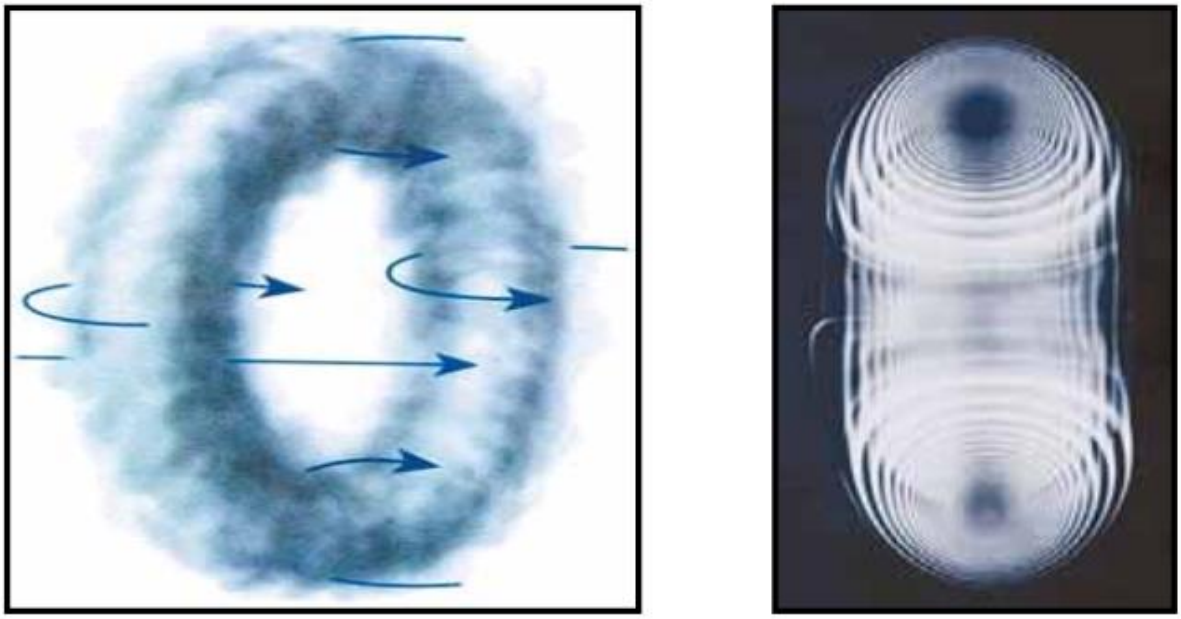


Рисунок 9.11 - Димове кільце та його поперечний розріз

які викликають утворення вихорів, призводить до відсутності виробленої силами роботи. Найпростіша завихрованість у середовищі описується наступними рівняннями:

- закон збереження маси або нестисливості середовища:

$$div\,\vec{v}=\vec{\nabla}\cdot\vec{v}=\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}=0$$

-умова замкненості вихрових ліній:

$$\vec{\omega}=rot\,\vec{v}=\vec{\nabla}\times\vec{v}=\left(\frac{\partial v_z}{\partial y}-\frac{\partial v_y}{\partial z}\right)\vec{i}+\left(\frac{\partial v_z}{\partial x}-\frac{\partial v_x}{\partial z}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial v_y}{\partial x}-\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\vec{k}\neq 0$$

-закон збереження моменту імпульсу вихору:

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt}=rot(\,rot\,\vec{v})=\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{v})$$

Численні розрахунки показують, що вихрові кільця нестійкі і повільно "сплескуються" зі швидкістю зворотно пропорційною до свого радіусу. За певних умов вихрове кільце може почати рости і потім перетворитися на простий вихор. Впливаючи на вихрове кільце періодичною зовнішньою силою з підібраною амплітудою та фазою, можна ввести вихрове кільце у резонансний стан та керувати його рухом. Якщо створити в деякому середовищі з обмеженими розмірами простий вихор так щоб він виходив на поверхню (рисунок 9.9а), то він буде нестаціонарним і за наявності неоднорідностей може перетвориться на скручений вихор. Таким чином, скручені вихори витісняють із неоднорідного середовища прості вихори.

Викладений матеріал показує, що статичні та динамічні нестійкості виникають внаслідок структурної зміни аналітичного виразу правої частини рівняння $z+\alpha\, z+\beta\, z=\Phi(z;\,z)$ при нескінченно малих збуреннях. Така поведінка правої частини наводить на думку про існування також інших видів нестійкості: перетворення функцій одна в другу (мультианалітичне завдання правої частини рівняння за різних значень керуючого параметра); виникнення додаткових змінних; перехід диференціального рівняння з одного класу до іншого, тощо.

9.4. Виникнення та властивості вихорів

Обертальний рух частинок в'язкого середовища називається вихором. Вихори супроводжують усі рухи, що відбуваються з дисипацією енергії. Опір потоку поблизу перешкод викликає появу кругових рухів: навіть при дуже слабкому вітрі обертається пил і дрібне сміття біля бровки тротуару; вихори виникають у трубах при закінченні води через кран зі зношеною прокладкою та супроводжуються звуковими ефектами у вигляді реву та гудіння; в газовій та рідкій середовищі виникають гігантські вихори, які називаються смерчами та вирами; вихори супроводжують польоти комах та літальних апаратів; подвійна спіраль ДНК –є двома переплетеними вихровими нитками, тощо. Причиною виникнення вихорів

є в'язкість середовища (навіть дуже маленька, як, скажімо, у газах). Обтікання середовищем перешкоди супроводжується гальмуванням частинок поблизу його поверхні. Вдалині від поверхні перешкоди частинки прискорюються потоком, в результаті чого в середовищі виникає обертальний момент і утворюється вихор. Усередині вихору тиск менший, ніж на його зовнішній границі , тому він буде стійким утворенням, всмоктуючи в себе газове або рідке середовище. Вихори, що однаково обертаються, при зближенні починають обертатися навколо осі симетрії, а вихори, що протилежно обертаються - рухаються поступально як єдине ціле. Наприклад, вихрові кільця при зближенні поводяться так: переднє кільце уповільнює свій рух та збільшує свій радіус; наздоганяюче кільце стискається та прискорюється при проходженні через переднє кільце; зміна кілець місцями призводить до повторення описаного процесу (автоколивальна система). Зазначимо, що наявність другого вихору викликає зміну швидкості, але не прискорення першого вихору. Ізольовані вихори перебувають у стані спокою. Стабільність та розпад вихору забезпечується гіроскопічними силами. На теперішній час сценаріїв розпаду вихору відкрито близько десятка: бульбашковий (рисунок 10.1а), спіральний (рисунок 10.1б), двоспіральний, конічний, біжучий та ін. Незважаючи на велику кількість експериментальних та теоретичних робіт, універсальної теорії розпаду вихору поки що не створено. Завихренність руху елементарного обсягу середовища описується ротором

$$\vec{\omega}=rot\vec{v}=\vec{\nabla}\times\vec{v}=\left(\frac{\partial v_z}{\partial y}-\frac{\partial v_y}{\partial z}\right)\vec{i}+\left(\frac{\partial v_z}{\partial x}-\frac{\partial v_x}{\partial z}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial v_y}{\partial x}-\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\vec{k}\neq 0$$

Гельмгольц довів теореми про збереження вихрових ліній (рис. 10.2а)

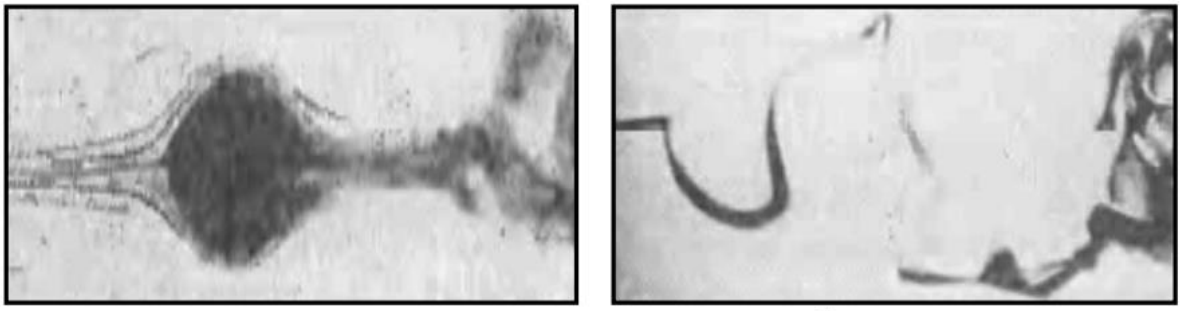


Рисунок 10.1 - Пухирцевий (а) та спіральний (б) розпади вихору

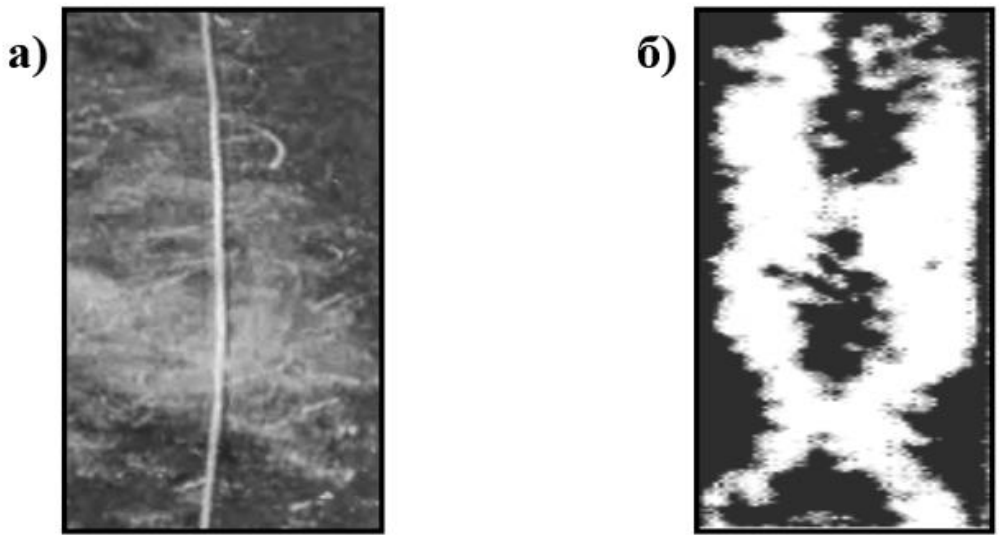


Рисунок 10.2 - Вихрова нитка(а) та вихрова трубка(б)

та інтенсивності вихрових трубок (рисунок 10.2б). Перша теорема відображає факт руху вихрової лінії разом із частинками середовища. Частинки, що знаходяться на вихровій лінії, залишаються на ній і при русі вихору. Інтенсивністю вихрової трубки називається потік завихрення через поперечний переріз трубки, який по другій теоремі Гельмгольця не змінюється з часом. При дії на вихрову лінію розтягуючих сил, вона починає інтенсифікувати свою завихренність. У суцільному середовищі вихрова лінія визначається рівнянням

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = rot(\vec{u} \times \vec{v}) \quad ,$$

де *v* - швидкість руху частинок середовища, *u*– соленоїдальне поле, яке задовольняє рівнянню $div\ u = 0$. Наприклад, такому рівнянню задовольняє магнітне поле (напруженість магнітного поля $H = rot\ A\ (div\ H = 0)$, де *A*-векторний потенціал), а вихрові лінії збігаються з силовими лініями магнітного поля.

10 ІНФОРМАЦІЯ ТА ДИНАМІКА

10.1 Інформація у класичній механіці

Визначення інформації та ентропії пов'язані з ймовірністю того, що індивідуальна складова динамічної системи перебуває у тому чи іншому стані. Розкид станів задається функцією розподілу для безперервних середовищ ,чи таблицею значень ймовірності при дискретному описі мікростанів. Зазначені величини залежать від часу та відображають постійний моніторинг системою свого стану.

Уявимо, наприклад, безперервну динамічну систему у вигляді нескінченної сукупності пов'язаних осциляторів (наприклад, кульки скріплені пружинами). Стан зв'язку обраного елемента в точці x та момент часу t з іншими складовими системи визначає поведінку елемента: напрямок руху та швидкість переміщення (рисунок 10.1, напрямок переміщення показано суцільною стрілкою). Очевидно, що навіть дуже мале зміщення кульки з первісного положення викликає зміни в станах зв'язків, що призведе до зміни величини результуючої дії та її спрямування. За таким ж сценарієм відбувається рух броунівської частки) ,який призводить до хаотичного переміщення обраної кульки. Рух пов'язаний із впливом зовнішньої сили, яка визначається положенням частинок у навколишньому середовищі, буде квазіперіодичним. Якщо частота сили, що збурює, близька до власної частоти осцилятора, то спостерігається внутрішній резонанс (флуктуація). Через стохастичність впливу (збудження можуть посилюватися через внутрішній резонанс в одних точках і гальмуватися в інших місцях системи) поле, що відповідає хвилям флуктуацій, що розповсюджуються, повинно описуватися імовірнісною функцією на відміну від звичайних хвиль, які описуються детермінованими співвідношеннями. Саме поширення флуктуаційної хвилі і відповідає як за виникнення хаосу, так і за появу впорядкованих областей. Таким чином, хаотичний квазіперіодичний рух є переносником інформації ентропії. За абсолютної температури T квант поля дорівнює $k_Б T$. Отже, постійна Больцмана $k_Б$ є динамічним адіабатичним інваріантом.

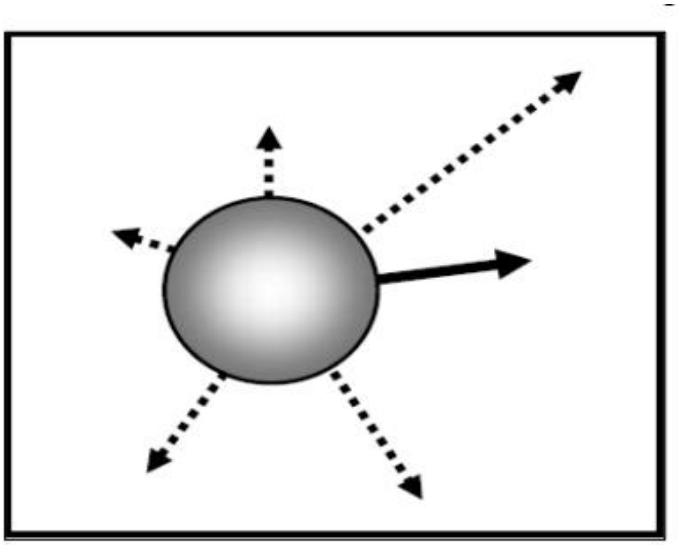


Рисунок 10.1 - Рух пов'язаний із впливом зовнішньої сили, яка визначається станом системи, а сума ентропії та інформації – інтегралом руху

Наведений приклад вказує на те, що інформація-ентропія повинна враховуватися і в класичних рівняннях руху Ньютона, як умова оборотності механічного руху: відсутність флуктуацій, які призводять до перемішування динамічних станів досліджуваного об'єкта.

Введемо до розгляду функцію Лагранжа *L*, як різницю кінетичної та потенційної енергії тіла: $L = K - U$. Тоді дія *D* пов'язана з функцією Лагранжа рівністю:

$$D = \int_{t_1}^{t_2} L(q;\ \dot{q};\ t)\, d\, t$$

Принцип найменшої дії визначається рівністю нулю варіації дії *D=0*. Він, зокрема, дозволяє отримати рівняння Ньютона:

$$\delta\, D = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q;\ \dot{q};\ t)\, d\, t = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial\, L}{\partial\, q} \delta\, q + \frac{\partial\, L}{\partial\, \dot{q}} \delta\, \dot{q} \right] d\, t$$

інтеграл в другому доданку в отриманому виразі обчислимо з використанням методу інтегрування частинами

$$\int_{\alpha}^{\beta} A\, d\, B = AB \Big|_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} B\, d\, A$$

Обравши функції

$$A = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$$

$$d B = \delta \dot{q}\, d t = \delta q\,) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \left|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{d}{d t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} \right] \delta q\, d t = 0 \right.$$

У механіці Лагранжа Эйлера початкова і кінцева точка траєкторії руху є фіксованими, тобто. $\delta q(t_2) = \delta q(t_1) = 0$. Тоді рівняння руху набуває вигляду

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

або у формі Ньютона

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \quad ,$$

де

$$\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial K}{\partial \dot{q}}$$

- імпульс,

$$\vec{F} = -\frac{\partial U}{\partial q}$$

– потенційна сила. Фіксація граничних точок траєкторії руху є єдиною умовою існування рівняння Ньютона.

Іншою умовою оборотності у часі рівняння динаміки є граничне співвідношення:

$$p_2 \delta q(t_2) - p_1 \delta q(t_1) = 0$$

Отже, у такому випадку варіація дії дорівнює

$$\delta D = p_2 \delta q(t_2) - p_1 \delta q(t_1) + \frac{\partial D}{\partial t} \delta t$$

Якщо не проводити варіацію за часом ($t = 0$), то

$$\delta D = \frac{\partial D}{\partial q_2} \delta q_2 + \frac{\partial D}{\partial q_1} \delta q_1 \quad ,$$

де часткові похідні визначаються , як

$$p_2 = \frac{\partial D}{\partial q_2} \qquad p_1 = -\frac{\partial D}{\partial q_1} \quad (q_2 = \delta q(t_2) \;\text{ і }\; q_1 = \delta q(t_1))$$

Варіація дії для стану системи між моментами часу t_1 та t_2 визначається формулою

$$\delta D = \sum_{k=1}^{2} \frac{\partial D}{\partial q_k} \delta q_k + \frac{\partial D}{\partial t} \delta t$$

Так як функція Лагранжа дорівнює

$$L = \frac{\delta D}{\delta t} = \sum_{k=1}^{2} \frac{\partial D}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial D}{\partial t} = \sum_{k=1}^{2} p_k \dot{q}_k + \frac{\partial D}{\partial t}, \text{ то } \sum_{k=1}^{2} p_k \dot{q}_k - L + \frac{\partial D}{\partial t} = 0$$

Вираз

$$\sum_{k=1}^{2} p_k \dot{q}_k - L$$

визначає зміну повної енергії H системи між моментами часу t_1 і t_2 тобто

$$\sum_{k=1}^{2} p_k \dot{q}_k - L = H(t_2) - H(t_1) = \Delta H \quad ,$$

а рівняння руху набуває вигляду

$$\Delta H + \partial D / \partial t = 0 \qquad (10.1)$$

З рівняння (10.1) видно, що збільшення гамільтоніана системи визначає швидкість зміни дії з часом. Якщо дія не залежить явно від часу, повна енергія системи є інтегралом руху, тобто. зберігається *($\Delta H = 0$* або *$H(t_2) = H(t_1)$* , а через довільність моментів часу t_1 і t_2 знаходимо *$H(t) = E = const$*). По структурі рівняння (10.1) нагадує локальний закон збереження дії. Якщо визначити зміну повної енергії системи на вигляд

$$\Delta H = \dot{q} \partial D / \partial q \qquad (10.2)$$

то дія буде інтегралом руху для динамічних систем навіть у разі присутності дисипації енергії.

Для консервативних систем маємо

$$\Delta H = \dot{q} \frac{\partial D}{\partial q} = 0$$

тобто їх положення у фазовому просторі визначається оберненням на нуль часткової похідної

$$\frac{\partial D}{\partial q} = 0$$

Ця рівність визначає консервативну поверхню (поверхня сталості енергії) системи. Звідси випливає, що інформаційне поле консервативних систем влаштоване так, щоб придушувати будь-які флуктуації фізичних параметрів динамічної системи, що виникають. Це означає, що рух таких об'єктів здійснюється або по консервативній поверхні, або в малому околі цієї поверхні, коли зміни функції Гамільтона малі в порівнянні з величиною самого гамільтоніана. Отже, повна енергія та дія є функціями стану динамічної системи. Для дисипативних систем треба враховувати локальне збереження дії, яке завдається рівнянням

$$\frac{\partial D}{\partial t}+\dot{q}\frac{\partial D}{\partial q}=0$$

і задає у фазовому просторі поверхні постійної дії (інваріантні тори у змінних дію-кут). У цьому випадку інформація, що розповсюджується по системі, зводиться до відбору тих флуктуацій, які дозволяють динамічній системі наблизитися до стаціонарного стану, розташованого на резонансному або звичайному торах. При цьому стійкими будуть і ті рухи, які відбуваються в вузькому околі стаціонарного стану. Динамічна система синтезує та запам'ятовує цінну інформацію шляхом створення у фазовому просторі певних поверхонь. Поверхні зберігаються доти, доки немає значних змін суми энтропия-информация. Це призводить до думки про існування ієрархії динамічних систем, що відрізняються збереженою або “забутою” інформацією про поведінку системи за тих чи інших зовнішних умов. Збереження того чи іншого інтегралу руху відповідає незмінності адіабатичного інваріанту.Виключити вплив початкових умов можна, якщо характеризувати стан динамічної системи у сполучених змінних Якобі: якщо

$$\partial D/\partial t=-H \quad ,$$
$$\frac{\partial D}{\partial H}=-t \quad ,$$

то повна варіація дії дорівнює

$$\delta D=\frac{\partial D}{\partial t}\delta t+\frac{\partial D}{\partial H}\delta H$$

Можливість такого запису засновується на факті незалежності руху від початкових умов, які враховуються зміною повної енергії динамічної системи. Крім того, така форма запису дозволяє показати, що стаціонарному стану дисипативної системи відповідає рівність $\partial D/\partial H = 0$ за умови $\delta H / \delta t \neq 0$. Незалежність динаміки від початкових умов полягає в тому, що перебудова системи здійснюється таким чином, що нові

початкові умови, що виникають у кожний момент часу, призводять до звиконання рівняння (10.1), яке є необоротним у часі. Таким чином, знімається питання про оборотність у часі динамічних рівнянь для мікрочастинки і незворотність в поведінці системи в цілому .

Бачимо,що еволюціонуючі системи характеризуються руйнуванням дії та описуються рівняннями

$$\frac{\partial D}{\partial t}+\dot{q}\frac{\partial D}{\partial q}=\Pi_D \quad ,$$

$$\frac{\partial D}{\partial t}+\frac{\partial D}{\partial H}\frac{d H}{d t}=\Pi_D \quad ,$$

де $\boldsymbol{\Pi_D}$ –виробництво дії.

Можемо уявити собі ,що критерієм поділу динамічних систем на фізико-хімічні та біологічні є наявність чи відсутність виробництва дії. Для перших систем $\Pi_D = 0$, а для других – $\Pi_D \neq 0$ (рисунок 10.2).

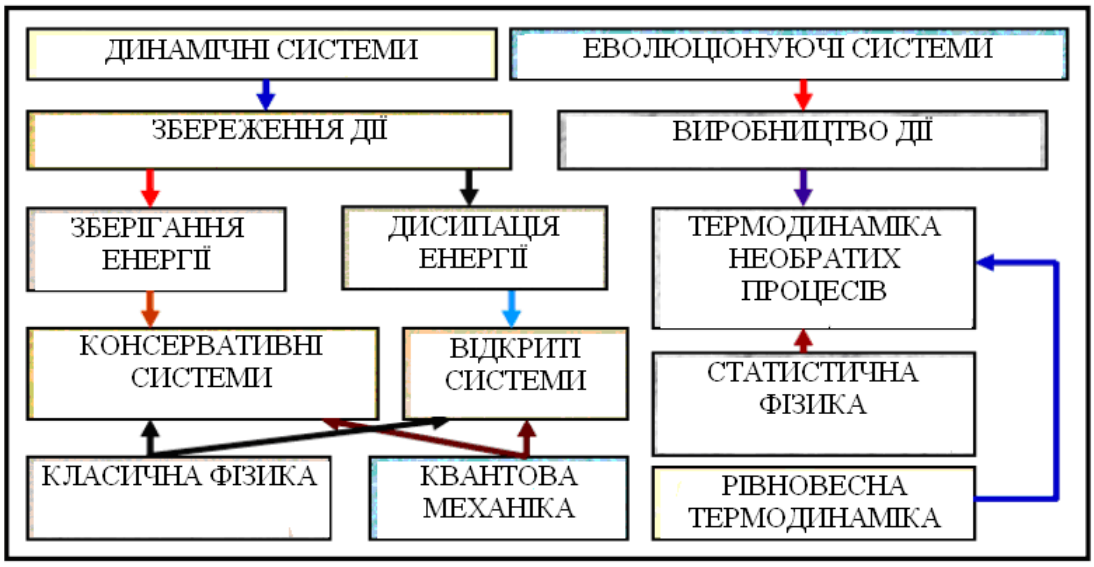


Рисунок 10.2 - Класифікація систем та способів їх опису

Порівняння простих механічних тіл та біологічних об'єктів зі складною системою організації та управління говорить про їх важливі відмінності. Ця відмінність, здавалося б, проявляється у яскраво вираженій свободі дій, вибіру цілей і вчинків, здатності накопичувати, зберігати і передавати інформацію, виробляти собі подібних істот. З погляду ж синергетики біологічні утворення є лише черговим ієрархічним рівнем.

На динамічному рівні самоорганізації матерії відбувається "запам'ятовування" розташування стійких станів; виділяються підсистеми зі специфічними властивостями, що регулюють рівень упорядкованості за рахунок виробництва дії; вибір рішень здійснюється у біфуркаційних точках . Всі ці якості сформувалися внаслідок конкуренції за перебування у стійкому стані або його малій околиці. Очевидним фактом такої

конкуренції є виникнення “пам'яті”, а також центру управління та приняття рішень у результаті біфуркацій невідомих доки що параметрів порядку. Такі системи здатні адаптуватися до зовнішніх умов, що змінюються, оптимізувати свою поведінку та співіснувати з аналогічними об'єктами.

Розвиток цих механізмів призводить до можливості накопичувати, переробляти, засвоювати та передавати накопичені знання, що у свою чергу, підвищує свободу дій та волю до вибору одного рішення з безлічі альтернативних рішень. Вибір здійснюється центром управління на основі детермінованих (знань) чи випадкових (інтуїція – приховані знання всього еволюційного шляху розвитку) даних. Рішення формується під впливом інформації, що надходить від сенсорів (датчиків, які стежать за станом оточення). Спочатку розвивається аналогове мислення: роби так само, як чинив раніше. Невдалі досліди з аналогіями призвели до появи логічного мислення, яке здатне, як керувати, так і передбачати розвиток взаємодії із зовнішнім світом. Всі ці аспекти поведінки біоструктур вказують на те, що в них переважають інформаційні процеси, пов'язані з випадковістю.

10.2 Невизначеність в квантовій динаміці

Як відомо,опис квантових систем здійснюється за допомогою рівняння Шредінгера

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}=H\Psi$$

i= −1 – уявна одиниця, = $h/(2\pi)$, h = 6,63·10^{-34} Дж·сек – постійна Планка, що визначає квант дії, Ψ – хвильова функція, H – оператор Гамільтона). Це рівняння повністю узгоджується з рівнянням (10.1) за умови, що дія $D \rightarrow i\Psi$, а зміна гамільтоніану замінюється виразом $H\Psi$.

Отже, постійна Планка є фактично адіабатичним інваріантом квантової механіки. Зазначимо, що рівняння Шредінгера не зміниться, якщо провести заміну Ψ = Ψ~ $ei\alpha$, де α – постійна фаза. Стани, що відрізняються на постійну фазу α, відповідають повороту модуля хвильової функції в комплексній площині на кут α. Інформаційне поле квантової системи призводить до сприйняття станів, що відрізняються постійною фазою, як тотожні. Отже, тотожні стани квантової системи мають відрізнятися додатковими параметрами. Облік початкових умов за допомогою рівняння (10.1) знімає суперечність між класичною та квантовою механікою, відмінність між ними полягає лише в тому, що класичні величини (повна енергія та імпульс) замінюються на оператори.

Запишемо рівняння Шредінгера для хвильової функції Ψ і їй пов'язаної функції Ψ *:

$$\begin{cases} i\hbar \dfrac{\partial \Psi}{\partial t} = H\,\Psi \\ -i\hbar \dfrac{\partial \Psi^{*}}{\partial t} = H\,\Psi^{*} \end{cases}$$

Домножимо перше рівняння зліва на комплексно сполучену хвильову функцію Ψ*, а друге рівняння – на Ψ, віднімемо з першого перетвореного рівняння друге, тоді отримаємо

$$i\hbar\left(\Psi^{*}\frac{\partial\Psi}{\partial t}+\Psi\frac{\partial\Psi^{*}}{\partial t}\right)=\Psi^{*}H\Psi-\Psi H\Psi^{*}$$

$$i\hbar\,\partial\left|\Psi\right|^{2}/\partial t=\Psi^{*}H\Psi-\Psi H\Psi^{*}$$

$$\left|\Psi\right|^{2}=\Psi\Psi^{*}.$$

- квадрат модуля хвильової функції). Вводячи позначення для ймовірності стану

$$P=\left|\,\Psi\,\right|^{2}$$

та розбіжності потоку ймовірності

$$div\vec{J}=\frac{\Psi^{*}H\Psi-\Psi H\Psi^{*}}{i\hbar}$$

отримаємо рівняння локального збереження ймовірності

$$\frac{\partial P}{\partial t}+div\,\vec{J}=0 \qquad (10.3)$$

Зазначимо, що рівняння (10.3) не залежить від конкретного виду потенційної функції

$$(\Psi^{*}U\Psi-\Psi U\Psi^{*}=U\Psi^{*}\Psi-U\Psi\Psi^{*}=U(\left|\Psi\right|^{2}-\left|\Psi\right|^{2})=0)$$

тому воно визначає збереження ймовірності незалежно від взаємодії частинок. Якщо потік ймовірності дорівнює $J = -K\nabla P$(K – коефіцієнт дифузійної зміни ймовірності), то рівняння (10.3) перетворюється на рівняння Фоккера-Планка. Рівняння (10.3) відображає той факт, що у квантовій системі синтезується інформація про пригнічення флуктуацій хвильової функції, які можуть зруйнувати локальне збереженняймовірності цього стану квантової системи. Виникнення флуктуацій призводить до “розпливання” хвильової функції та порушення умов нормування, тобто до зміни числа частинок у системі. Висновок,

який можна зробити на підставі вищєвикладеного: квантова механіка Шредінгера визначає закриті квантові системи.

Для відкритих квантових систем треба використовувати нелінійне рівняння, які здібні описувати перемішування квантових станів системи та процеси народження-знищення реальних частинок. При такому підході стає зрозумілим умовність класифікації в теорії елементарних частинок: при знаходженні квантової системи на резонансному торі виникає велика кількість резонансів, які можуть інтерпретуватися, як частинки. У зв'язку з цим виникає необхідність чіткого поділу частинок (квантовий солітон, самотній вихор або інше стійке, відокремлене, хвильове утворення зі складною. або простою внутрішньою структурою) та резонансів, що виникають при взаємодії частинок, наприклад, за тривалістю та умовами їх стійкого існування. Інтерпретація частинок, як квантових хвильових структур є фізичної основою принципу корпускулярно-хвильового дуалізму матерії.

Математичний опис відкритих квантових систем може бути проведений на основі аналога рівняння класичної динаміки, записаного в сполучених змінних Якобі:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\frac{\delta H}{\delta t}\frac{\partial \Phi}{\partial H} \quad , \tag{10.4}$$

де функція Ф = Ф*(H; t)* описує еволюцію оператора дії у відкритій квантовій системі з дисипацією оператора Гамільтона. Дисипація цього оператора показує, що вид рівняння Шредінгера змінюється з часом, а, отже, виникатимуть нові квантові стани, що відповідають новим рішенням. При цьому квантова система "забуває" про те, якою вона була в початковий момент часу (що призводить до зростання ентропії через зменшення накопиченої інформації) та здійснює пошук нового стійкого стаціонарного становища у фазовому просторі. Руйнування інтеграла руху (імовірності локального стану) призводить до зміни збереженої та породжує синтез нової інформації: система починає проводити випадкові пошуки стійких станів та нового інтеграла руху. В цьомусенсі динамічна система подібна до демона Максвелла: вона розрізняє нестійкі та стійкі стани (виробляє інформацію). Однак на відміну від демона Максвелла динамічна система в процесі перебору відкидає через перемішування певну кількість нестійких і стійких станів. Стійкість того, чи іншої стану перестає бути критерієм його вибору. Основну роль відіграють умови реалізації такого стану. За одних умов система прагне зайняти положення мінімуму по одному з керуючих параметрів, а потрапивши в мінімум, виявляє його нестійкість за іншою характеристикою. У результаті лише мінімізуюча сукупність параметрів, що управляють, дозволяє системі на певний час зайняти стаціонарний стан. При зміні параметрів, що управляють, починається новий пошук стійкого стану (рисунок 10.3).

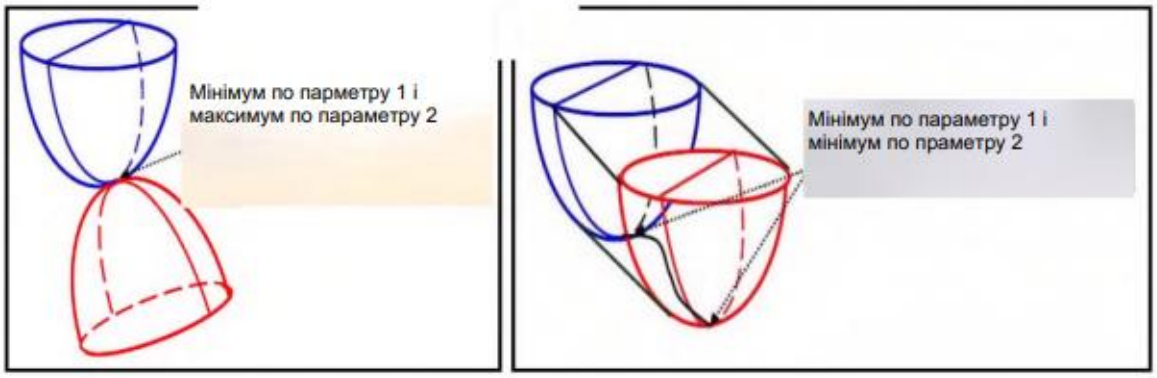


Рисунок 10.3 - Два можливі випадки впливу керуючих параметрів на пошук динамічною системою сталого стану

Інший аспект квантової механіки полягає в тому, що розмір осередків у фазовому просторі (з урахуванням маси частинки) не може бути меншим за постійну Планка, тобто $\Delta p \Delta q \geq$ та $\Delta E \Delta t \geq 0$, які називаються співвідношеннями невизначеностей Гейзенберга. Для масивних тіл розмір осередку може бути мінімальним і динамічна траєкторія макротіл у фазовому просторі згідно з Н-теоремою Больцмана заповнює з часом весь фазовий обїєм системи (ергодичність). Для квантових систем суттєвою є не властивість ергодичності, а перемішування: частина фазового простору недоступна для її заповнення через співвідношення Гейзенберга. Це призводить до утворення "бульбашок" у фазовому обсязі диссипативної системи (перемішуваність). Широкий спектр флуктуацій, що виникають, в диссипативной системі може призвести до появи збурення з енергією менше, ніж / Δt, за проміжок часу Δt . Збереження заборони Гейзенберга призводить до виштовхування фазової траєкторії з області, тобто співвідношення Гейзенберга є інтегралами руху. У фазовому просторі розподіл комірок Гейзенберга обумовлений фізичними характеристиками та динамікою конкретної квантової системи. Тому вид фазового об'єму після деякого моменту часу для кожної динамічної системи специфічний. Проте через стохастичний характер опису стану квантової системи її фазовий об’єм будь-якої миті часу має невизначені границі.

10.3 Квантовий комп'ютер та когерентність станів

Ідея створення квантового комп'ютера була сформульована на початку 80-х років XX століття. Класичний обчислювальний пристрій містить осередки пам'яті, в яких записана послідовність 0 і 1 .Квантова механіка виявила досить багато об'єктів, здатних прибувати лише у двох станах (без урахування їх переплутування): спин частинки, поляризація

світла та ін.Технічна сторона проблеми полягає у створенні пристроїв, що створюють комірки із необхідним квантовим станом. Мірою інформації у кібернетиці є біт, а квантовому комп'ютері – кубит (quantum bit). Наприклад, для поляризації фотона кубит визначається поздовжньою ($\leftrightarrow = 0$) та поперечною (= 1) поляризаціями (ортогональні стани). Однак кількість станів квантового біта не обмежується елементарною парою станів, можливі їх суперпозиції виду $( )_0 + 1/2$ та $( )_0 - 1/2$. В принципі, можна створити будь-яку лінійну комбінацію з уявними коефіцієнтами з чистих та заплутаних основних станів. Оперування з такими даними має використовувати унітарні перетворення. Отже, кватові обчислення мають супроводжуватися такими процесами:

-суперпозиція: унітарні перетворення когерентних станів;

-інтерференція: придушення чи посилення обраних амплітуд рахунок створення відповідної різниці фаз;

-заплутаність: деякі стани не можна представити у вигляді їх добутку;

-невизначеність та некопіюваність: деякі стани не можуть копіюватися без ризику їх знищення.

Управління комп'ютером здійснюється логічним модулем "виключеного - АБО" (англійською XOR, OR) і "керованого - НІ" (NOT). Він використовує два біти інформації, причому перший із бітів управляючий. Якщо перший біт дорівнює 1, він змінює значення другого біта. Операцію "НІ" можна реалізувати за допомогою матриці перестановки

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

при цьому керуючий біт може включати цю матрицю при своєму значенні 1 або пропускати другий біт без зміни (операція "АБО") при своєму значенні 0. При роботі з суперпозиціями квантових станів потрібні інші матриці, тому в квантовому комп'ютері потрібен складніший пристрій для ототожнення заплутаних і чистих сигналів. Логічні схеми обчислень будуються так само, як і в звичайному обчислювальному пристрої. Однак вони повинні включати способи та механізми переходу квантових станів у класичні значення 0 та 1. Наявність суперпозиційних квантових станів дозволяє створити регістри для великої кількості паралельних обчислень. При створенні великої кількості квантових модулів виникає ряд складнощів, пов'язаних з поведінкою границь осередків та меж зчитувальних пристроїв, ефектами тунелювання квантового збудження між осередками, перехід до безперервного спектру станів та їх декогерентності. Створення ортогональних квантових станів можливо тільки при хаотизації фаз, що призводить до хвильових пакетів, які не перетинаються. Цей процес розбиває когерентну хвильову функцію на деякі складові (осередки). Процес вимірювання зафіксує квантову частинку тільки в

одному з цих осередків, але в якій саме визначається ймовірністю $P = \Psi^2$ знаходження частинки в тій чи іншій клітинці. Розташування та розміри осередків визначаються зовнішнім вимірювальним приладом, який викликає хаотизацію фаз. Наявність границі між класичним приладом і квантовим об'єктом породжує хаотизацію фаз. Можна собі цявити,що це певний крок до пізнання мезо-світу Відмінною рисою мезо-світу є те, що в ньому відбуваються явища і процеси, які мають і класичні, і квантові характеристики. Цьому світу притаманні виникнення та пригнічення когерентності хвильових функцій, перехід від квантового (випадкового, стохастичного, хаотичного) до класичного (детерменованого) режиму в поведінці фізичної системи. Якщо розглядати класичну частину з боку кватових станів через вікно мезоміра, то можна побачити "вимерлих динозаврів": хвильова функція макрочастинки колапсувала, вона "забула" про свою хвильову природу і перетворилася на "скам'янілість" з фіксованою координатою та імпульсом. Проте така особливість поведінки існує до певного часу, доки макрочастинки не об'єднуються у великі “колективи”. І вже на цьому рівні відбувається “відновлення пам'яті”: вони можуть за певних умов утворювати хвилі та частинки нового рівня (солітони, одиночні вихори тощо), тобто і новому рівні проявляється корпускулярно-хвильовий дуалізм Природи, але вже як колективної поведінки великої кількості часинток.

Колапс хвильової функції, відповідає за появу класичної частинки, і пов'язаний із руйнуванням інтеграла руху, який забезпечував локальне збереження ймовірності квантового стану у вибраній просторово-часовій точці. Він може бути описаний рівнянням Шредінгера, оскільки відбувається знищення когерентних осередків відразу в усіх інших точках. Зазначимо, що колапс хвильової функції жодною мірою не змінює фізичні властивості класичної частинки: вона просто переходить у макросвіт, втрачаючи когерентність своєї хвильової функції. Отже, колапс хвильової функції є незворотнім та одномоментним процесом. Колапс відбувається у момент відриву частки від мезоміру. Якби цей процес продовжувався в макросвіті, то відбувалося б подальше дроблення хвильової функції на когерентні пакети і можна було б обчислити ймовірність виявлення частинки в одному з них, фіксуючи швидкість переміщення частинки. Останнє ,суперечить співвідношенням невизначеностей Гейзенберга, отже, воно невірно.Тому опис колапсу хвильової функції вимагає створення нової моделі, яка дозволить досліджувати поведінку напівкласичних, напівквантових об'єктів мезоміру. Розуміння цього процесу вимагає не простої заміни фізичних характеристик на оператори, або зворотного переходу (операторів на фізичні параметри), а з'ясування фізичної сутності таких замін.Взаємно доповнення класичних та квантових явищ, процесів та ефектів дозволить правильно зрозуміти конструкцію навколишнього Світу.

11 ЕНТРОПІЯ – МІРА ХАОСУ

11.1 Сили та узагальнене рівняння енергії

Сили, що діють динамічні системи, можна розділити на потенційні, що обурюють і перешкоджають (сили опору) руху. Потенційні сили прагнуть утримати систему поблизу положення рівноваги та є похідними від потенційної функції ($F_{пот} = -\partial U / \partial q$, q – узагальнена координата). Обурювальні сили явно залежать від часу (наприклад, зовнішня сила, яка діє на осцилятор $F_{возм} = f_0 \sin(\Omega t)$), вони можуть або пригнічувати, або підсилювати певні моди руху. Сили опору перешкоджають переміщенню у вибраному напрямку та є причиною диссипації повної енергії системи. Перешкоджуючі сили мають різну фізичну природу. Серед них виділяють:

- опір сухого (кулонового) тертя,який не залежить від швидкості зміни положення системи;

– в'язкий (лінійний) опір, пропорційний першому ступеню швидкості руху;

– вихровий (квадратичний або турбулентний) опір, що підкоряється закону Шезі.

Облік лише в'язкого тертя призводить до опису лінійних динамічних систем з диссипацією енергії, інші види опору призводять до нелінійних диференційних рівнянь еволюції дисипативної системи .Сили опору можна представити у вигляді похідної від функції розсіювання, або дисипативної функції Релея Ф (q) (q – узагальнена швидкість):

$$F_{conp} = -\partial \Phi / \partial \dot{q}$$

З курсу аналітичної механіки відомо, що кінетична енергія системи може бути записана у вигляді

$$K = \frac{1}{2} \sum_{i,\, j=1}^{N} A_{ij}\, \dot{q}_i \dot{q}_j \quad ,$$

причому параметри $A_{i\ j}(q_k)$ залежить від узагальнених координат і задовольняють умовам взаємності $A_{ij}(q_k)) = A_{ji}(q_k\ )(\ k\ =1,\ 2,\ldots)$. Якщо коефіцієнти $A_{ij}(q_k))$не залежать від узагальнених координат, то вони називаються коефіцієнтами інерції (зокрема маса тіла – це міра його інертності. В аналогічному вигляді записується і функція Релея, але з іншими коефіцієнтами

$$\Phi = \frac{1}{2} \sum_{i,\, j=1}^{N} B_{ij}\, \dot{q}_i \dot{q}_j$$

Незбурений рух матеріальної системи за фіксованих початкових умов описується рівнянням Лагранжа-Ейлера:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial K}{\partial q_i} = F_i$$

з початковими умовами *qk(0) = qk0* та *qk(0) = qk0*. Зміна початкових умов призводить до нового рішення рівняння Лагранжа-Ейлера, тому що рух системи збурюється по відношенню до обраного за основу. Незбурений рух залишається стійким, як завгодно довго, якщо збурення призводить до рухів у малому околі стану, що визначається основним рухом (зокрема, стану рівноваги). Перепишемо рівняння еволюції у вигляді

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial K}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} + \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_i} = F_{i\,возм}$$

Помножимо це рівняння на відповідну узагальнену швидкість q_i і підсумуємо по $i = 1 \div N$, отримаємо

$$\sum_{i=1}^{N} \dot{q}_i \frac{d}{dt}\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_i} - \sum_{i=1}^{N} \dot{q}_i \frac{\partial K}{\partial q_i} + \sum_{i=1}^{N} \dot{q}_i \frac{\partial U}{\partial q_i} + \sum_{i=1}^{N} \dot{q}_i \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{i=1}^{N} F_{i\,возм}\, \dot{q}_i$$

Перший доданок у лівій частині рівняння перетворимо наступним чином:

$$\sum_{i=1}^{N} \dot{q}_i \frac{d}{dt}\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{i=1}^{N} \frac{d}{dt}\left(\dot{q}_i \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i = \frac{d}{dt}(2K) - \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i$$

Тут була врахована теорема Ейлера про однорідні функції (кінетична енергія є квадратичною формою від узагальненої швидкості, тобто є однорідною функцією, отже

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i = 2K$$

Оскільки кінетична енергія не залежить явно від часу (∂ K / ∂ t = 0), то її повна похідна за часом дорівнює

$$\frac{dK}{dt} = \frac{\partial K}{\partial t} + \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial K}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i\right) = \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial K}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i\right)$$

Отже, різниця

$$\sum_{i=1}^{N} \dot{q}_i \frac{d}{dt}\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_i} - \sum_{i=1}^{N} \dot{q}_i \frac{\partial K}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}(2K) - \frac{dK}{dt} = \frac{dK}{dt}$$

Потенційна енергія не залежить явно ні від часу, ні від швидкостей руху, тому

$$\frac{dU}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \dot{q}_i \frac{\partial U}{\partial q_i}$$

Функція Релея так само, як і кінетична енергія, є однорідною функцією, тому

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i = 2\Phi$$

Величина

$$W = \sum_{i=1}^{N} F_{i\,возм}\, \dot{q}_i$$

визначає потужність збурюючих сил.

Ввівши позначення повної енергії (гамільтоніан) $H = K + U$, запишемо рівняння Лагранжа-Ейлера у вигляді узагальненого рівняння для енергії $d\ H\ /\ d\ t\ =\ W\ -\ 2\Phi$. З отриманої рівності видно, що за умови компенсації збурюючими силами диссипації повна енергія системи зберігається $d\ H/dt\ =0$ (консервативна система), інакше рух системи призводить до розсіювання енергії (дисипативна система).

11.2 Адіабатичні інваріанти динамічних систем

Рухи у фазовому просторі консервативних та дисипативних систем значно різняться. Введення гамільтоніана дозволяє визначити узагальнені швидкості $q\ =\ \partial H\ /\partial\ p$ (p – узагальнена імпульс) і сили $p\ =-\ \partial H/\partial q$.За допомогою похідних від повної енергії Ліувілль показав, що фазовий обїєм динамічної системи з часом зберігається (ергодичність). Ввівши узагальнений вектор струму у фазовому просторі J (q; p), можна стверджувати, що фазова “рідина” нестискаєма, оскільки

$$div\ \vec{J} = \frac{\partial J_q}{\partial q} + \frac{\partial J_p}{\partial p} = \frac{\partial \dot{q}}{\partial q} + \frac{\partial \dot{p}}{\partial p} = \frac{\partial^2 H}{\partial q\, \partial p} - \frac{\partial^2 H}{\partial p\, \partial q} = 0 \quad ,$$

що є наслідком безперервності функції Гамільтона. Нестисливість фазової "рідкості" і забезпечує збереження фазового обсягу при еволюції. З теореми Ліувіля випливає твердження Пуанкаре (цикл Пуанкаре): якщо консервативна система здійснює рух із обмеженої області фазового простору, то її траєкторії руху є такими, що система повертається після закінчення деякого часу у вихідну область, за винятком можливо точок початку руху (оборотність рівнянь динаміки). Тривалість циклу Пуанкаре тим більша, чим сильніша нестійкість динамічної системи (рисунок 11.1).

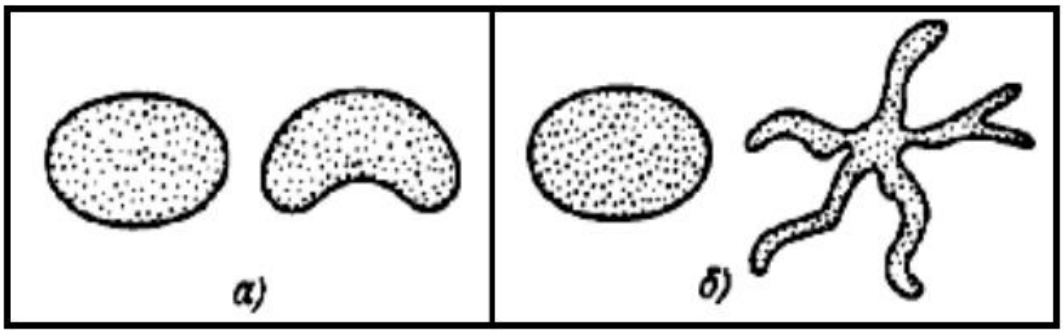


Рисунок 11.1 - Зміна фазового обсягу динамічної системи при стійкому (а) та дисипативному (б) рухах

Якщо динамічна система містить достатньо велике число частинок, можна ввести функцію розподілу *f (q; p; t)* частинок у фазовому просторі за місцезнаходженням і швидкостями в залежності від моменту часу. З теорії ймовірностей відомо, що *f(q; p; t) d* Γ =1, де величина *d* Γ = *dqdp* визначає обїєм фазового простору, зайнятий системою Диференціальний закон збереження числа частинок з часом визначається рівнянням

$$\frac{\partial f}{\partial t} + div(f\vec{J}) = 0 \quad ,$$

або з врахуванням нестискаємості фазової "рідкості" рівнянням Ліувіля:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \dot{q}\frac{\partial f}{\partial q} + \dot{p}\frac{\partial f}{\partial p} = 0$$

Якщо цьому рівнянні виконати інверсію часу (заміна t на $-t$), то рівняння не зміниться, тобто рівняння Ліувіля оборотним у часі.

При русі динамічної системи залишаються незмінними певні величини, наприклад, інтеграл, що визначає дію

$$I = -\frac{\oint p\, dq}{2\pi}$$

Динамічні рівняння можна записати в термінах змінних дія *(I*)-кут (*ϑ*), які задають у фазовому просторі інваріантний тор:

$$\begin{cases} \dot{I} = 0 \\ \dot{\vartheta} = \dfrac{\partial H}{\partial I} = \omega(I) \end{cases}$$

де *ω (I)* - кругова частота нелінійних коливань.

З наведеної вищє системи рівнянь видно, що для консервативних систем зберігаються дія *I* та кут *ϑ* (повна енергія системи). При повільних збуреннях, що вносяться до динамічної системи, дія наближено зберігається (адіабатичний інваріант). Якщо дія змінюється істотно, то можуть виникнути нові гармоніки збурень, які переводять систему в новий

стійкий стан, і так аж до хаотичних рухів. Таким чином, хаотичний стан системи характеризується системою рівнянь

$$\begin{cases} \dot{I} = \dfrac{\partial H}{\partial \vartheta} \\ \dot{\vartheta} = \dfrac{\partial H}{\partial I} \end{cases}$$

Якщо рух динамічної системи характеризується *N* адіабатичними інваріантами *Ik (k = 1 ÷ N*), то вона має N інтегралів, що зберігаються руху. Якщо число інтегралів руху менше числа *N* на величину *n*, то відбувається "руйнування" *n* адіабатичних інваріантів (наприклад, повна енергія системи не зберігається в нелінійних динамічних системах та при утворенні впорядкованих структур при необоротних процесах). Таким чином, руйнування інтегралів руху має призводити до руйнування інваріантних торів фазового простору. Серед інваріантних торів виділяють резонансні та звичайні. На інваріантних торах фазові траєкторії замкнуті; частоти руху на резонансному торі співрозмірні(в звичайному такого немає). Інваріантні тори народжуються в результаті виродження граничного циклу: фазові траєкторії починають накручуватися на граничний цикл (рисунок 11.2). Фазові траєкторії на торі описують квазіперіодичні коливання. Особливістю інваріантних торів є їхня залежність від кількості інтегралів руху. За *N = 2* тори вкладені один в інший і ділять фазовий простір між собою. Зруйновані тори виявляються затиснутими між стійкими торами (рисунок 11.3), тому деформації фазової траєкторії в такій області обмежені

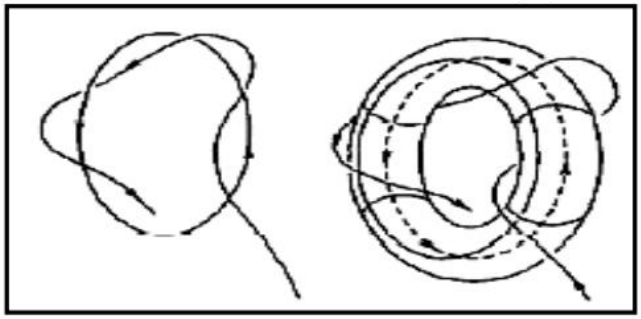


Рисунок 11.2 -"Народження" інваріантного тора

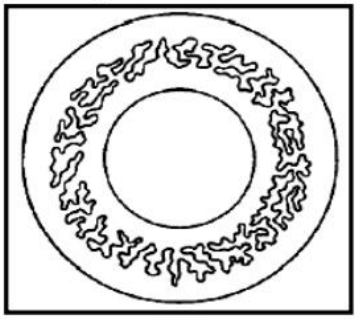


Рисунок 11.3 - Тори між стійкими торами

(слабкий хаос). При кількості інтегралів руху *N >2* тори перетинаються і зруйновані тори утворюють складну гратку каналів, якими фазова траєкторія починає переміщуватися по всьому фазовому простору (сильний хаос) і може віддалитися скільки завгодно далеко від вихідного стану (дифузія Арнольда). Причина такого поділу полягає в тому, що у просторі з *2N* вимірами поверхня постійної енергії має розмірність *2N −1,* та її межа – *2N − 2* . Якщо тори ділять фазове простір, їх розмірність повинна задовольняти нерівності $N \geq 2N-2$, звідси знаходимо, що $N \leq 2$.

Отже, при кінцевому значенні числа N завжди існують кінцеві за розміром (нехай навіть не дуже великі) області фазового простору, в яких рух динамічної системи буде детемінованим, а рівняння руху оборотними в часі.

Наведені міркування застосовуються для опису систем з кінцевим числом динамічних змінних. Однак поля мають нескінченну кількість інтегралів руху, тому руйнування кінцевої кількості інтегралів руху може привести тільки до будь-яких змін усередині поля (наприклад, виникнення солітонів), але не до якісної перебудови польової системи. Як буде показано нижче для переходу в новий стан така система повинна мати нові статистичні властивості.Руйнування адіабатичних інваріантів руху відбувається поблизу сепаратрису і призводить до перемішування станів динамічної системи. Якщо усереднені за часом параметри динамічної системи рівні аналогічним характеристикам, отриманим шляхом усереднення ансамблів тотожних динамічних підсистем, то рух системи називається ергодичним. При ергодичного руху фазові траєкторії рівномірно покривають фазовий простір. При перемішуванні за час T фазові траєкторії покривають весь фазовий простір певною граткою . Після закінчення часу $2T$ картина повторюється, але розмір комірків гратки стає вдвічі меншим. Таку властивість мають динамічні системи, у яких фазові траєкторії з часом віддаляються одна від одної через нестійкість системи.Якщо фазовий простір звичайний, то траєкторії не можуть віддалятися одна від одної на відстані за межами деякого характерного розміру простору і починають утворювати "заплутаний клубок" (локальна нестійкість). Це означає, що існує напрямок у просторі, для якого залежність від часу відстані D(t) між двома точками описується формулою $D(t) = D(0)exp(h_0 t)$,де h_0 – коефіцієнт загасання. Середнє значення цього параметра обернено пропорційно часу розчеплення часових кореляцій у розподілі фазових траєкторій по фазовому простору. Наявність локальної нестійкості призводить до перемішування і, зокрема, ергодичності системи.

11.3 Ентропія та перемішуваність

Статистична фізика досліджує властивості систем, що складаються з великої кількості частинок. Під частинками розуміють об'єкти різної природи: атоми та молекули у газі, зірки у галактиці, автомобілі на міських вулицях, людей у соціальній групі тощо. Однорідні сукупності елементів системи поєднуються під назвою ансамбль. Основне завдання статистичної фізики полягає в з'ясуванні якостей ансамблю, з поведінки складових елементів системи. В силу взаємодії компонентів системи між собою властивості ансамблю будуть якісно відрізнятиметься від характеристик

індивідуальностей. Зокрема, оборотність механічного руху атомів може виявитися порушеною для всього ансамблю в цілому (руйнування адіабатичного інваріанту, що забезпечує оборотність руху в часі). Закони руху частинок завжди вважаються заданими і є предметом обговорення у статистичній науці. Надалі під ансамблем частинок розуміється сукупність частинок, рух яких описується за допомогою побудов механіки Гамільтона, чи механіки Лагранжа-Эйлера.

Раніше було показано, що об'єднання великої кількості пов'язаних між собою динамічних систем показує нову властивість безперервності (суцільності), внаслідок чого виникло поняття поля, що визначає середовище поширення хвильового процесу. Різні поля описуються різними безперервними (кусково-безперервними) функціями, які є рішеннями різних, чи подібних за структурою диференціальних рівнянь.

Для характеристики хаотичності ансамблю динамічних систем вводиться поняття ентропії $S(f)$. Визначаючи її через функцію розподілу $f(q; p; t)$ маємо:

$$S(f) = -\int f \ln f \, d\Gamma$$

З цього визначення ентропії випливає, що вона зберігається з часом.
З рівняння Ліувіля

$$\frac{df}{dt} = 0 \quad ,$$

яке визначає незмінність фазового обсягу, зайнятого ансамблем частинок у фазовому просторі маємо:

$$\frac{dS(f)}{dt} = -\int (1+\ln f)\frac{df}{dt} d\Gamma = 0$$

Встановити точний вид функції розподілу для ансамблю не представляється

можливим зважаючи на властивості перемішуваності через взаємодію частинок, тому доводиться вводити обмеження на її вид, наприклад, у вигляді огрублення.

Однак в процесі огрубленні визначення функції розподілу $f(q; p; t)$, наприклад, у вигляді

$$F = \frac{1}{\delta\Gamma}\int f \, d\Gamma$$

$\delta\Gamma$ – область огрублення, ситуація змінюється. Функція розподілу F тепер може залежати від часу, і тоді ентропія

$$\widetilde{S}(F) = -\int F \ln F \, d\Gamma$$

також буде функцією часу. Інше визначення ентропії також належить Больцману: $S\sim=k_Б lnW$, де $k_Б = 1{,}38\cdot10^{-25}$ Дж / К – постійна Больцмана, W – ймовірність того, що система перебуває у тому чи іншому стані.

Поблизу стану рівноваги всі стани системи практично рівноймовірні, тоді ймовірність $W \cong \Delta\Gamma/\Gamma_0$ (області фазового простору $\Delta\Gamma$, а Γ_0 можна прийняти рівним 1). Відповідно до теореми Ліувіля, зміна фазового обїєму, який займає динамічна система, не залежить від часу, тобто. $\Delta\Gamma(t)=\Delta\Gamma(0)$. Незважаючи на це відбувається зміна форми і структури будь-якої фазової краплі. Із плином часу: вона наповнюється "міхурами порожнечі"; кількість “бульбашок” зростає із часом; оперіметр краплинного об’єму збільшується (рисунок 11.4). Огрублений об'єм краплі $\Delta\Gamma\sim(t)$ залежить від часу згідно з формулою $\Delta\Gamma\sim(t) = \Delta\Gamma(0)exp(h_c t)$, де h_c – усереднене за фазовим об'ємом краплі значення коефіцієнта згасання. Тоді безрозмірна ентропія ($\sigma = S/k_Б$) визначається формулою

$$\sigma = \ln \Delta\widetilde{\Gamma}(t) = h_c t + \ln \Delta\Gamma(0)$$

При точності огрублення ε величину початкового об'єму можна покласти рівною $\Delta\Gamma \cong \varepsilon(0)$ і надалі спрямувати точність огрублення ε до нуля. Ентропія по Колмогорову визначається формулою

$$\sigma = \lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{t\to\infty}\left(\frac{\ln \Delta\widetilde{\Gamma}(t)}{t}\right) = h_c$$

Ентропія Колмогорова визначає швидкість зміни ентропії Больцмана під час перемішування фазових траєкторій; зворотньо пропорційна часу розчеплення часових кореляцій,

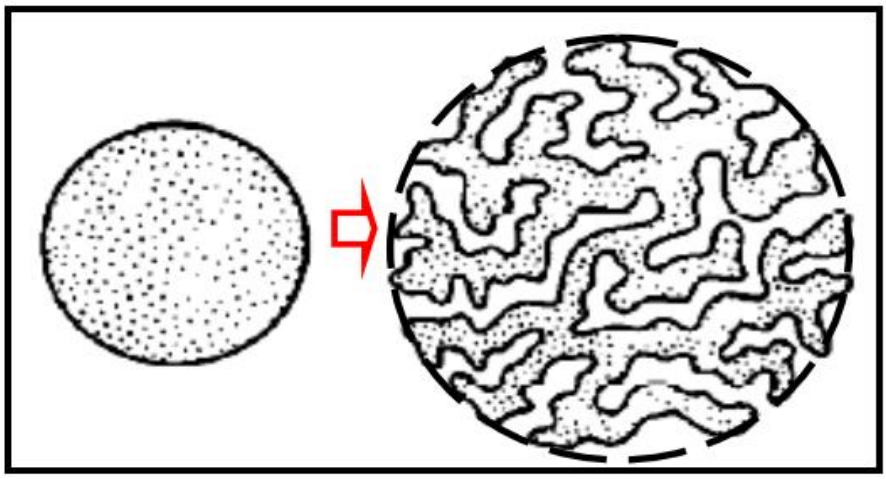


Рисунок 11.4 - Зміна структури фазової краплі

вона не залежить від способу розбиття фазового простору та виконаного огрублення (метричний інваріант); системи з однаковими значеннями h с ізоморфні (подібні) один до одної. Введення ентропії Колмогорова дозволяє визначити час, протягом якого зростає ентропія Больцмана: якщо

фазова крапля $\Delta\Gamma(0) = \varepsilon_0$ розтікається до обсягу $\Delta\Gamma\sim(t) =1$, то час зростання ентропії Больцмана дорівнює

$$t_0 = -\frac{1}{h}\ln\varepsilon_0$$

Із зростанням ентропії Больцмана (Н-теорема) пов'язаний ряд парадоксів статистичної фізики. Парадокс Цермело пов'язаний із застосуванням теореми Пуанкаре про повернення системи у вихідний стан з будь-якою заданою точністю через певний час. Отже, ентропія системи повинна співпадати в момент повернення зі значенням ентропії системи у вихідному стані, а це суперечить Н-теоремі. Парадокс Лошмідта (оборотність) пов'язаний з тимчасовою оборотністю динамічних рівнянь. Якщо за прямої послідовності станів, якими проходить система, ентропія зростає, то при зворотній у часі послідовності станів вона повинна зменшуватися, а це також суперечить теоремі Больцмана.

Конфлікт оборотності рівнянь механіки Гамільтона та незворотності кінетичних рівнянь, що описують нерівноважні процеси, усувається в теорії Больцмана запровадженням інтеграла зіткнень (вводиться наближення хаотичних фаз). Незважаючи на те, що рух кожної частинки газу описується першим законом Ньютона, але ніхто не спостерігав в експерименті, щоб газ, будучи відгородженим у лівій половині судини, після зняття перегородки, знову зібрався б у її лівій половині через будь-який тривалий час. Це звязано з надзвичайно малою ймовірністю повернення системи у вихідний стан. Такими ймовірностями зазвичай нехтують при крупнозернистому огрубленні функції розподілу системи з великою кількістю часток. З цього витікає, що рівняння кінетичної теорії неспроможні описувати процеси повернення. Крім того, мікроскопічна оборотність рухів частинок нівелюється, як крупнозернистю структурою функцієї розподілу, так і знехтуванням флуктуаціями, які могли б вирівняти ймовірності переходу в часі системи з одного макростану в інший.

Сучасні досягнення ергодичної теорії з урахуванням відкритих властивостей перемішування та локальної нестійкості вказують на появу статистичних властивостей у динамічних систем (навіть з малим числом частинок). Як було показано раніше, незворотність процесу пов'язана не з тим, що система не може повернутися в скільки завгодно близький стан до вихідного, а через якість перемішування станів, що змінює форму фазового обьєму системи. Інтуїтивно ясно, що ймовірність повернення цього обьєму до первісної форми є дуже малою. Нехтування цією ймовірністю призводить до незворотності кінетики.Чому ж не можна повернути всі частинки за їх відомими детермінованими траєкторіями, обчисленими за першим законом Ньютона? Це пов'язано з тим,що при виборі масштабу огрублення у вигляді певного обсягу відбувається втрата інформації про

поведінку траєкторій всередині цього об'єму: разом з розворотом вибраної траєкторії в цьому обсязі відбувається звернення та нескінченного числа інших траєкторій, що перебувають у цій фазовій краплі через властивість перемішування. Перемішуваність призводить до заповнення обсягу огрублення за кінцевий час дуже великою кількістю траєкторій, що прийшли з будь-якої області фазового простору, інформація про які втрачається в результаті операції огрублення. Перемішування робить процес втрати інформації екстремальним та стійким.

Вивчення множини взаємодіючих частинок дозволяє виділити наступні ансамблі та відповідні їм динамічні системи:

• – мікроканонічний (закрита система, яка не обмінюється із зовнішньою середовищем ні частинками, ні енергією, ні інформацією);

• – канонічний (ізольована система, яка обмінюється із термостатом тільки енергією, але не частинками та інформацією);

• – макроканонічний (відкрита або дисипативна система, в якій присутні потоки частинок та енергії , як усередину системи, так і у зовнішній світ, але немає передачі інформації);

• – мегаканонічний (еволюціонуюча система, яка може накопичувати, зберігати, переробляти та передавати іншим системам речовину, енергію та інформацію).

Статистичні властивості ансамблів частинок, що взаємодіють, призводять до нової якості – інформативності динамічної системи.Введення інформації у ролі фізичної змінної вперше було запропоновано засновником кібернетики М. Вінером. Існують різні визначення інформації: від друкованого слова до вираження її через ймовірність здійснення того чи іншого явища. Надалі під інформацією розумітимемо чисельну міру упорядкованості ансамблю, тобто. визначати її з рівності $S\sim(f) + I(f) = const$. З цієї формули випливає важлива властивість інформації: при оборотних процесах ($dS\sim = 0$) не відбувається зміна інформації, а при незворотних явищах ($dS\sim \geq 0$, знак дорівнює адіабатичним змін стану ансамблю) інформативність системи зменшується. Мабуть, у таких системах починають протікати процеси, що прагнуть відновити порушений паритет між ентропією та інформацією. Еволюціонуюча система переходить на якісно новий рівень, змінюючи співвідношення інформація-ентропія, наприклад,за рахунок поділу на підсистеми виду k , у яких зберігається зв'язок $S\sim k\,(f) + I\,k\,(f) = const$. Це призводить до виникнення меж між підсистемами. Відповіні границі– області простору, всередині яких відбувається стрибкоподібна зміна фізичних характеристик при переході від однієї підсистеми до іншої. Отже, сума ентропії та інформації є новим інтегралом руху для дисипативних систем. Його руйнування призводить до репродуктивності (розмноження) системи з появою підсистем із якісно новими генетичними властивостями (мутанти). Найпростішим прикладом репродуктивності є

фазовий перехід. При фазовому переході з газу виділяється нова підсистема у вигляді рідкої фази, властивості якої суттєво відрізняються від властивостей газу. На відміну від газу рідина малостислива; приймає форму судини, в яку вона міститься; має в'язкі властивості. Це означає, що виживання мутантів нерозривно пов'язано із синтезом нової інформації. Отже, виникає проблема збереження, переробки та передачі при репродукції. Поява границь не вирішує цю проблему: при розподілі рідини перегородкою не відбувається синтезу нової інформації. Складніший процес,це процес коагуляції (або об'єднання) однакових та різнорідних частинок призводить до формування хімічних сполук, що змінюють інформаційно-ентропійну структуру системи. Отже, відбувається поділ вихідної динамічної системи на області з більшою інформацією та меншою ентропією, які взаємодіють між собою шляхом обміну інформацією, чи ентропією. Високоентропійні системи намагаються зруйнувати системи з високою інформативністю (і навпаки), ведучи боротьбу всередині свого "виду" (реалізується принцип підпорядкованості): системи з досить низькою ентропією намагаються відібрати її в системах із більшою ентропією (версифікація стійких станів). На біологічному рівні розвитку матерії ці процеси реалізуються у вигляді моделей "хижак-жертва" та внутрішньовидової боротьби. Перемішування змушує до врівноваження систем із підвищеною та низькою інформативністю. Це призводить до того, що системи з високою та низькою інформативністю можуть співіснувати лише у режимі еволюції.Для життєдіяльності системи треба забезпечити безпеку (матеріальну, енергетичну та інформаційну) індивідуального (інстинкт самозбереження) та колективного (інстинкт підпорядкованості) існування; відновлюваність індивідуумів (інстинкт репродукції); збереження цінної для виживання старої та синтез нової інформації (інстинкт еволюції).

12 ФРАКТАЛИ – ГЕОМЕТРІЯ ПРИРОДИ

12.1 Самоподібність

Широко розповсюджена думка,особливо серед фізиків і математиків, що явища і процеси, які ми спостерігаємо у довкіллі і в лабораторії описуються функціями, що диференціюються. Проте такі функції є скоріше винятком, ніж правилом, у створенні природних явищ та конструкцій. Прикладом може бути траєкторія броунівської частинки (рисунок 12.1), яка є недиференціюємою кривою: на цій кривій присутня велика кількість точок, у яких не існує похідна. Серед цих об'єктів присутні такі, які за будь-якого збільшення масштабів містять однакові структури – це так звані фрактальні множини. Самоподібність фракталів привертає увагу дослідників тому, що цією властивістю володіють практично всі об'єкти природи ,які відповідають усім рівням її організації.

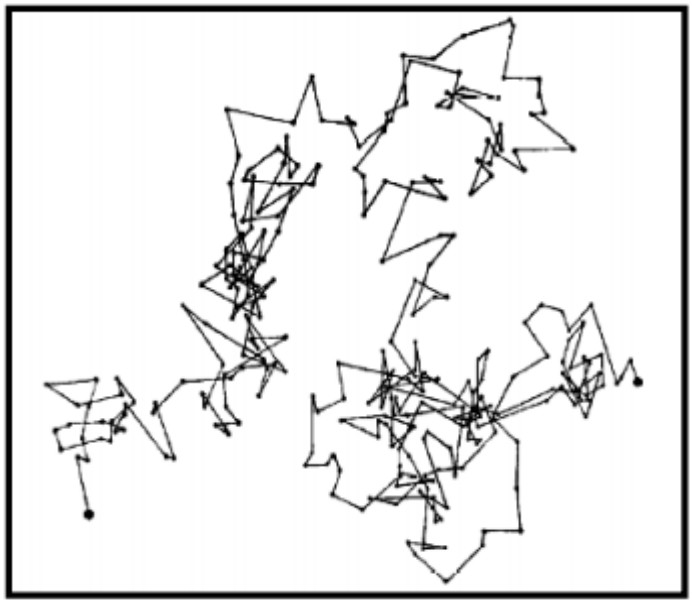


Рисунок 12.1 - Зображення траєкторії броунівської частинки

Природа наочно демонструє нам не просто вищий ступінь, а якісно новий рівень складності. Число різних масштабів довжин у структурах завжди нескінченне. Існування цих структур кидає нам виклик у вигляді важкого завдання вивчення тих форм.

Як приклад самоподібних структур можна навести відомі матрьошки, логарифмічну спіраль, ε -розкладання Вільсона (теорія перенормування) тощо.

Самоподібність відображає ієрархічну сутність самоорганізації матерії на всіх рівнях її існування: від малих до величезних масштабів. Вибір скейлінгової (масштабної) області в об'єкті, що досліджується, може відобразити ті властивості системи, які ігноруються при більшому

масштабі. Самоподібність призводить до того, що дрібні деталі вкраплюються у великі і стають "непомітними", хоча вони мають ті ж самі властивості, що й великі обьєкти світобудови.

Для ілюстрації самоподібності розділимо відрізок прямої лінії, квадрат і куб на *N* рівних частин (рисунок 12.2), топологічна розмірність (число параметрів, що характеризують геометричну фігуру) яких дорівнює: для відрізка прямої $d = 1$ (визначається одним параметром – довжиною), для квадрата $d = 2$ (довжина і ширина), для куба $d = 3$

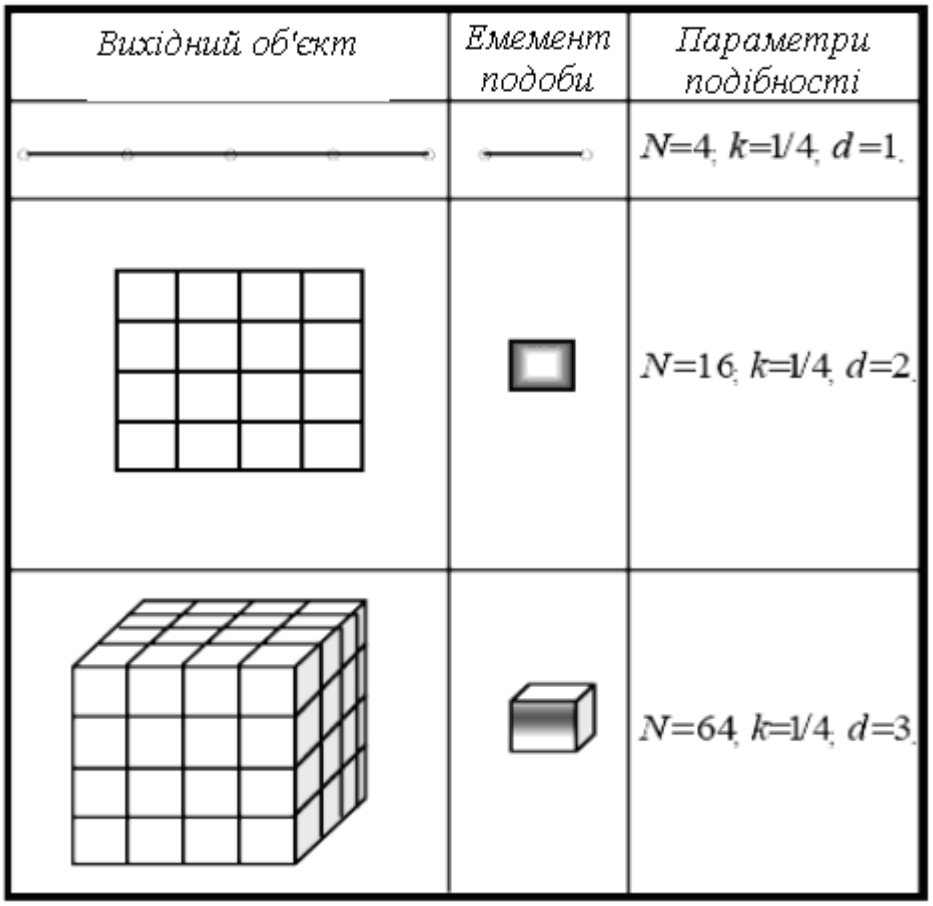


Рисунок 12.2 - Алгоритм створення самоподібної структури

(довжина, ширина та висота). Тоді кожна частина буде подібна до вихідного об'єкта, але зменшена в $1/k\ d$ разів (k – коефіцієнт подібності). Числа N та $1/k\ d$ пов'язані між собою рівністю $N\ k\ d = 1$. З цієї рівності випливає ,що топологічна розмірність дорівнює

$$d = \frac{\ln N}{\ln(1/k)}$$

Топологічна розмірність збігається з мінімальною розмірністю простору, в якому може відображатися геометрична фігура або її частина: відрізок прямої лінії – в одномірному, квадрат – у двомірному, куб – у тривимірному просторах. Таким чином, самоподібність геометричних

фігур досягається зміною масштабу оригіналу, як у бік збільшення (*k>1*), так і у бік зменшення його розмірів *(k<1*).

Іншим прикладом самоподібності є логарифмічна спіраль. Згідно Газалі, поворот радіус-вектора ri на довільний кут з подовженням в *k* разів (рисунок 12.3) описується рівняннями, які в матричному вигляді виглядають таким чином:

$$\begin{pmatrix} x_{i+1} \\ y_{i+1} \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}$$

Після n поворотів на кут ці рівняння набувають вигляду:

$$\begin{pmatrix} x_{i+1} \\ y_{i+1} \end{pmatrix} = k^n \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} \quad \text{або} \quad \begin{pmatrix} x_{i+1} \\ y_{i+1} \end{pmatrix} = k^n \begin{pmatrix} \cos(n\varphi) & -\sin(n\varphi) \\ \sin(n\varphi) & \cos(n\varphi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}$$

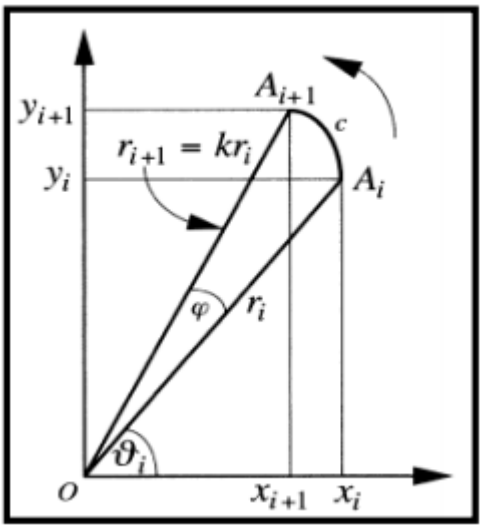


Рисунок 12.3 - Поворот радіус-вектора із подовженням

Якщо початкова точка лежить на осі *0 x* то $y_i = 0$. Після n поворотів на кут ϕ координати нової точки визначаються початковою координатою абсциси за формулами:

$$x_n = k^n x_0 \cos(n\varphi) \quad \text{і} \quad y_n = k^n x_0 \sin(n\varphi)$$

Отже,

$$r_n = \sqrt{x_n^2 + y_n^2} = k^n r_0$$

$\vartheta_n = n\varphi$ - кут обертання.

З цих формул випливає, що при повороті на довільний кут ϑ радіус-вектор збільшиться *в* $k\,\vartheta/\phi$ разів.

Тоді радіус-вектор можна представити формулою

$$r(\vartheta) = r_0 e^{\lambda \vartheta}$$

$$\lambda = (\ln k)/\varphi$$

Останнє співвідношення визначає так звану логаріфмічну спіраль. Логарифмічна спіраль самоподібна, так як існує такий кут θ, при якому збільшена у k разів спіраль збігається з вихідною спіраллю. Коефіцієнт розширення визначає котангенс постійного кута між радіус-вектором r і дотичною до нормалі у будь-якій точці логарифмічної спіралі. Це означає, що в кожній чверті декартової площини точки спіралі розташовані всередині таких прямокутних трикутників (рисунок 12.4). Спіраль досить часто виникає у різних фізичних задачах, наприклад, фазові траєкторії у разі стійкогота нестійкого фокусів представляють собою спіралі. Це говорить про виникнення самоподібності для такого типу руху. Природа використовує спіраль при побудові живих організмів – молюсків Nautilus та інших. Розглянуті приклади показують, що самоподібність є невід'ємним атрибутом природи: елементарні частинки схожі (тотожні) одна одній; броунівський рух демонструє імовірнісну самоподібність (рисунок 12.4). Дванадцятитоновий лад Баха (відношення частот сусідніх нот темперованого ладу постійно і дорівнює 21/12 октави, розділеної на 12 півтонів) вказує на використання самоподібності у музиці. Інтенсивно властивість самоподібності використовував у своїй творчості художник Ешер (рисунок 12.5). Природні фрактали показані на рисунку 12.6. Самоподібність пронизує всі рівні організації, існування та відображення

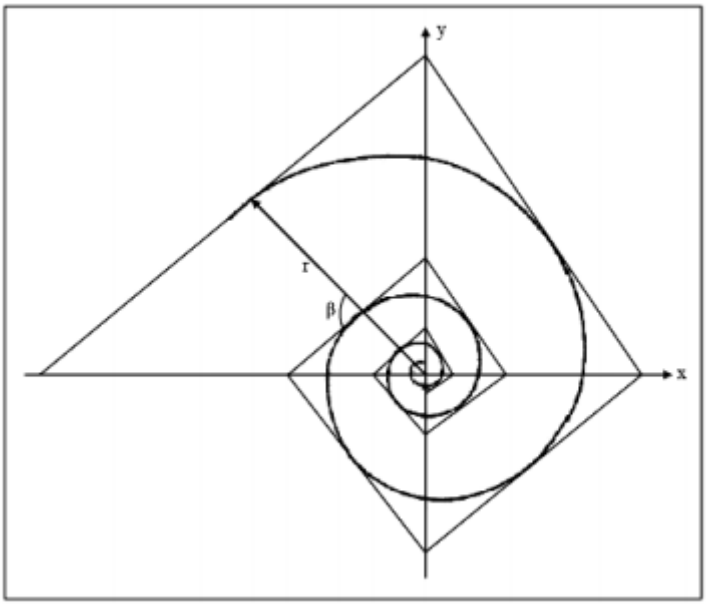


Рисунок 12.4 - Саподібність логарифмічної спіралі

Рисунок 12.5 - Самоподібність у картинах Моріца Ешера

Рисунок 12.6 - Фрактальна геометрія природи

організації матеріального світу, тобто скейлінг (або масштабна інваріантність) є важливою характеристикою природного об'єкта. Самоподібність може бути детермінованою і хаотичною, безперервною (траєкторія броунівської частки) та дискретним (матрьошки). Деякі види самоподібності зберігаються при значному збільшенні масштабу, інші зникають при незначній зміні геометричних розмірів (обмеженість скейлінгу).

Іноді масштабно змінені об'єкти математично точно відтворюють геометрію вихідного обьєкту, але у природі ця точність втрачається рахунок впливурізних факторів ("мутацій"), і скейлінг спостерігається лише асимптотично. Самоподібність може бути явною або прихованою, тому її виявлення є важливим завданням природознавства.

12.2 Фрактальні множини

Фракталом (від латинського слова “fractus” – зламаний; в англійському варіанті слово “fractional” означає дробовий) називається структура, що складається з частин, які подібні до вихідного об'єкта в

цілому і мають розмірність Хаусдорфа-Безиковича D, яка перевищує або дорівнює її топологічній розмірності d. Розмірність Хаусдорфа-Безиковича визначається майже таким самим співвідношенням

$$D = \lim_{k \to 0} \left(\frac{\ln N}{\ln (1/k)} \right)$$

що й топологічна розмірність, але на відміну від останньої може набувати як цілі, так і дробові значення. Яскравим представником фрактальної кривої є траєкторія руху броунівської частки (рисунок 12.1). Збільшення будь-якої її ділянки в 10 разів наводить збільшення кількості ланок в 100 разів, тобто, для кривої Броуна розмірність Хаусдорфа-Безиковича дорівнює 2. Якби броунівська частка рухалася по площині (топологічна розмірність $d = 2 = D$), то її траєкторія пройшла б після спливання тривалого часу через усі точки площини. Однак через самоперетин кривою руху цей феномен відсутній. Крім того, почавши рух з деякої точки, броунівська частинка може повернутися в скільки завгодно малий окіл цієї точки, тому що ймовірність цієї події у разі площини дорівнює 1. При русі в просторі (топологічна розмірність $d = 3 > D$), ймовірність повернення в малий окіл початкової точки руху менше 1. Межі масштабної інваріантності для блукаючої частки Броуну порядку8 10: від розмірів судини (≈ 0,1 м) до довжини вільного пробігу (10 нм=10^{-9} м), причому кожна ланка траєкторії утворює континуум. Зазначимо, що траєкторія Броунівської частинки досить близько підходить під визначення недиференційованих функцій Вейєрштрасса. Крім того, цей приклад показує, що при розмірності Хаусдорфа-Безиковича, що дорівнює 2 геометричним об'єктом, необов'язково буде площина. Цією фігурою може бути топологічно одномірна лінія. Розглянемо приклади деяких таких структур:

-крива ("сніжинка") Коха. Візьмемо відрізок прямої та у його середній частини збудуємо рівносторонній трикутник; аналогічні побудови проведемо на кожній прямолінійній ділянці (результати побудов до 5 кроку показані на рисунку 12.7. Крок ітерації при n-му побудові (коефіцієнт подібності) дорівнює 3-n, а кількість відрізків, що виникають - 4n. Отже, розмірність Хаусдорфа-Безиковича кривої Коха дорівнює D = ln 4/ ln3 = *1,26*. Розмірність, як бачимо, лежить між 1 і 2, тобто крива Коха займає проміжне положення між одно- та двовимірними топологічними фігурами.

-"Пил" Кантора. Якщо відрізок прямий розділити на 3 рівні частини та видалити середній відрізок, то отримана фігура представляє перший крок при побудові канторівської "пилу". Аналогічні дії виконуються з кожним із отриманих відрізків аж до нескінченності (рисунок 12.8). Розмірність Хаусдорфа-Безиковича визначається формулою

$$D = \ln 2 / \ln 3 = 0{,}63 \ldots$$

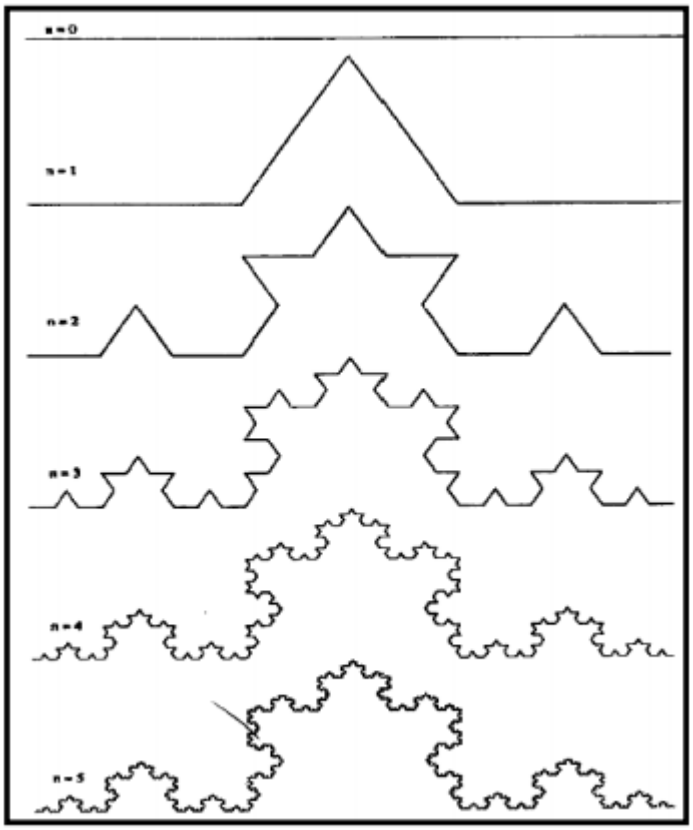


Рисунок 12.7 - Крива Коха

оскільки при n-му побудові коефіцієнт подібності дорівнює $3-n$, а кількість відрізків, що виникають, дорівнює 2^n .

-"Килим" Серпінського . Фрактал Серпінського є плоским аналогом "пилу" Кантора (рисунок 12.9). Його можна визначити різними способами: видаленням центрального рівнобічного трикутника з початкового трикутника, поділеного на 4 рівносторонні трикутники; множиною виграшних точок у грі Серпінського; використанням трикутника Паскаля у системі двійкового обчислення (враховуються правила додавання 0+0=1, 0+1=1, 1+0=1 та 1+1=0).

Скористаємося, наприклад, останнім способом, для чого нагадаємо, як будується трикутник Паскаля. З ведення у ступінь n суми 2 чисел призводить до наступних виразів:

$$n=2 \qquad (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2;$$

$$n=3 \qquad (a+b)^3 = a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3;$$

$$n=4 \qquad (a+b)^4 = a^4 + 4a^3 b + 6a^2 b^2 + 4ab^3 + b^4; \ldots$$

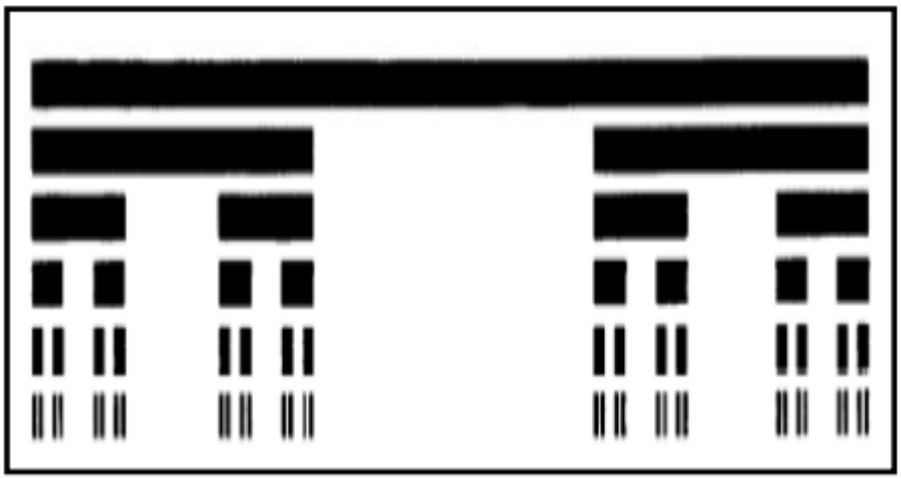


Рисунок 12.8 - Канторівський "пил"

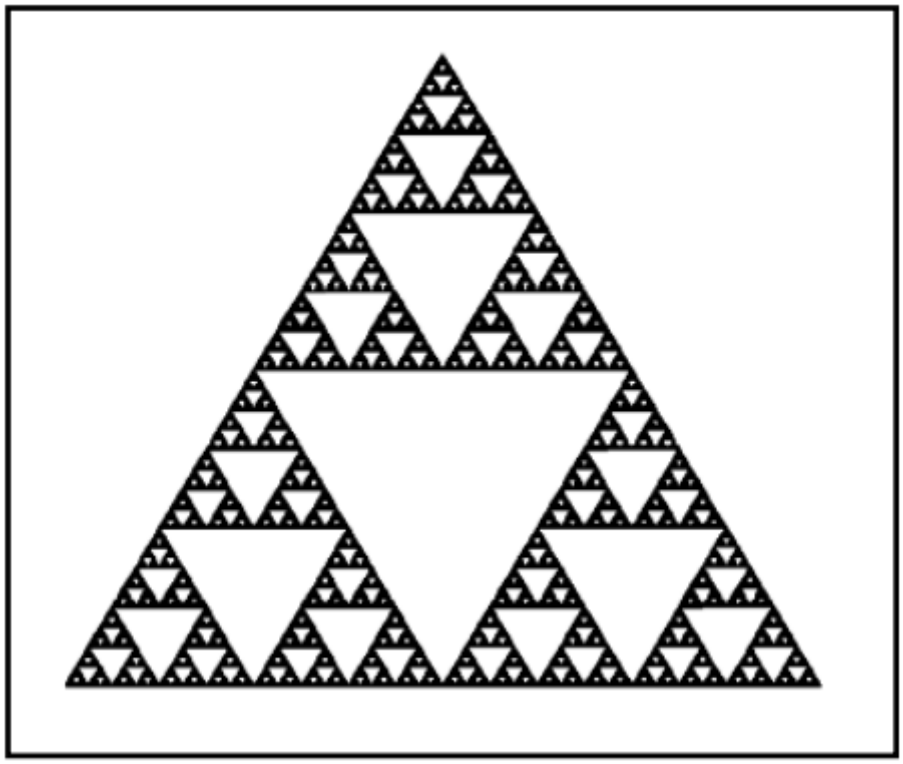
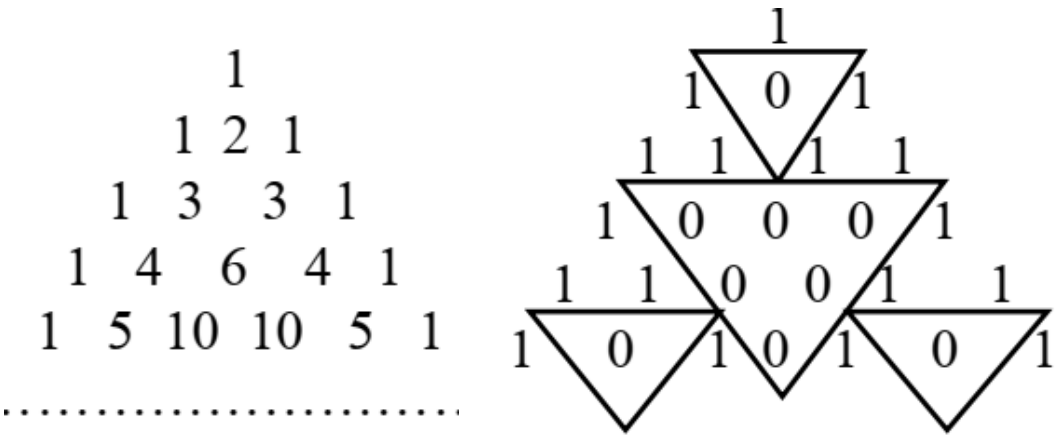


Рисунок 12.9 - "Килим" Серпінського

Паскаль зауважив, що числові коефіцієнти на кроці n можна обчислювати за відомими коефіцієнтами кроку $n-1$ у вигляді суми найближчих чисел (поряд побудований аналогічний трикутник у двійковій системі обчислення):



Трикутник Паскаля, побудований у двійковому коді, повністю відповідає верхній частини килима Серпінського, якщо замість нулів зобразити рівносторонні трикутники. Фрактальна розмірність килима Серпінського обернено пропорційна розмірності Хаусдорфа-Безиковича для канторівської “пилу”, тобто. Дорівнює

$$D = \ln 3 / \ln 2 = 1{,}58\ldots$$

-"Дракони" Хайвера. Якщо складати аркуш паперу, як показано на рисунку 12.10а (показані перші 4 ітерації), то після n-ого кроку побудови виходить фрактальна множина, яку Хайвер назвав "драконом". Зазначимо

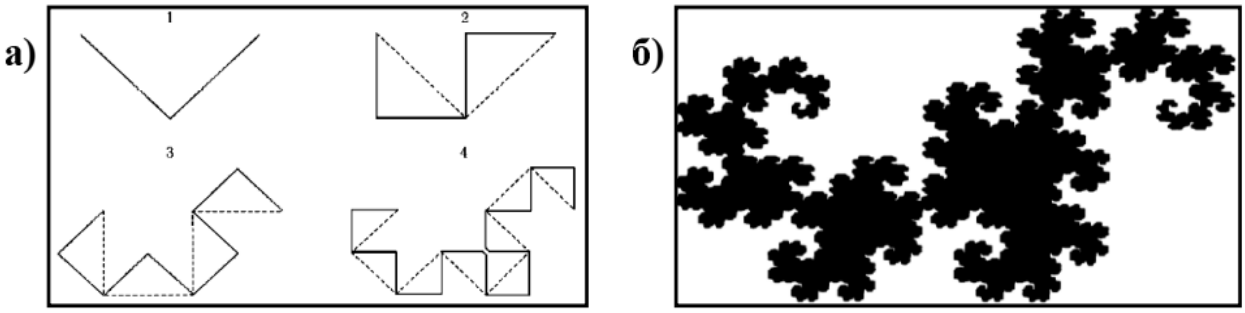


Рисунок 12.10 - Побудова та вид дискретного фракталу Хайвера

той факт, що послідовність центральних складок точно укладається на логарифмічну спіраль. Хаусдорфова розмірність фракталу типа "дракон" дорівнює одиниці.

- Прикладом фракталів, названих “деревами”, є фрактальна множина Піфагора, побудова якої показано на рисунку 12.11а . З'єднання “дерева” Піфагора з логарифмічною спіраллю призводить до картини дерева, що обдувається вітром (рисунок 12.11б).

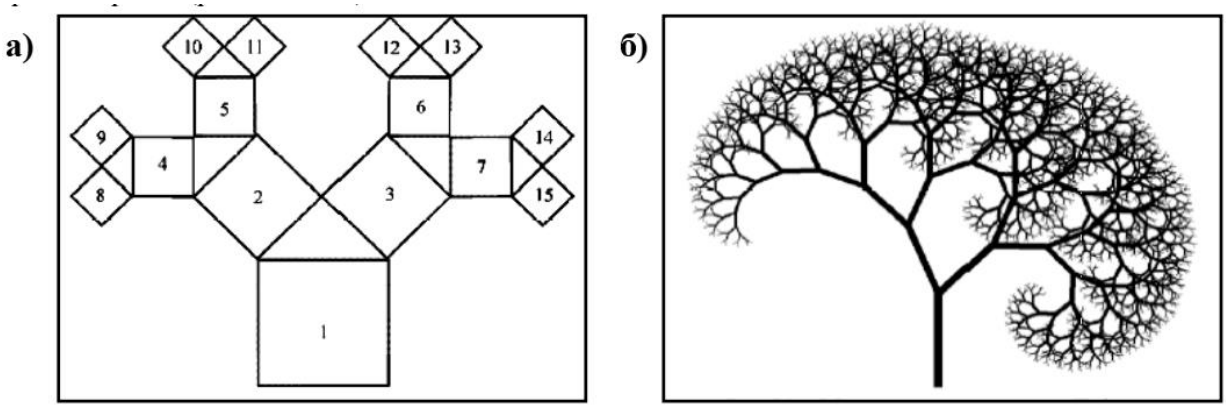


Рисунок 12.11 - Спосіб побудови
(а) “дерева” Піфагора,та (б) обдування вітром “дерева” Піфагора

Наведені приклади фрактальних множин є конструктивними, так як задається спосіб їх побудови. Аналітично, фрактали можуть бути побудовані із застосуванням перетворень типу поворотів, стисків, розтягувань та інверсій щодо довільного центру. Ці перетворення точок описуються наступними формулами:

- повороти-розтяжки

$$\begin{cases} x' = a\,x - b\,y + c \\ y' = b\,x + a\,y + d \end{cases}$$

- повороти-стиснення

$$\begin{cases} x' = a\,x + b\,y + c \\ y' = b\,x - a\,y + d \end{cases}$$

з показником розтягування (стиснення), який дорівнює

$$\sqrt{a^2 + b^2}$$

Конструктивні фрактали інваріантні щодо наведених перетворень, тобто мають місце співвідношення

$$\begin{cases} x' = a\,x + b\,y + e \\ y' = c\,x + d\,y + f \end{cases}$$

з масштабним коефіцієнтом

$$\sqrt{a\,d - c\,b}$$

За допомогою афінного перетворення будують фрактали, які дуже схожі на природні структури. Наприклад, на рисунку 12.13 показаний фрактал, схожий на лист папороті, побудований за допомогою системи ітерованих функцій афінного типу. Для ряду фракталів такого виду коефіцієнти перетворення наведені в таблиці 12.1. Більш складні фрактали виникають при побудові ітераційних процесів у галузі комплексних та

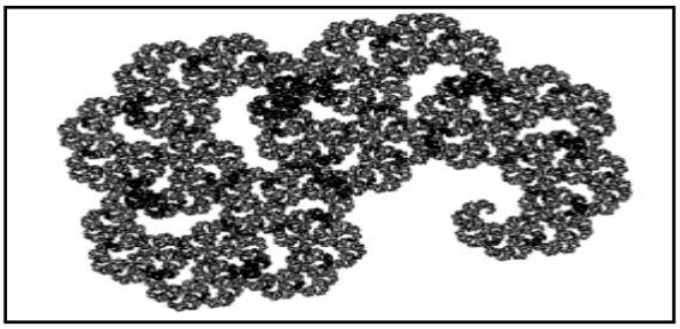


Рисунок 12.12 - Фрактал, одержаний подвійним застосуванням повороту-стиску

Рисунок 12.13 - Афінний лист папороті

Таблиця 12.1 – Коєфіцієнти системи ітерованих функцій (за Р. М. Кроновером)

Фрактал	***a***	***b***	***c***	***d***	***e***	***f***
Папороть	0,7000	0,0000	0,0000	0,7000	0,1496	0,2962
	0,1000	– 0,4330	0,1732	0,2500	0,4478	0,0014
	0,1000	0,4330	– 0,1732	0,2500	0,4445	0,1559
	0,0000	0,0000	0,0000	0,3000	0,4987	0,0070
Кристал	0,2550	0,0000	0,0000	0,2550	0,3726	0,6714
	0,2550	0,0000	0,0000	0,2550	0,1146	0,2232
	0,2550	0,0000	0,0000	0,2550	0,6306	0,2232
	0,3700	– 0,6420	0,6420	0,3700	0,6356	– 0,0061
Лист	0,4000	– 0,3733	0,0600	0,6000	0,3533	0,0000
	– 0,8000	– 0,1867	0,1371	0,8000	1,1000	0,1000
Дерево	0,1950	– 0,4880	0,3440	0,4430	0,4431	0,2452
	0,4620	0,4140	– 0,2520	0,3610	0,2511	0,5692
	– 0,0580	– 0,0700	0,4530	– 0,1110	0,5976	0,0969
	– 0,0350	0,0700	– 0,4690	0,0220	0,4884	0,5069
	– 0,6370	0,0000	0,0000	0,5010	0,8562	0,2513

гіперкомплексних (кватерніонних) чисел: комплексні фрактали Жюліа, Ньютона, Мандельброта та інших. Фрактал Жюліа,наприклад, будується за допомогою *відображення* $zn+1 = zn2 + c$, *де* $z = x + i\,y$, а величина $i = -1$ – уявна одиниця, c – ненульове, постійне, комплексне число. Фрактали Жюліа, "пил" Фату, множина Ньютона і Мандельброта продемонстровані на рисунку 12.14 (на цьому ж рисунку показано виникнення біфуркацій (подвоєння періоду) для фракталу Мандельброта). Кватерніонні фрактали відображені на рисунку 12.15.

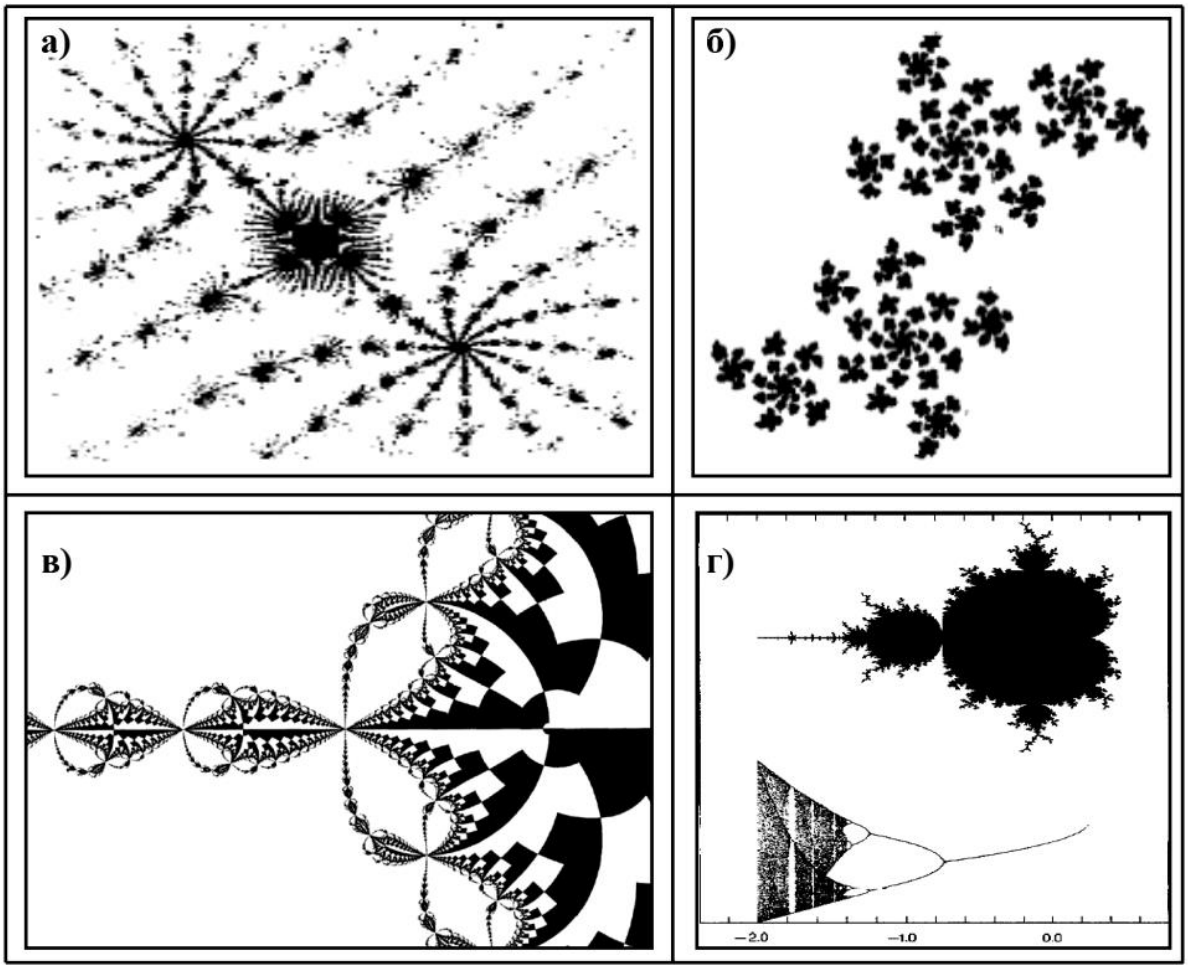


Рисунок 12.14 - Комплексні фрактали:
а) - розріджене безліч Жюлі; б) - "пил" Фату;
в) - фрактал Ньютона; г) –множина Мандельброта та біфуркація

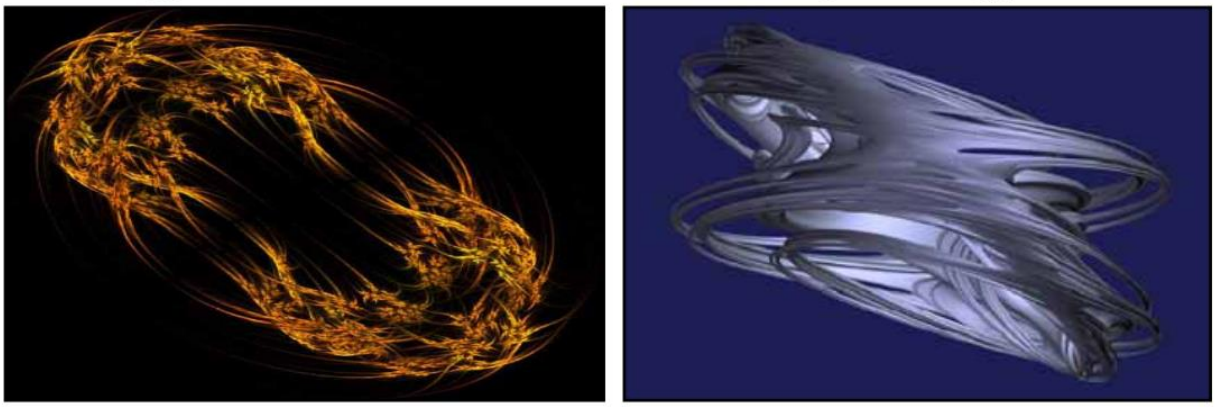


Рисунок 12.15 - Квартирніонні фрактальні структури

12.3 Відмінність та розмірність Реньї

Фрактальні лінії описуються безперервними функціями (але такими, що не диференціюються). За своїми властивостями до фракталів близькі

так звані функції Вейєршрасса.Вейєрштрасс показав, що при виконанні нерівності $\alpha\beta > 1+(3\pi/2)$ функція $w(x)$ у

$$w(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha^k \cos(\beta^k x)$$

в усіх точках безперервна, але не диференціюєма (тут **α** – речове, а β – непарне числа, а множники α^k забезпечують збіжність наведеного ряду). Подібна функція Вейєрштраса з коефіцієнтом

$$\beta\ (w_L(\beta x) = \sum_{k=1}^{L} \cos(\beta^k \beta x) = \sum_{k=1}^{L} \cos(\beta^{k+1} x) = \sum_{k=1}^{L+1} \cos(\beta^k x) = w_{L+1}(x))$$

майже збігається з вихідною функцією, тобто, є асимптотично самоподібною. Якщо скласти музичний ряд за допомогою функції Вейєрштрасса, то при подвоєння швидкості відтворення звуки будуть звучати не на октаву вище, якочикується , а на півтона нижче. Функції Вейєрштрасса описують результуючу суму коливань з різними періодами. Відсутність у природі ідеально періодичних процесів, взаємодія обмеженого об'єкта з навколишнім середовищем, виникнення спонтанних флуктуацій, прагнення виживання та інші причини призводять до порушення подібності, що відображається у вигляді різноманітності форм та способів існування матерії.

Скейлінгова подібність порушується з урахуванням фізичних, хімічних, біологічних, соціальних та інших чинників. Галілей, досліджуючи залежність міцності кісток тварин від їхніх габаритів, дійшов такого висновку: тварина, що має по відношенню до своїх родичів удвічі більші розміри, має важити у 8 разів більше, ніж вони. Проте ширші кістки мають лише вчетверо більший поперечний переріз і можуть витримувати лише чотириразове збільшення ваги. Це призводить до того, що розмір кісток збільшується швидше, ніж змінюються решта тіла тварини. Порушення подібності відбувається і при дисипації енергії теплокровними істотами: енергія, що випромінюється має бути пропорційна площі поверхні їх тіла з показником ступеня (індексом розсіювання) 2/3, але експериментальні дані призводять до індексу розсіювання, що дорівнює 3/4 (рисунок 12.16). З кожним століттям люди стають вищими.

Подібність у динамічних задачах зводиться до однорідності функцій, що описують поведінку досліджуваної системи. Якщо потенційна енергія тіла описується однорідною функцією просторових координат порядку n, тобто, $U(\lambda r) = \lambda^n U(r)$, то при масштабуванні часу в ω разів швидкість руху зміниться в λ/ω разів, а кінетична енергія - в (λ/ω) 2 разів. Якщо коефіцієнти подібності збігаються $(\lambda / \omega)\ 2 = \lambda^n$, то (рисунок 12.16), розсіювання теплової енергії буде описуватися лагранжіаном.який буде однорідною функцією n, а рівняння руху залишаться незмінними (перетворення стиснення-розтягнення просторово-часового континууму,

або універсальність поведінки динамічних систем незалежно від своїх масштабів). Найбільш часто однорідні функції використовуються в рівноважній термодинаміці, тому багато термодинамічних систем демонструють універсальну поведінку. Порушення скейлінгу (яке може відбуватися, зокрема, через його обмеженість) призводить до зміни поведінки динамічних та термодинамічних об'єктів.

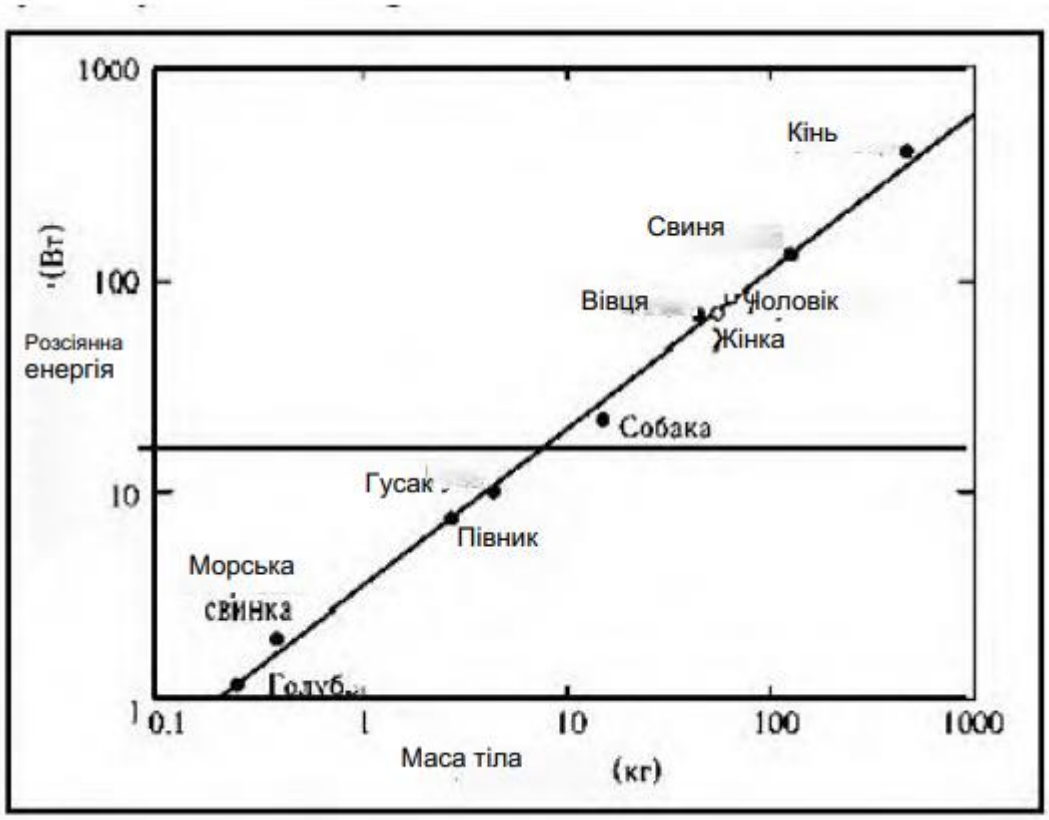


Рисунок 12.16 - Розсіювання енергії теплокровними тваринами

Порушення скейлінга вказує на пірамідальність організації природи:на зміну одній однорідної функції стану приходить інша залежність між параметрами системи із новими скейлінговими властивостями.

Для опису зміни масштабної інваріантності скористаємося узагальненим визначенням ентропії Реньї . Воно містить моменти ймовірностей p :

$$S_\nu = \frac{1}{\nu - 1} \ln\left(\sum_{n=1}^{N} p_n^\nu \right)$$

де ν – довільне дійсне число. Зазначимо, що при $\nu \to 1$ з цієї формули випливає стандартний вираз для ентропії за визначенням Колмогорова

$$S_1 = -\sum_{n=1}^{N} p_n \ln p_n$$

Визначимо узагальнену розмірність формулою

$$D_\nu = \lim_{k \to 0} \frac{S_\nu}{\ln k}$$

З цієї формули видно, що при великих негативних значеннях параметра розмірність формується малими ймовірностями, а при великих позитивних значеннях цього параметра розмірність формується тими ймовірностями, які близькі до одиниці. При $\nu = 0$ розмірність Реньї збігається з розмірністю Хаусдорфа-Безиковича для самоподібних фрактальних множин. Для фрактальних фігур із властивістю самоподібності ймовірності $pi = 1/N$, а ентропія не залежить від порядку ν:

$$S_\nu = (\nu - 1)^{-1} \ln\left(N (1/N)^\nu \right) = -\ln N$$

що визначає особливий статус самоподібних фракталів. З визначення розмірності Реньі випливає, що самоподібний фрактал покривається однаковими “осередками”, число яких обчислюється за формулою $n(\nu) = (1-\nu) D\nu$. Для значення ν = 1 величина D_1 задає інформаційну, а за $\nu = 2$ кореляційну розмірності

$$D_2 = \lim_{k \to 0} \frac{S_2}{\ln k}$$

Ентропія S_2 визначається ймовірностями виявлення подібного елемента фрактальної множини на відстані k від обраного іншого елемента цієї множини. Ці розмірності демонструють ієрархію масштабів, що залежать від того, які моменти ймовірностей беруть участь у їх формуванні.

Досягнення межі існування одного масштабу супроводжується переходом до іншого масштабу, іншої однорідної функції стану, виникає динамічний хаос, змінюється структура фізичного тіла. Так ,скажімо, було виявлено аморфно-кристалічний стан швидкоохолодженого сплаву алюмінію з марганцем. Такі системи отримали назву квазікристалів. Вони характеризуються наявністю симетрії п'ятого порядку (прикладом фігури з віссю симетрії п'ятого порядку може бути п'ятикутна зірка), забороненої для періодичних (самоподібних) кристалів. Між повністю впорядкованими структурами (кристалами) та практично безформними об'єктами лежать не тільки квазікристали, а й динамічні системи з часовим та просторовим детермінованим хаосом. Порушення скейлінга відбувається при певних значеннях параметрів, що повільно змінюються, що призводить до плавного, або стрибкоподібного переходу в новий стан з утворенням нової структури.

13 СИНЕРГЕТИЧНІ СИСТЕМИ

13.1 Осередки Релея-Бенара та модель Лоренца

Дисипативні структури виникають на нанорівні, при протіканні хімічних реакцій, утворенні розчинів (рисунок 13.1-13.4) та інших незворотних

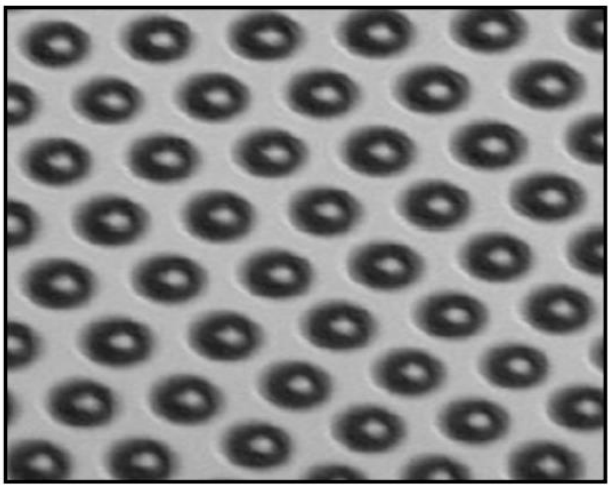


Рисунок 13.1 - Включення рідкокристалічної фази в смектиках

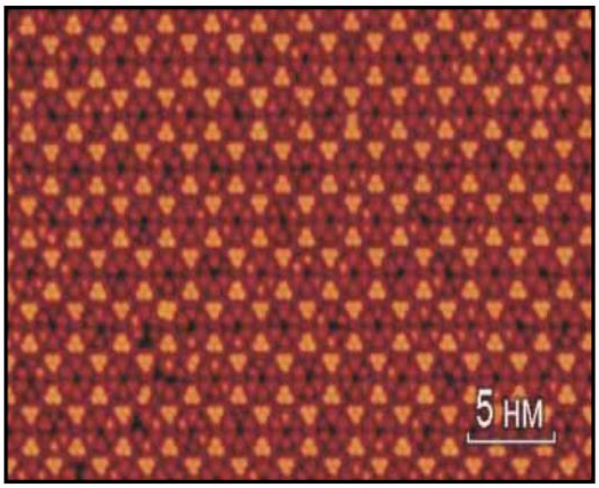


Рисунок 13.2 - Утворення на нанорівні в системі Al − S і

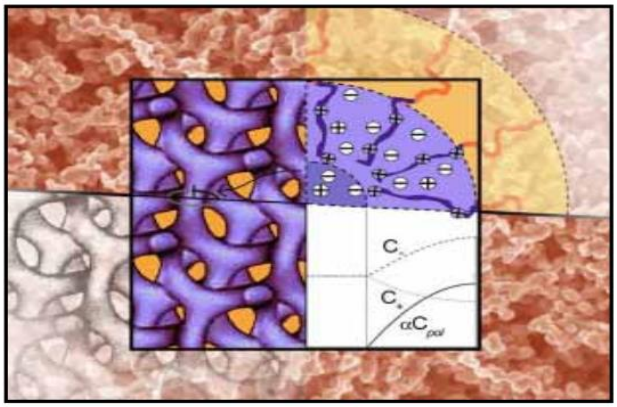


Рисунок 13.3 - Самоорганізація амбіфільних молекул

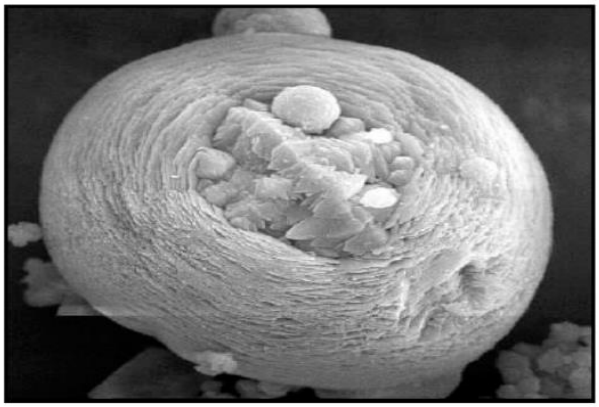


Рисунок 13.4 - Нерівноважні утворення у кремнеземі (SiO2)

процесах. Як приклади синергетичних систем, в яких виникає самоорганізація, розглянемо виникнення осередків Бенара, коливання при протіканні реакції Білоусова-Жаботинського (брюсселятор Пригожина-Лефевра) та в біологічній системі жертва-хижак (модель Лотки-Вольтерра).

Почнемо з експерименту Релея-Бенара (рисунок 13.5), у зв'язку з чим

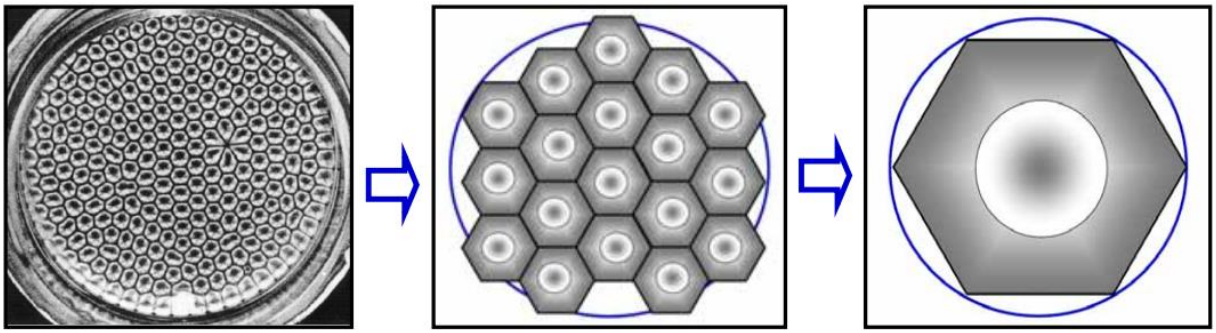


Рисунок 13.5 - Комірки Релея-Бенара

розглянемо його теоретичну модель. Нехай шар рідини товщиною h знаходиться у гравітаційному полі Землі (g – вектор вільного прискорення) під дією градієнта температури, тобто, на верхній межі рідина має постійну температуру T_0, а на нижній – $T_0 + \Delta T$ (рисунок 13.6). При досить великій

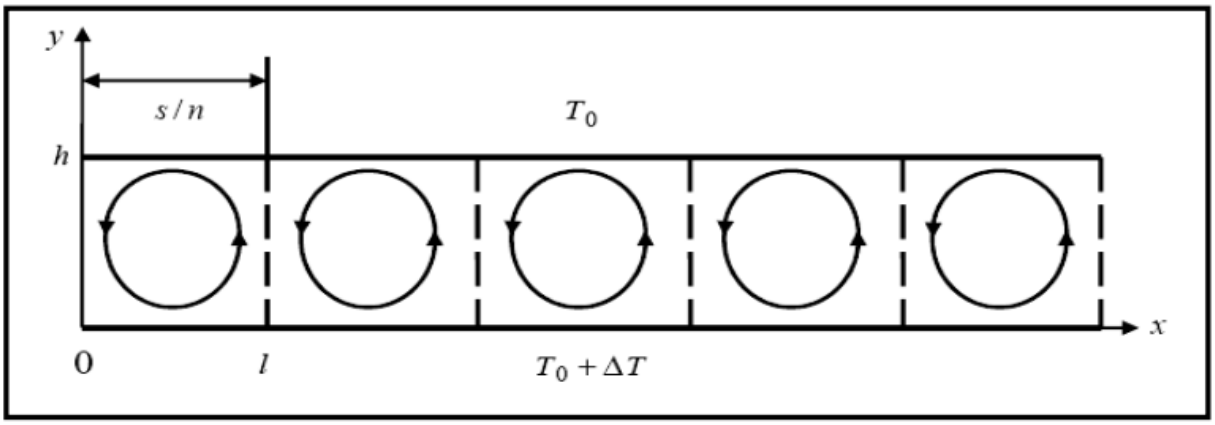


Рисунок 13.6 - Поводження шару рідини за наявності градієнта температури

різниці температур ΔT (градієнт температури) у шарі виникають конвекційні потоки, які формують осередки Бенара (ширина $l = s / n$, s – ширина середовища вздовж осі абсцис, n– число осередків, що уміщаються на осі абсцис): усередині яких рідина піднімається від більш нагрітої нижньої межі до поверхні шару, а по площинам шестигранників рідина, що охолодилася, стікає вниз. Розподілена система задається векторним полем швидкостей $u = u(u_1; u_2; u_3)$, скалярними полями тиску $P = P(x; y; z; t)$, температури $T = T(x; y; z; t)$ та щільності $\rho = \rho(x; y; z; t)$, відповідно. Моделювання вищеописаної ситуації будується на використанні рівнянь:
– Навье-Стокса

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u} = -\frac{\nabla P}{\rho} + \nu \Delta \vec{u} + \vec{g}$$

(ν – кінематична в'язкість);
- нерозривності середовища

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \vec{u}) = 0 \quad ;$$

– теплопровідності

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \nabla(T \vec{u}) = \chi \Delta T$$

(χ – коефіцієнт температуропровідності);
– зв'язків між щільністю та температурою $\rho = \rho\ 0\ (1 - \alpha\ \Delta T\ )$ (інші параметри системи вважаються незалежними від різниці температур у т.з. наближенні Бусінеска), α – коефіцієнт теплового розширення.
Система рівнянь доповнюється граничними умовами:

– на нижній границі

$$T(x;\ y;\ z = 0;\ t) = T_0 + \Delta T\ ;\ \ \vec{u}\Big|_{y=0} = 0$$

– на верхній границі

$$T(x;\ y;\ z = h;\ t) = T_0\ ;\ \ \vec{u}\Big|_{y=h} = 0$$

Граничні умови для поля швидкостей відбивають відсутність руху рідини через граничні площини. Лінеаризуємо дані рівняння, ввівши такі позначення:

$$P = P_0 - \rho_0\, g(1 - \alpha\Delta T)y + p(x;\ y;\ t) \ \text{ і } \ T = T_0 + \Delta T\left(1 - \frac{y}{h}\right) + \theta(x;\ y;\ t) \quad ,$$

де $p(x;\ y;\ t)$ і $\theta(x;\ y;\ t)$ – малі відхилення від гідростатичного тиску P_0 та $T = T(y)$ від лінійної залежності , відповідно. Тоді система рівнянь набуває наступного вигляду:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u} = -\dfrac{\nabla p}{\rho_0} + \nu \Delta \vec{u} + \alpha g \vec{j}\,\theta \ , \\ \nabla \cdot \vec{u} = 0 \ , \\ \dfrac{\partial \theta}{\partial t} + \nabla(\theta\, \vec{u}) - \Delta T \nabla\left(\dfrac{y}{h}\vec{u}\right) = \chi \Delta \theta , \end{cases}$$

зауважимо, що $\nabla(\ )\ y\ u\ =\ u\ j$. Граничні умови перетворюються на наступні:

$$\begin{cases} \theta(x;\ y = 0;\ t) = \theta(x;\ y = h;\ t) = 0 \\ u\vec{j}\Big|_{y=0} = u\vec{j}\Big|_{y=h} = 0 . \end{cases}$$

Так як рух рідини відбувається в площині xOy, складова швидкості $u_3 = 0$. В силу того, що

$$\nabla \cdot \vec{u} = \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} = 0 ,$$

можна ввести функцію струму рідини, згідно з формулами які суто завдають суцільність середовища

$$u_1 = -\frac{\partial \psi}{\partial y} \quad , \quad u_2 = \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

Після виключення тиску, як показав Солтсмен, рівняння руху можна записати у вигляді:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial (\Delta \psi)}{\partial t} = -\dfrac{\partial (\psi, \Delta \psi)}{\partial (x, y)} + \nu \Delta^2 \psi + \alpha g \dfrac{\partial \theta}{\partial x} \\ \dfrac{\partial \theta}{\partial t} = -\dfrac{\partial (\psi, \theta)}{\partial (x, y)} - \dfrac{\Delta T}{h} \dfrac{\partial \psi}{\partial x} + \chi \Delta \theta \end{cases} ,$$

$$\frac{\partial (q, g)}{\partial (x, y)} = \frac{\partial q}{\partial x} \cdot \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial y} \cdot \frac{\partial g}{\partial x} \quad ,$$

$$\Delta^2 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}$$

Розкладаючи функцію струму в ряд Фур'є, та зберігаючи лише молодші члени розкладу і використовуючи підстановку

$$\frac{n}{1+n^2} \frac{\psi}{\chi} = \sqrt{2} X(t) \sin\left(\frac{\pi n x}{h}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{h}\right),$$

$$\frac{\pi R \theta}{R_c \Delta T} = \sqrt{2}\, Y(t) \cos\left(\frac{\pi n x}{h}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{h}\right) - Z(t) \sin\left(\frac{2\pi y}{h}\right) ,$$

де функції *X(t), Y(t)* та *Z(t)* залежать тільки від часу,

$$R = \alpha g h^3 \Delta T / (\nu \chi)$$

- число Релея,

$$R_c = \pi^4 (1+n^2)^3 / n^2$$

- його критичне значення, величина *n* характеризує відношення лінійних розмірів комірка Бенара, отримуємо систему рівнянь Лоренца :

$$\begin{cases} \dot{X} = a(Y - X) \\ \dot{Y} = bX - Y - XZ \\ \dot{Z} = -cZ + XY \end{cases} \qquad (13.1)$$

тут похідна береться за безрозмірним часом

$$\tau = \pi^2 (1+n^2)\chi\, l/h^2,\ \ a = \nu/\chi$$

число Прандтля, $b = R / R\,c$ - керуючий параметр, $c = 4 / (1 + n^2)$. У системі рівнянь Лоренца змінна $X(t)$ характеризує швидкість обертання конвекційних потоків, а $Y(t)$ і $Z(t)$ описують розподіл температури по осях абсцис і ординат. Проаналізуємо стійкість, умови виникнення конвекції та турбулентності у моделі Лоренца, для чого запишемо систему рівнянь (13.1) у векторній формі

$$\dot{\vec{X}} = F(\vec{X}),\quad \text{де}\ \ \vec{X} = (X; Y; Z),\ \ F(\vec{X}) = (a(Y-X); bX - Y - XZ; -cZ + XY)$$

Вирішення рівняння $F(X) = 0$ визначає нерухомі точки, що задаються рівностями $X_1 = (0; 0; 0)$ і $X_2 = (\pm c\,(b-1); \pm c\,(b-1); b-1)$.

Перша точка описує теплопровідність середовища. Її матриця стійкості за Ляпуновим дорівнює

$$\left.\frac{\partial F_i(\vec{X})}{\partial X_j}\right|_{X_1} = \begin{pmatrix} -a & a & 0 \\ b & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -c \end{pmatrix},$$

причому власні числа завдаються формулою

$$\lambda_{1,2} = -\frac{a+1}{2} \pm \frac{\sqrt{(a+1)^2 + 4(b-1)a}}{2}$$

та $\lambda_3 = -c$.

Усі показники Ляпунова негативні за значенням керуючого параметра $0<b<1$, тобто, рішення $X_1 = (0; 0; 0)$ є стійким. При $b=1$ власне число $\lambda_1 = 0$, а рішення $X_1 = (0; 0; 0)$ стає нестійким: починається конвекція Бенара та реалізується друге рішення

$$\vec{X}_2 = (\pm\sqrt{c(b-1)}; \pm\sqrt{c(b-1)}; b-1)$$

Для цього рішення матриця стійкості має вигляд

$$\left.\frac{\partial F_i(\vec{X})}{\partial X_j}\right|_{X_2} = \begin{pmatrix} -a & a & 0 \\ 1 & -1 & d \\ d & d & -c \end{pmatrix}$$

$$d = \pm\sqrt{c(b-1)}$$

Головні значення цієї матриці при b =1 дорівнюють $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -c$ та $\lambda_3 = -a - 1$. Критична величина параметра для реалізації конвективного рішення визначається за формулою

$$b_c = a\frac{a+c+3}{a-c-1}$$

(якщо $a = 10$, $c = 8/3$, то $b\ c = 24{,}74$). При перевищенні цього значення граничний цикл конвективного руху стає нестійким та динаміка системи перетворюється на хаотичний режим .

Виникнення осередків Бенара при досягненні критичного значення температурного градієнта демонструє явище самоорганізації в дисипативной системі. Теплова енергія, що вноситься у систему ззовні, витрачається на створення конвективних потоків у строго певних просторових областях, що зумовлює, скажімо, виникнення шестигранних структур. Геометрична форма осередків взагалі кажучи, залежить від граничних умов, вона може бути наприклад, квадратною або трикутною.
При нагріванні не тільки дна, а й бічних стінок судини, відбувається перехід шестигранників у страйп-структури (лабіринти) з подальшим перетворенням їх у спіралі (рисунок 13.7). Таким чином, пориста структура

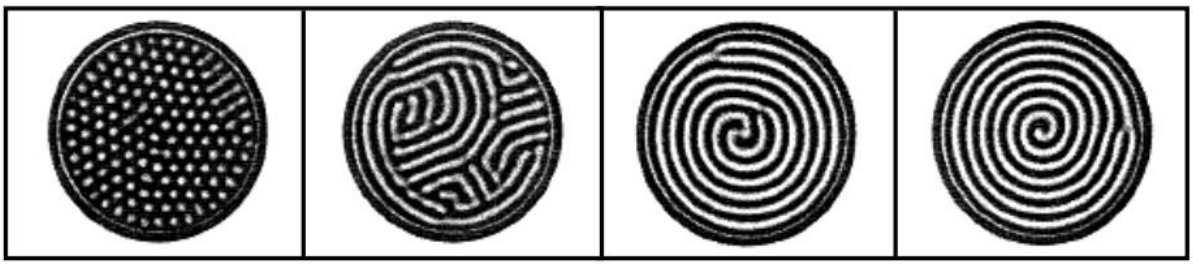


Рисунок 13.7 - Стадії перетворення коміркiв Релея-Бенара на спіраль

стає нестійкою при нагріванні бічних стінок і заміщується стійкішим спіралеподібним утворенням.

13.2 Брюсселятор (модель Пригожина-Лефевра)

Як інший приклад виникнення впорядкованої структури при протіканні незворотних процесів розглянемо хімічну реакцію Білоусова Жаботинського. Ця реакція є нетривіальним представником автоколивальних процесів. У процесі реакції відбувається окислення малонової кислоти при взаємодії з оксидом брому в присутності каталізатора, в якості якого виступають іони церію. Протікання реакції супроводжується поширенням спіральних хвиль, пофарбованих у блакитний та червоний кольори (рисунок 13.8).

Рисунок 13.8 - Спіральні хвилі періодичної хімічної реакції

На теперішній час запропоновані різні моделі цієї реакції (моделі Жаботинського, Філда, “орегонатор” Кереса-Нойєса та інш.), але жодна теоретична побудова не відображає всіх деталей періодичних хімічних реакцій. Наведемо кілька рецептів для приготування розчинів, у яких спостерігаються хімічні автохвильові процеси, що розповсюджуються зі швидкістю близько 1мм/хв:

1). Розчини: $KBrO_3$ (0,2 моль/л); малонова кислота (0,3 моль/л); фероїн (0,003 моль/л); H_2SO_4 (0,3 моль/л). Розчини наливають у прозору кювету шарами і для спостереження реакції ставлять її на білий аркуш паперу.

2). Розчини: лимонна кислота (40 г 160 мл H_2O); H_2SO_4 (1:3); $KBrO_3$ (16 г); Ce_2 ( ) SO_4 3 (3-3,5 г). Розчин лимонної кислоти підігрівають до температури 40 ° -50 ° С, висипають в нього $KBrO_3$, кювета ставиться на білий лист паперу і в розчин додають Ce_2 ( ) SO_4 3 і H_2SO_4 (від 2 до 4 мл).

3). Розчини: H_2O_2 (50 мл 30% перекису водню); KIO3 (7,2 г на 50 мл води); $HClO_4$ (30 мл розведеного розчину); малонова кислота (3 г на 50 мл води). Доданки: $MnSO_4$ (1 г) та трохи крохмалю. Всі розчини зливають в одну склянку (200-250 мл) .

Хімічні хвилі відрізняються від звичайних хвиль тим, що при зіткненні вони гасять одна одну, тобто, не спостерігається явища інтерференції. Пригожин довів, що концентраційні коливання не можуть виникнути поблизу стаціонарного стану відкритої дисипативної системи, якщо вона знаходиться в малому околі термодинамічної рівноваги. Отже, автоколивання в хімічній системі можливі тільки в тому випадку, коли система знаходиться достатньо далеко від стану термодинамічної рівноваги. Механізм реакції Білоусова-Жаботинського досі вивчається у багатьох наукових лабораторіях, оскільки вона містить близько десяти проміжних продуктів реакції. Найбільш проста модель гіпотетичної, автохвильової, хімічної реакції була запропонована І. Пригожиним та

Р. Лефевром і отримала назву брюсселятора. Реакція складається з послідовного ряду хімічних перетворень із константами швидкостей реакцій k_i:

$$A \xrightarrow{k_1} X; \quad B + X \xrightarrow{k_2} Y + D \quad ,$$

$$2X + Y \xrightarrow{k_3} 3X \quad ,$$

$$X \xrightarrow{k_4} E$$

При розгляді цієї реакції вважається, що речовини *A* і *B* знаходяться в розчині у надлишку, а продукти *D* і *E* не вступають у реакцію з іншими складовими хімічної системи. Кінетичні рівняння, що описують зміни речовин *X* і *Y* (у рівняннях цими ж літерами позначені їх концентрації) з часом мають вигляд:

$$\begin{cases} \dot{X} = k_1 A - k_2 BX + k_3 X^2 Y - k_4 X \\ \dot{Y} = k_2 BX - k_3 X^2 Y \end{cases} \qquad (13.2)$$

З першого рівняння виписаної системи випливає, що швидкість зміни концентрацій проміжних речовин *X* і *Y* залежить від їх концентрації у розчині, тобто, реакція носить автокаталітичний характер. Переходячи до безрозмірних величин

$$\tau = k_4 t \,, \quad x = \sqrt{k_3 / k_4}\, X > 0 \quad \text{і} \quad y = \sqrt{k_3 / k_4}\, Y > 0$$

напишемо систему рівнянь (13.2) у формі, яка містить мінімальну кількість керуючих параметрів:

$$\begin{cases} \dot{x} = a - (b+1)x + x^2 y \\ \dot{y} = bx - x^2 y \end{cases}$$

$$a = \sqrt{k_1^2 k_3 / k_4^3}\, A > 0 \quad \text{і} \quad b = (k_2 / k_4) B > 0$$

Стан рівноваги (стаціонарний перебіг хімічної реакції) визначається рівностями $x_0 = a$ $y_0 = b/a$. При малому збуренні стаціонарного стану концентрації речовин рівні $x = a + \xi(t)$ та $y = b / a + \eta(t)$ ($\xi(t) << a$ та $\eta(t) << b / a$), а зміни концентрацій речовин згідно з (13.3) задовольняють системі рівнянь

$$\begin{cases} \dot{\xi} = (b-1)\xi + a^2 \eta \\ \dot{\eta} = -b\xi - a^2 \eta \end{cases} \qquad (13.3)$$

Розв'язання системи лінійних диференціальних рівнянь першого порядку будемо шукати у вигляді $\xi(t) = \xi_0 exp(\ pt)$ і $\eta(t) = \eta_0 exp(\ pt\ )$. Тоді характеристичне рівняння системи (13.4) має вигляд $p_2 + (\ -\ b\ +\ 1 +\ a_2\ )p\ +\ a_2 = 0$. Обернення на нуль коефіцієнта при р визначає структурну стійкість полінома, що стоїть у лівій частині рівняння. Отже, при критичному значенні керуючого параметра

$$b_c = 1 + a^2$$

стан рівноваги стає нестійким і відбувається самозбудження авто-коливального процесу, що призводить до утворення спіральних хвиль і "вихорів". Поведінку хімічної системи в нелінійному випадку, який описується системою рівнянь (13.3), можна вивчити за допомогою чисельного моделювання. Комп'ютерний аналіз показує, що при значеннях параметра $b > b_c$ стаціонарний режим стає нестійким: на фазовій площині утворюється граничний цикл, на який накручуються фазові траєкторії (рисунок13.9).

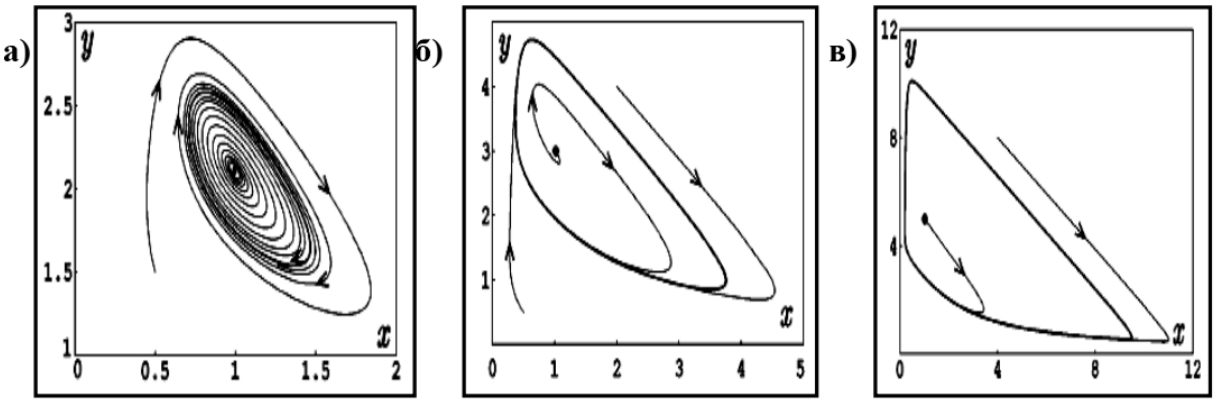


Рисунок 13.9 - Фазовий портрет брюсселятора при значеннях параметрів $a = 1$ і
а) $b = 2{,}1$; б) $b = 3{,}0$; в) $b = 5{,}0$

Це свідчить про виникнення автоколивань із частотою а. При значеннях параметра b , що не на багато перевищують його критичне значення, коливання носять квазігармонічний характер, а за значного перевищення – релаксаційний. Коливання концентрацій речовин лежать в основі більшості біологічних процесів та структур: механізму тимчасової організації біологічних систем; органів, що забезпечують переміщення; під час роботи збудливих елементів (наприклад, нервової системи); у чутливості біорганізму до лікарських засобів та потреби у розмноженні протягом доби. Зростання кількості різноманітних хімічних реакцій, які у системі, призводить до еволюції у бік створення ієрархічних структур. Вони виконують, як стандартні, так і специфічні функції. Наприклад, клітинні мембрани виконують сортування хімічних сполук, пропускаючи всередину клітини одні та затримуючи інші речовини. Ієрархію біохімічних систем можна провести за кількістю елементів, що беруть

участь у їхній життєдіяльності: чим давнє елемент, тим в більшій кількості хімічних реакцій він бере участь. При побудові моделі брюсселятора була висунута гіпотеза про незмінність вмісту речовин А та В у хімічній системі. Насправді їх концентрації можна зберігати незмінними лише тоді, коли вони поставляються в систему із зовнішнього середовища. Таким чином, в моделі Пригожина-Лефевра у систему вноситься речовина, а в моделі Лоренца – енергія. Це говорить про те, що самоорганізація можлива лише у відкритих та нерівноважних (нестаціонарних) системах, які обмінюються з оточенням енергією, речовиною, інформацією . При "народженні" упорядкованих структур макроскопічні процеси протікають за самоузгодженим (когерентним, кооперативним, подібним) "сценарієм". Для обох синергетичних систем існує критичне значення керуючого параметра, при якому відбувається уникнення стаціонарного (рівноважного) стану з протіканням незворотних процесів та зміною структури системи. З математичної точки зору ці явища виникають з урахуванням нелінійності у керуючих рівняннях процесів, які досліджуються.

13.3 Хижак-жертва (модель Лотки-Вольтерра)

Самоорганізація виникає не тільки на фізичному або фізико-хімічному рівнях існування матерії, а й наприклад, на біологічному. Як приклад розглянемо модель Лотки - Вольтерра , яка визначає взаємодію популяцій хижаків і жертв. Нехай деяка біологічна популяція налічує у час t число осіб , яке дорівнює *X(t)*. Позначимо через k_1 коефіцієнт сприяння збільшенню, а через k_2 – зменшенню чисельності популяції. Тоді швидкість зміни числа осіб визначається простим кінетичним рівнянням

$$\dot{X} = (k_1 - k_2) X$$

Якщо $k_1 > k_2$, то диференціальне рівняння має експоненційно зростаюче з часом рішення (мальтузіанське зростання), в іншому випадку ($k_1 < k_2$) – експоненційно швидке вимирання виду. За наявності іншого виду (хижака) з чисельністю *Y(t)*, що виживає за рахунок винищення особин першого виду (жертв), виникає взаємодія між популяціями. Її наявність є регулюючим чинником чисельності обох популяцій, що й визначає самоорганізацію біологічної системи. Боротьба за життя між хижаками і жертвами вважатимемо прямо пропорційною добутку особин обох популяцій, тобто. описувати виразом $k_3 X Y$. Тоді система рівнянь, що задають чисельність популяцій у момент часу t має вигляд

$$\begin{cases} \dot{X} = k_1 X - k_3 XY \\ \dot{Y} = k_3 XY - k_2 Y \end{cases} \qquad (13.4)$$

Система рівнянь (13.4) описує модель Лотки-Вольтерра. Стаціонарне рішення цієї системи (крім тривіального $X(t) = 0$ і $Y(t) = 0$) отримаємо, прирівнявши нулю праві частини рівностей: $X_0 = k2 / k3 = a$ і $Y_0 = k1 / k3 = b$. У випадку дуже малого відхилення системи від стаціонарного стану $X = a+\xi(t)$ і $Y = b+\eta(t)$ ($\xi(t) << a$ та $\eta(t) << b / a$) рівняння в (13.4) можна лінеаризувати та записати у вигляді

$$\begin{cases} \dot{\xi} = -k_2 \eta \\ \dot{\eta} = k_1 \xi \end{cases} \qquad (13.5)$$

Виключивши із (13.5) змінну $\eta(t)$, шляхом диференціювання за часом першого рівняння та підстановки швидкості $\eta(t)$ з другого рівняння, отримаємо добре відоме рівняння вільних коливань: $\ddot{\xi} + \omega_0 \xi = 0$ (частота власних коливань популяції жертв дорівнює $\omega_0 = k_1 k_2$). Фазові траєкторії у просторі $X(t)$ та $Y(t)$ є концентричними еліпсами поблизу стаціонарного стану, тому воно відповідає критерію стійкості. Чисельне моделювання системи рівнянь (13.5) приводить до фазових траєкторій, відображених на рисунку 13.10.

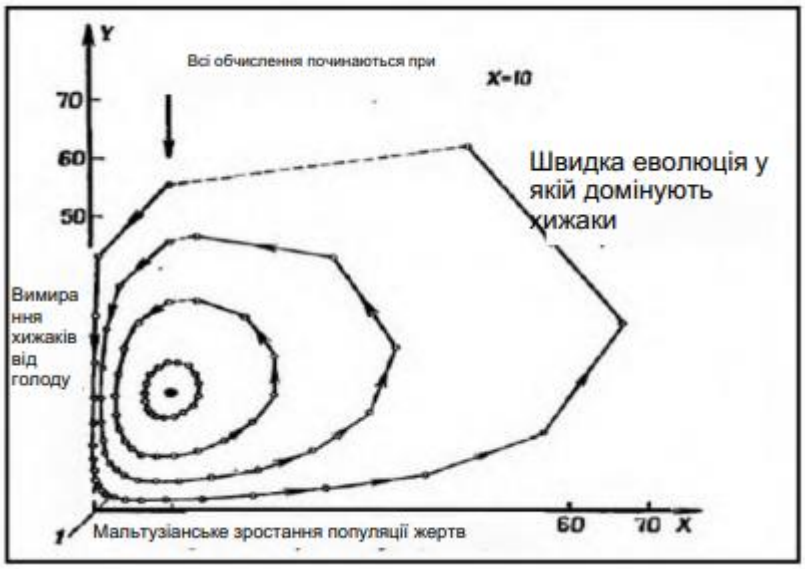


Рисунок 13.10 - Зміна чисельності популяцій хижаків та жертв

З рисунку 13.10 видно, що при малій кількості хижаків відбувається зростання популяції жертв за мальтузіанським законом. Значна кількість їжі, в якості жертв, викликає зростання чисельності хижаків, які різко скорочують поголів'я перших. При зниженні популяції останніх у хижаків спостерігається нестача їжі, що призводить до зниження їх популяції. Цей циклічний процес повторюється досить тривалий час (рисунок 13.11), поки не відбувається будь-яка з катастрофічних змін (наприклад, вимирання того чи іншого виду),

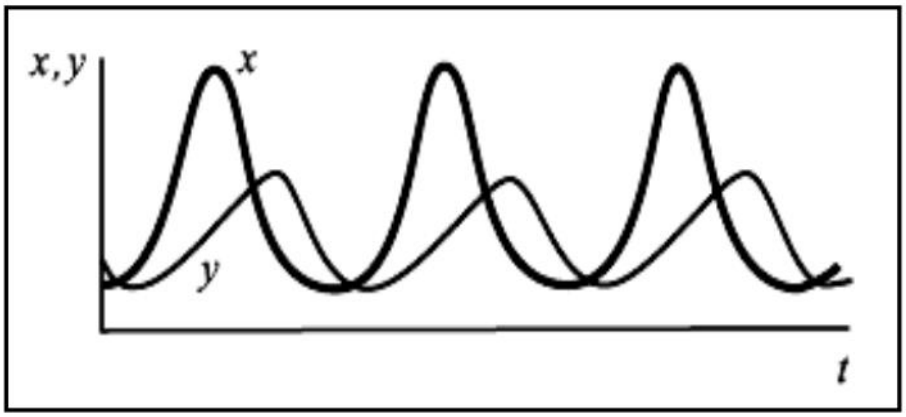


Рисунок 13.11 - Осциляції чисельності популяцій жертв (x) та хижаків (y)

що призводять до руйнування граничного циклу (атрактора). Відомі експериментальні дослідження взаємин популяцій рись-заєць параметризовані на рисунку 13.12.

Ніколіс, Пригожин та Мей довели структурну нестійкість рівняння Лотки-Вольтерра. Модель Лотки-Вольтерра тотожна осцилятору без

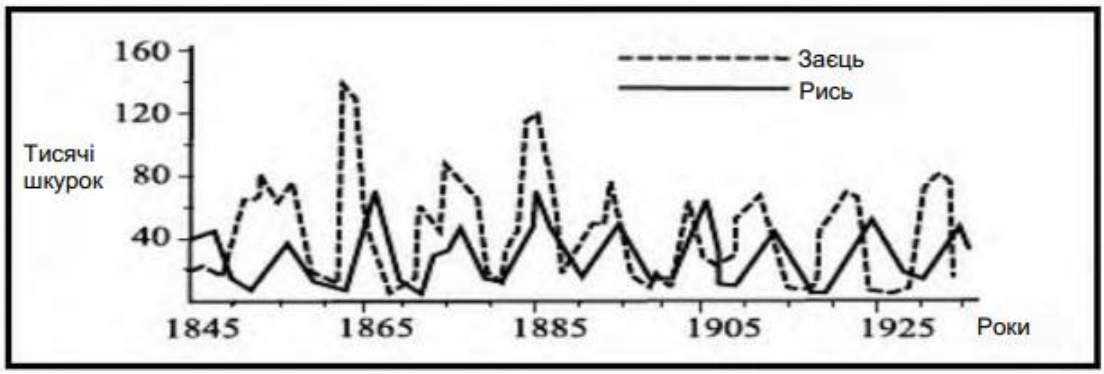


Рисунок 13.12 - Зміни числа осіб у біосистемі заєць -рись

загасання коливань. Введення в модель в'язкого опору, прямо пропорційного швидкості зміни чисельності популяції, призведе до зміни виду фазових траєкторій; до появи структурно стійких фокусів та граничних циклів та до когерентної поведінки компонентів біологічної системи. Внаслідок цих явищ з'явиться чітко визначений період коливань обох популяцій. У розглянутій моделі у неявному вигляді приймається припущення про наявність конкуренції між видами. Конкуренція є відображенням обмеженості енергетичних, матеріальних та інформаційних ресурсів, необхідних для забезпечення життєдіяльності біологічного організму. Результатом конкуренції є вимирання одних видів та поява більш пристосованих до нових умов мутантів. Поява мутантів пов'язана з тим, що перебіг біологічних процесів відбувається за різних граничних та початкових умов, що неминуче призводить до виникнення помилок при

відтворенні. Найбільш пристосовані до нових умов існування мутанти виживають (природний відбір) та починають породжувати собі подібних. Природний відбір проявляється у разі, коли чисельність популяції неспроможна перевищувати деякої критичної величини. Розуміння цього механізму призвело до створення штучного відбору (селекції). Прагнення виду до виживання призводить до відбору тих особин, які є більш життєздатними та плодючими, ніж їхні родичі. Таким чином, природний і штучний відбори перешкоджають хаотизації біосистеми (усувають подальше зростання накопичення помилок при простому або розширеному відтвореннях виду) і стабілізують зовнішні ознаки виду. Відкритість, нерівноважність, нелінійність, нестача різноманітних ресурсів, конкуренція, мутація, природний та штучний відбори при відтворенні, забезпечення безпеки існування виду визначають основу біологічної еволюції. У результаті еволюції з'явилися самоутворюючі, самоорганізуючі, самопідтримувані, самовідтворювані та самозберігаючі системи, яким притаманні, як властивості нижчих рівнів організації матерії, так і відмітні ознаки. Ці ознаки дозволяють умовно виділити фізичну, хімічну, біологічну та соціальну форми існування матерії. Дослідження цих рівнів призводить, як до розуміння схожості математичних моделей, так і до з'ясування ознак та відмінних рис, які і дозволяють встановити ієрархію динамічних систем, що еволюціонують та перебувають у далеких від рівноважного станах.

14 НЕЗВОРОТНІ ПРОЦЕСИ

14.1 Стаціонарний стан

Термодинаміка незворотних процесів встановлює властивості симетрії відкритих систем та їх стаціонарних станів; загальні закономірності перетворень та дисипації енергії; рівняння перебудови макроскопічних систем при ігнорування їх мікроскопічного устрою. Досліджувані системи можуть бути розділені на 3 типи: однорідні (інтенсивні характеристики системи температура T , тиск p і хімічний потенціал μ і компонента і та інші мають однакові значення у всіх точках системи); дискретні (складаються з кількох однорідних підсистем) і безперервні (термодинамічні функції стану є функціями просторово-часових координат, що диференціюються). Необоротні процеси поділяють за типом поля, яке використовується для їхнього опису: на скалярні (наприклад, хімічні реакції), векторні (дифузія, теплопровідність) та тензорні (гідродинамічні течії в'язких рідин). Термодинаміка незворотних процесів заснована на використанні гіпотези про локальну рівновагу, яка дозволяє використовувати всі встановлені взаємозв'язки рівноважної термодинаміки. Закони збереження маси, імпульсу, енергії та балансу ентропії записуються у вигляді локальних диференціальних рівнянь у часткових похідних.

Мірою хаосу, чи неповноти інформації про стан системи є ентропія . У термодинамічній теорії вона є функцією внутрішньої енергії U, об’єму V, які є інтенсивними величинами числа молей N і компонентів $i = 1 \div m$, тобто. $S = S(U, V, N\ i)$. Ентропія описується однорідною функцією числа молей компонентів і має такі властивості:

– адитивність (при поділі системи на дві підсистеми з ентропія ми S_1 та S_2 ентропія системи $S = S_1 + S_2$);

- зміна ентропії відкритої системи визначається змінами її аргументів

$$T\,dS = dU + p\,dV + \sum_{i=1}^{m} \mu_i N_i$$

- зміну ентропії можна представити сумою змін ентропії за рахунок внутрішнього перерозподілу компонентів $(diS$) та взаємодії з навколишнім середовищем deS ;

– внутрішня ентропія не змінюється ($diS = 0$) для оборотних, або зростає ($diS > 0$) для незворотних процесів (II закон термодинаміки).

Для ізольованих систем, які не обмінюються речовиною та енергією із зовнішнім середовищем, $deS = 0$ та $diS \geq 0$. Стан термодинамічної рівноваги відповідає максимальне значення внутрішньої ентропії diS, тобто найнижчому рівню організації матерії відповідає найбільша

невпорядкованість та мінімальна інформативність. У зв'язку з цим опис цього рівня організації матерії може проводитися тільки в термінах імовірнісних функцій (наприклад, квантова механіка або блукання броунівської частинки). У відкритих системах, які обмінюються із зовнішнім середовищем речовиною, енергією та інформацією (дисипативна система, рисунок 14.1), спостерігаються процеси самоорганізації та самоупорядкування, тому вони характеризуються низькою внутрішньою ентропією *diS* та високою інформативністю. Це говорить про нерівноважність процесів, що протікають у дисипативних системах. Нерівноважні умови взаємодії відкритої системи із довкіллям характеризуються виробництвом ентропії (або швидкістю виникнення ентропії*) d iS/d t* в одиницю часу t (Пригожин). Крім того, на екстенсивні характеристики дисипативної системи накладається низка обмежень:

1) збереження внутрішньої енергії *di U = 0* , та ентропії відкритої системи (I закон термодинаміки);

2) число молей Nk компонента k (згідно із законом Гульдберга-Вааге) змінюється лише за рахунок перебігу хімічних реакцій

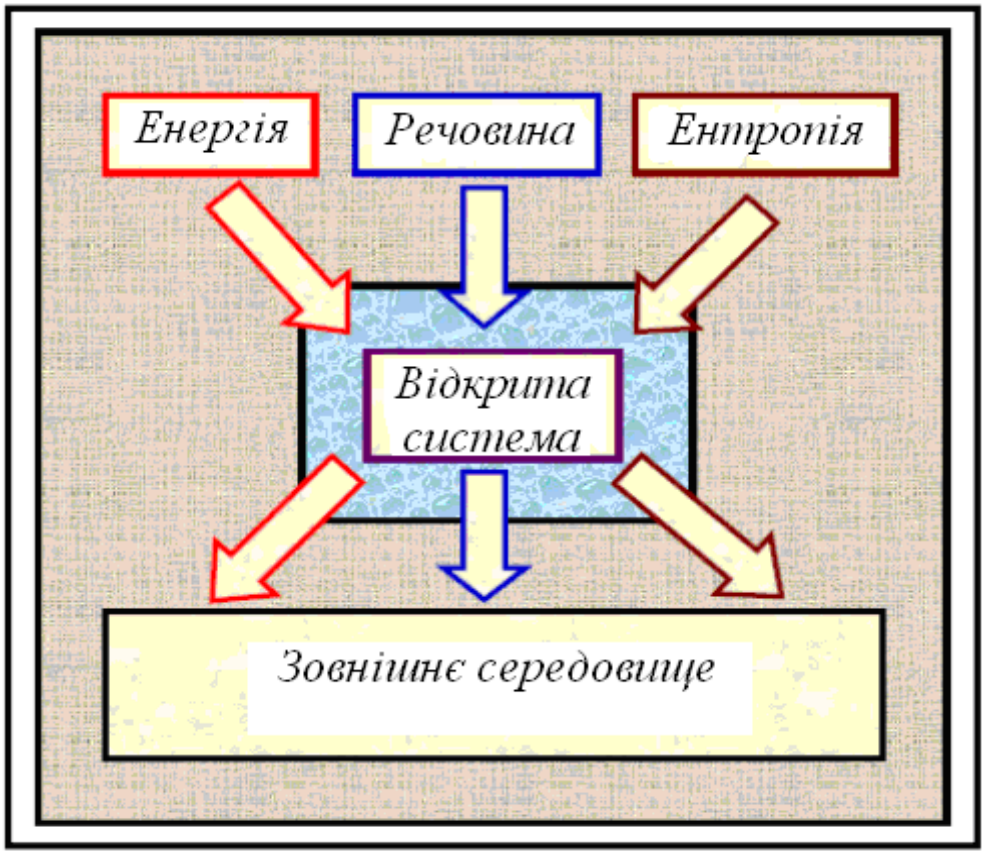


Рисунок 14.1 - Обмін енергією, речовиною та ентропією відкритої системи з довкіллям

$$d_i N_k = \sum_{r=1}^{R} \nu_{kr} d\xi_r$$

де $\nu_{k\,r}$ – стехіометричний коефіцієнт компонента k у хімічній реакції r, ξ_r – повнота перебігу реакції за Де Дондером;

3) внутрішня ентропія стала, або зростає $diS \geq 0$.

У відкритій системі перераховані величини можуть збільшуватися та зменшуватися, не порушуючи законів термодинаміки. Зміна ентропії дисипативної системи відбувається внаслідок її взаємодії із зовнішнім середовищем. Якщо ентропія $d\ eS$, що вноситься, негативна (негентропія або інформація), то виникає тенденція до впорядкування; несподівана самоорганізація відбувається при критичних значеннях керуючих параметрів. Якщо сума $diS + deS = 0$, то система перебуває у стаціонарному стані. Стаціонарний стан системи визначається співвідношеннями

$$d_e U = 0;\ d_e N_k = -d_i N_k = -\sum_{r=1}^{R} \nu_{kr} d\xi_r;\ d_e S = -d_i S < 0$$

як стан з постійним приростом негентропії та речовини при збереженні приросту та відтоку енергії. Зміна внутрішньої ентропії завжди позитивна ($diS > 0$), отже, енергетичні процеси в системі відбуваються у бік зменшення розсіювання (дисипації) енергії. Зміна внутрішньої енергії системи при постійному введенні в систему зовнішньої енергії вказує на узгоджену реакцію компонентів на вплив зовнішнього середовища, що отримало назву когерентної (узгодженої) поведінки елементів системи (прикладом когерентної поведінки може бути виникнення лазерного випромінювання (Хакен)).Для закритої системи залежність від параметрів системи ентропії та виробництва ентропії $P = d_iS/d_t$ показані на рисунку 14.2.

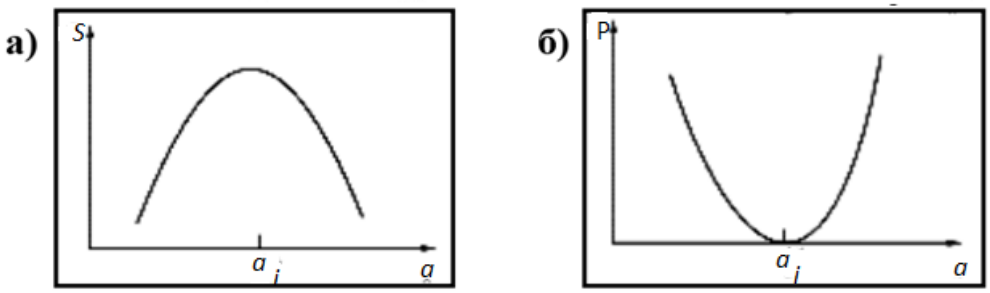


Рисунок 14.2 - Ентропія (а) та її виробництво (б) як функції параметрів системи

Крім виробництва ентропії в термодинаміці незворотних процесів використовують функцію дисипації $\Psi = T\ d\ S\ /\ d\ t \geq 0.3$. На рисунку 14.2б видно, що в рівноважній точці виробництво ентропії дорівнює нулю, а

поблизу цієї точки зображується увігнутою кривою. Таким чином, ізольована система еволюціонує доти, доки виробництво ентропії не стане рівним нулю. Протікаючі після цього в системі процеси компенсують будь-яку стохастичну спробу виходу із рівноважного стану внаслідок флуктуацій параметрів системи. Відкрита система знаходиться в околі рівноважного стану тільки при виконанні співвідношення Дюгема-Гіббса:

$$-V\,dP + S\,dT + \sum_{i=0}^{m} N_i\,d\mu_i = 0$$

Термодинамічна рівновага системи визначається дією на систему узагальнених скалярних сил

$$f_1 = 1/\theta; \quad f_2 = P/\theta; \quad f_3 = -\mu/\theta$$

за допомогою яких вираз для безрозмірної однокомпонентної ентропії системи можна записати у вигляді

$$dS = (1/\theta)\,dU + (P/\theta)\,dV + (-\mu/\theta)\,dN = f_1\,dq_1 + f_2\,dq_2 + f_3\,dq_3 \quad ,$$

де $q_1 = U$, $q_2 = V$, $q_3 = N$ - узагальнені термодинамічні координати. Вводячи вектор термодинамічної сили $f = (f_1, f_2, f_3)$ та вектор стану $q = (q_1, q_2, q_3)$, запишемо ентропію ізольованої системи як $S = f \cdot q$. Ця формула дозволяє інтерпретувати ентропію як узагальнену "роботу" термодинамічних сил. При нескінченно малому зміщенні ізольованої системи із положення термодинамічної рівноваги зміна ентропії $dS = f \cdot dq$, при цьому виконується рівняння

$$\bar{q} \cdot d\bar{f} = U df_1 + V df_2 + N df_3 = 0$$

Що, як неважко переконатися, перетворюється на рівняння Дюгема-Гіббса. Це рівняння показує, що нескінченно мала зміна однієї з термодинамічних сил компенсується змінами двох інших сил. Таким чином, відхилення термодинамічної системи від положення рівноваги характеризується зміною вектору її стану, яка пов'язана з нескінченно малими змінами. узагальнених термодинамічних координат: внутрішньої енергії, об'єму системи та числа частинок.

У хімічно активній системі навіть після досягнення механічної, теплової та дифузійної рівноваг можуть відбуватися зміни чисел молей N і компонентів через перебіг хімічних реакцій. Виробництво ентропії для цього випадку дорівнює

$$P = \frac{d_i S}{dt} = -\frac{1}{T}\sum_{k=1}^{m} \mu_k \frac{d_i N_k}{dt} = -\frac{1}{T}\sum_{k=1}^{m}\sum_{r=1}^{R} \mu_k \nu_{kr} \frac{d\xi_r}{dt} = -\frac{1}{T}\sum_{r=1}^{R} \mathrm{A}_r \frac{d\xi_r}{dt}$$

(A_r - спорідненість хімічної реакції r), або після введення термодинамічної сили

$$f_r = -\frac{\mathrm{A}_r}{T}$$

та швидкості протікання хімічної реакції r, що дорівнює

$$\dot{q}_r = \frac{1}{V}\frac{d\xi_r}{dt}$$

можна, переписати виробництво ентропії в одиниці об'єму у вигляді

$$\Pi = \sum_{r=1}^{R} f_r \dot{q}_r$$

У відкритій термодинамічній системі зовнішні сили перешкоджають досягненню рівноважного стану, тому хімічні реакції є загальмованими. Це може призводити до існування хімічних сполук, які не спостерігаються за рівноважних умов. Отже, стаціонарний стан дисипативної системи характеризується нульовою швидкістю виробництва ентропії, розсіюванням енергії та загальмованістю хімічних реакцій. І. Пригожин показав, що $d\,P = 0$ та $P = min$ відповідає рівновазі, $a\ d\,P < 0$ – еволюції системи. Цей результат отримав назву теореми Пригожина. Теорема Пригожина справедлива у малому околі стаціонарного стану, в якому справедлива лінійна теорія нерівноважних процесів Онсагера. У малому околі стаціонарного стану незворотні процеси протікають таким чином, щоб повернути систему у цей стан. У лінійній області всі відхилення стійкі, у ній неможливі коливальні рухи, система просто "звалюється" в стаціонарний стан. У нелінійних системах виробництво ентропії може бути і не мінімальним, воно може приймати, як позитивне так негативне значення. Флуктуації термодинамічних сил, що порушують умови Дюгема-Гіббса $q \cdot df = 0$, призводить до відхилення дисипативної системи в будь-який бік від стаціонарного стану. Якщо новий стан лежить "вище" стаціонарного стану, то система прагне повернутися у вихідне становище. Інакше система намагається уникнути стаціонарного стану у пошуках більш стійкого розподілу компонентів та енергетичних умов. Стійкість стаціонарного стану спостерігається лише за руху в "гірку", інакше малі збурення руйнують стійкість. Виникнення та стійкість стаціонарного стану визначається

- великими відхиленнями від рівноваги;
- постійним припливом до системи негентропії;
- зростанням внутрішньої ентропії при незворотних процесах;
- нелінійністю рівнянь руху;
– кооперативною (когерентною) поведінкою елементів системи;
– нестійкістю по відношенню до певних типів збурень;
- посиленням нестійкості при пошуку нового стаціонарного стану;
–відбором стійких станів та виникненням спонтанної самоорганізації;
– стійкістю дисипативних структур при збереженні зовнішніх умов;
- загальмованістю хімічних реакцій.

14.2 Модель Онсагера

Дія термодинамічних сил на дисипативну систему спричиняє появу потоків відповідних координат стану. Зв'язок виробництва ентропії з потоками та силами для випадку хімічної системи, який було отримано

$$\Pi = \sum_{r=1}^{R} f_r \, \dot{q}_r \quad ,$$

був узагальнений на випадок дії термодинамічних сил із врахуванням швидкості довільної природи. При малому відхиленні від стаціонарного стану Онсагер припустив лінійний зв'язок між потоками екстенсивних величин швидкістю та градієнтами термодинамічних сил

$$J_i = q_i \vec{v}_i \quad ,$$

$$X_k = -\nabla f_k \quad ,$$

$$J_i = \sum_{k=1}^{K} L_{ik} X_k$$

де феноменологічні коефіцієнти L_{ik} не залежать ні від потоків, ні від градієнтів термодинамічних сил. Мікроскопічний розгляд незворотних процесів дозволив встановити, що існує зв'язок

$$L_{ik} \sim \int_0^{\infty} \left\langle \bar{u}_i(t) \bar{u}_k(t-\tau) \right\rangle d\tau$$

Тут кутові дужки означають усереднення добутку швидкостей частинок різних типів по локально рівноважному ансамблю. Отже, кінетичні коефіцієнти Онсагера враховують кореляцію в станах руху частинок різних сортів. Онсагер показав, що для скалярних нерівноважних процесів в адіабатично ізольованих системах виконуються співвідношення взаємності $L_{ik} = L_{ki}$ (Казимир встановив, що за наявності вихорів або магнітних полів співвідношення взаємності набувають вигляду $L_{ik} = -L_{ki}$). Врахування просторової симетрії призводить до того, що термодинамічні сили викликають потоки лише власної природи, тобто, коефіцієнти Онсагера задовольняють умові $L_{ik} = Li\delta_{ik}$ (принцип Кюрі), де

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 1, & i = k \\ 0, & i \neq k \end{cases}$$

– символ Кронекера (у системах Кюрі відсутні перехресні ефекти. Запропонований Онсагером зв'язок між потоками та градієнтами термодинамічних сил зустрічається досить часто при дослідженні теплопровідності, дифузії, перехресних ефектів (наприклад,

термодифузійні ефекти Соре та Дюфура, термоелектричні процеси і т.п.) та інших незворотних процесів. Експериментально встановлено, що межі застосування лінійної теорії Онсагера для більшості досліджених необоротних процесів досить широкі. Винятком є хімічна кінетика, на яку модель Онсагера може розповсюджуватися лише за дуже малих відхиленнях від рівноважного стану. Модель Онсагера застосовується разом із локальними рівняннями балансу екстенсивних величин виду

$$\frac{\partial q_i}{\partial t} + div J_i = \sigma_i$$

де σ_i описує наявність внутрішніх та зовнішніх джерел ($\sigma_i > 0$) та стоків ($\sigma_i < 0$) для екстенсивної змінної q_i. Якщо для дисипативної системі відсутні джерела і стоки ($\sigma_i = 0$), то рівняння балансу екстенсивної змінної q_i відображає закон її локального збереження. Інакше кажучи, у разі, коли $\sigma_i = 0$, незворотні процеси протікають у вибраній точці системи а екстенсивні змінні мають постійне значення (локальна рівновага). У силу того, що дисипативні системи обмінюються із зовнішнім оточенням речовиною, енергією та ентропією (інформацією), то локальна рівновага є ситуацією, коли потужність зовнішніх джерел (стоків) компенсується внутрішніми процесами локального виникнення (знищення). До таких процесів відносяться механічні течії речовини, теплопровідність, дифузія, хімічні реакції та їх поєднання (перехресні ефекти). У нерівноважних умовах на складові m-компонентної системи діють внутрішні та зовнішні термодинамічні сили різної фізико-хімічної природи. Внутрішні термодинамічні сили: теплова

$$\bar{X}_q = \nabla(1/T)$$

та електрохімічні

$$\bar{X}_i = -\nabla\left(\tilde{\mu}_i / \theta\right), \quad i = 0 \div m \quad (\tilde{\mu}_i = \mu_i - q_i \varphi_i)$$

- електрохімічний та хімічний потенціали компонента і відповідно; q_i та ϕ_i – заряд та електричний потенціал частинок сорту i , θ – температура в енергетичних одиницях, та механічні сили

$$\bar{X}_i^p = -\omega_i \nabla\left(\psi / \theta\right) \quad (\psi(\bar{r}))$$

де $\psi(\bar{r})$ – функція, пов'язана з тиском у системі, і – парціальний об'єм. Градієнти термодинамічних сил викликають відповідні потоки, що виникають при незворотних процесах:

$$\bar{J}_q - \sum_{i=0}^{m}\left(\tilde{\mu}_i \bar{J}_i + \omega_i \psi \bar{J}_i^p\right) = L_{qq}\bar{X}_q + \sum_{i=0}^{m} L_{qi}\bar{X}_i + \sum_{i=0}^{m} L_{qi}^p \bar{X}_i^p \ ,$$

$$\bar{J}_k = L_{kq}\bar{X}_q + \sum_{i=0}^{m} L_{ki}\bar{X}_i + \sum_{i=0}^{m} L_{ki}^p \bar{X}_i^p \ , \qquad (14.1)$$

$$\bar{J}_j^p = L_{jq}^p \bar{X}_q + \sum_{i=0}^{m} L_{ji}^p \bar{X}_i + \sum_{i=0}^{m} L_{ji}^p \bar{X}_i^p$$

У формулі (14.1) з теплового потоку J_q віднято потоки електрохімічного тепла та потоку тепла, пов'язаного з перенесенням механічної енергії та обумовленого неоднорідним тиском у нерівноважній системі. Зокрема, рушійна сила дифузії дорівнює

$$\bar{X}_j = -\nabla\left(\mu_j / \theta\right)$$

(∇ – оператор градієнта). Область простору, де відбувається дифузійна еволюція системи називають дифузійною зоною. Для ідеального газу хімічний потенціал дорівнює

$$\mu = \mu_{st}\left(P,T\right) + \theta \ln\left(n / n_{st}\right)$$

тут $\mu_{st}\ (P,T\ )$ – стандартне значення при зовнішньому тиску P, температурі T і щільності n_{st} , n - щільність газу. Тоді дифузійний потік по теорії Онсагера дорівнює

$$\bar{J} = -L\nabla\left(\mu/\theta\right) = -L\left(\nabla n / n\right)$$

Порівнюючи отримане співвідношення з першим законом Фіка

$$\bar{J} = -D\nabla n$$

де D - коефіцієнт дифузії), встановимо зв'язок кінетичного коефіцієнта L з коефіцієнтом самодифузії $D : L = D\,n$. Одним із цікавих дифузійних явищ є “висхідна” дифузія. При реалізації цього процесу атоми дифундують не в бік менших концентрацій (як це має відбуватися за законами Фіка), а в області з підвищеною концентрацією атомів того ж сорту. Такі явища спостерігаються при розпаді твердих розчинів, коли виділяється фаза з підвищеною концентрацією атомів певного типу, й у неоднорідному полі пружних напруг, що виникає при зародку -утворенні. Це явно вказує на те, що рушійною силою дифузії є не градієнт концентрації, а градієнт відношення хімічного потенціалу компонента до його теплової енергії k T θ = Б. У дифузійній зоні спостерігається пластичний перебіг речовини у місці контакту двох різнорідних матеріалів із загальним компонентом (ефект Кіркендалла-Смігельскаса) та утворення (заліковування) макроскопічних пір (ефекти Френкеля I та II роду).

При протіканні незворотних процесів спостерігаються перехресні ефекти, пов'язані з виникненням потоків під дією градієнтів термодинамічних сил іншої фізико-хімічної природи:

-виникнення теплового потоку під впливом дифузного переміщення частинок в ізотермічних умовах (ефект Дюфура). Розглянемо вертикальну трубку, розділену на 2 рівні частини діафрагмою. У кожній половині трубки знаходяться гази, що відрізняються молекулярною вагою. Обидві частини трубки мають однакові температуру та тиск. Після зняття діафрагми відбувається дифузійне перемішування газів, причому змінюється температура межі розділу газів. Зміна температури обумовлена наявністю градієнта концентрації. Тепловий потік, що виникає,

встановлює рівномірний розподіл температури у всій трубці. При цьому температура газу, що породжує тепловий потік, знижується, а іншого газу, що поглинає тепло, зростає. За відсутності інших незворотних процесів, це породжує:

1) тепловий потік

$$\bar{J}_q = -\sum_{i=0}^{m} L_{qi} \nabla\left(\frac{\mu_i}{T}\right) = -\sum_{i,j=0}^{m} \frac{L_{qi}}{T} \frac{\partial \mu_i}{\partial x_j} \nabla x_j = -\sum_{i,j=0}^{m} D_{qi}\, g_{ij}\, \nabla x_j \quad ,$$

де $D_{qi} = L_{qi}$ коефіцієнт термодифузії,

$g_{ij} = \frac{1}{T} \frac{\sigma \mu_i}{\partial x_j}$ - термодинамічні фактори компонентів;

2) виникнення дифузії компонентів під впливом неоднорідного розподілу температури у системі (ефект Соре). За наявності градієнта температури термодифузія компонентів компенсується звичайною дифузією частинок, яка призводить до неоднорідного розподілу компонентів у системі. Цей ефект використовується для поділу суміші ізотопів. У цьому випадку дифузійний потік компонента I складає :

$$\bar{J}_i = L_{iq} X_q = -\frac{L_{iq}}{T^2} \nabla T = -\frac{L_{iq}}{L_{qq}} \frac{L_{qq}}{T^2} \nabla T = -\xi_i \text{æ} \nabla T$$

$$\xi_i = D_{qi} (\text{æ} T^2)^{-1}$$

æ – коефіцієнт теплопровідності;

3) термоелектричні ефекти пов'язані або з появою електричного струму під впливом градієнта температури, або з виникненням градієнта температури під час пропускання через систему електричного струму. Для системи, компоненти якої переносять електричний заряд, потік компонента з дифузійної J_i^D та струмової J_i^T/qi частин

$$\bar{J}_i = \bar{J}_i^D + (\bar{J}_i^T / q_i)$$

є причиною відомого ефекту Зеєбека: у місці контакту двох різних провідників, що мають різні температури, виникає електрорушійна сила (е.р.с.). Виникнення е.р.с. в ефекті Зеєбека призводить до появи електричного струму, обумовленого градієнтом температури

$$\bar{J}_i^T = \sum_{i=0}^{m} L_{iq}\, q_i\, \bar{X}_q = -\sum_{i=0}^{m} \frac{L_{iq}\, q_i}{T^2} \nabla T = -\frac{\sum_{i=0}^{m} L_{iq}\, q_i}{L_{qq}}\ \text{æ} \nabla T = -\Omega\ \text{æ} \nabla T \quad ,$$

а також, ефекту Пельтьє: у термічно однорідній системі, складеній із різних провідників, пропускання електричного струму призводить до поглинання (виділення) тепла на стику провідників. Тепловий потік, що виникає в ефекті Пельтьє, при пропусканні струму через систему різнорідних провідників дорівнює

$$\bar{J}_q = -\sum_{i=0}^{m} \frac{L_{qi}\, q_i}{T} \nabla \varphi_i = \sum_{i=0}^{m} \frac{L_{qi}\, q_i}{T} \bar{E}_i = -\Lambda \sigma \bar{E}$$

$$\Lambda \sigma = -\sum_{i=0}^{m} \frac{L_{qi}\, q_i}{T} \frac{\left(\bar{E}_i \cdot \bar{E}\right)}{\left|\bar{E}\right|^2} \quad ,$$

де σ – коефіцієнт електропровідності.

Ефекту Томсона: пропускання струму через термічно неоднорідну систему призводить до виділення додаткового тепла, відмінного від джоулевого тепла. Для фізичного пояснення ефекту Томсона розглянемо тепловий потік, зумовлений електрохімічним потенціалом

$$\sum_{i=0}^{m} \tilde{\mu}_i \bar{J}_i = \sum_{i=0}^{m} \left(\mu_i + q_i \varphi_i\right) \left(\bar{J}_i^D + \frac{\bar{J}_i^T}{q_i} \right) = \sum_{i=0}^{m} \mu_i \bar{J}_i^D + \sum_{i=0}^{m} \mu_i \frac{\bar{J}_i^T}{q_i} + \sum_{i=0}^{m} q_i \varphi_i \bar{J}_i^D + \sum_{i=0}^{m} \varphi_i \bar{J}_i^T$$

У цьому рівні перша сума описує потік теплоти змішування компонентів, остання сума – джоулеве тепло, друга та третя суми описують перехресні теплові потоки, що виникають при одночасному перебігу дифузії та електричного струму. Теплота Томсона визначається виділенням (поглинанням) теплоти змішування компонентів та перехресними тепловими потоками.

Лінійна теорія Онсагера дозволяє досліджувати низку нових перехресних ефектів, що протікають у нерівноважних системах. Особливий інтерес викликають явища, пов'язані з барометричними процесами:

а) виникнення теплового градієнта у системі з неоднорідним тиском (механокалоричний ефект). У цьому випадку тепловий потік дорівнює

$$\bar{J}_q = -\sum_{i=0}^{m} L_{qi}\, \omega_i \nabla \left(\frac{\psi}{T} \right) = -\sum_{i,j=0}^{m} \frac{L_{qi}\, \omega_i}{T} \frac{\partial \psi}{\partial P} \nabla P = -\gamma \nabla P \quad ,$$

де γ -механокалорічний коефіцієнт. Ця рівність дозволяє встановити зв'язок коефіцієнта теплопровідності з механокалоричним коефіцієнтом і коефіцієнтом тиску

$$æ = \gamma P \beta_V$$

б) виникнення градієнта тиску в термічно неоднорідній системі (термоосмос). У цьому випадку механічний потік дорівнює

$$\bar{J}_j^p = L_{jq}^p \bar{X}_q = -\varsigma_j æ \nabla T$$

ς_j – термобаричний коефіцієнт компонента *j*.

в) якщо система знаходиться в гравітаційному полі, то перерозподіл частинок за висотою системи забезпечується силою тяжкості та дифузією частинок.

З боку середовища на частинки діє сила опору руху (сила Стокса). За постійної температури осмотичний тиск у системі на висоті *z* дорівнює

$$P(z)=n(z)\theta$$

$$n(z)=\sum_{i=0}^{m} n_i$$

– густина системи, $\theta = k_Б T$ – температура в енергетичних одиницях. Осмотична сила дорівнює

$$F_z^{осм.}=-\partial P/\partial z=-\theta(\partial n(z)/\partial z)$$

Баланс імпульсу визначається рівнянням

$$\partial P/\partial z=\sum_{i=0}^{m} n_i(z)F_{iz}$$

Якщо на частинки сорту і діє сила Стокса, тоді $F_{iz} = \zeta\, i\, \eta\, i\, V_{iz}$, де $\zeta\, i\, i\, \eta\, i$ – коефіцієнти структури і коефіцієнт в'язкості компонента *i*, відповідно. Проекція швидкості руху має вигляд

$$V_{iz}=J_{iz}/n_i(z)$$

Отже

$$\theta\frac{\partial n_i}{\partial z}=\zeta_i\eta_i J_{iz}=\frac{\zeta_i\eta_i}{\theta}\sum_{k=0}^{m} L_{ik}\frac{\partial \mu_k}{\partial z}=\frac{\zeta_i\eta_i}{\theta}D_i n_i\frac{\partial \mu_i}{\partial z}$$

Ввівши позначення

$$g_i=\frac{\partial n_i}{\partial z}\left(\frac{n_i}{\theta}\frac{\partial \mu_i}{\partial n_i}\right)^{-1}$$

перепишемо отриману рівність у вигляді співвідношення Ейнштейна

$$D_i=g_i\theta/(\zeta_i\eta_i)$$

Відповідно до принципу Ле Шательє-Брауна незворотні процеси завжди протікають таким чином, щоб компенсувати зміни, що виникають у дисипативній системі, і перевести її в рівноважний стан. Проте протиборство різних за фізико-хімічною природою явищ переводить дисипативну. систему у стаціонарний стан із “загальмованими” незворотними процесами. Специфічні реакції системи на зовнішні збудження є відмінною рисою біологічних систем. Відбір у процесі еволюції таких станів відображає закон збереження ентропії-інформації у відкритих системах.

14.3 Дисипативні структури

Якщо слідувати Єбелінгу,нерівноважні структури можуть виникати у природі в всіх тих випадках, коли виконуються разом такі чотири необхідні умови:

1) Система є термодинамічно відкритою, тобто. може обмінюватися речовиною та/або енергією із середовищем.

2) Динамічні рівняння системи нелінійні.

3) Відхилення від рівноваги перевищує критичне значення.

4) Мікроскопічні процеси відбуваються кооперативно (узгоджено).

Перебіг незворотних процесів у відкритих системах за відомих умов може призводити до утворення різних структур: пористих (комірки Бенара, циліндричні магнітні домени), спіралеподібних (спіралі реакції БілоусоваЖаботинського), вихрових (кільця Тейлора, солітон Хакімото), фрактальних (наприклад, дерева) та інших. Виникнення впорядкованих областей спостерігається за критичного значення градієнта тієї чи іншої фізичної величини. Градієнти фізичних величин у термодинаміці нерівноважних процесів визначають потоки, які перерозподіляють речовину, енергію та ентропію, змінюють структуру системи, забезпечують її життєздатність і пристосованість при мінливих зовнішніх умовах.При рівноважних умовах у системі відсутні механічні течії, відбувається перенесення тепла та перерозподілу речовини. Якщо система ізольована, то вона має максимальну ентропію. У відкритих системах агрегатний стан (газ, рідина, кристал, будь-який проміжний стан) або структура існування вибирається відповідно до зовнішніх умов. Структури відрізняються ступенями впорядкованості та різною симетрією. Перехід від однієї структури до іншої відбувається стрибкоподібно (катастрофа типу складання).

Зміна зовнішніх умов існування призводить до реакції реакції відкритої системи у вигляді течій, переміщень, тепло- і електропровідності та інших рухів. Значне відхилення від рівноваги супроводжується при досягненні критичних значень градієнтів тієї чи іншої термодинамічної сили виникненням нових структур (конвективні потоки в рідині породжують осередки Бенара, у ламінарному перебігу виникають турбулентні вихори, лабіринтна магнітна структура перетворюється на циліндричні магнітні домени і т.п.).

Ці явища пов'язані з тим, що сумарна ентропія системи може бути зменшена рахунок віддачі її частини у довкілля. Якщо викид ентропії у довкілля перевищує деяке критичне значення, відбувається формування нової структури, тобто. самоорганізаціявиникає у “надкритичній” області. Це говорить про те, що структури, що самоорганізуються, є результатом взаємозв'язку між внутрішнім станом відкритої диссипативної системи та зовнішніми умовами, які формуються навколишнім середовищем.Значне

відхилення від рівноваги супроводжується руйнуванням старої та формуванням нової структури. Нова структура виникає при когерентному (кооперативному, узгодженому) поведінці елементів незалежно від природи дисипативної системи. Універсальність поведінки пояснюється однаковою динамічною природою явищ, що спостерігаються .

Виникаючі структури, згідно з Пригожиним, поділяють на часові, просторово-часові та просторові, а щодо зміни їх стану з часом – на стаціонарні, квазістаціонарні та нестаціонарні. В таблиці 14.1 описані різні структури, які існують у рівноважному стані, поблизу рівноваги і далеко від неї. Перехід від однієї структури до іншої називають кінетичними фазовими

Таблиця 14.1 – Класифікація структур

Тип структури	*Рівноважні*	*Навколорівноважні*	*Нерівноважні*
Стаціонарні та квазістаціонарні	*Газ, рідина, кристали та проміжні стани*	*Лінійні потоки, ламінарні течії*	*Дисипативні структури*
Нестаціонарні	–	*Процеси розмноження та зростання*	*Турбулентні потоки, процеси горіння, вибух, біологічна еволюція*

переходами. Просторовими утвореннями є структури Т'юрінга, тимчасовими явищами – автоколивання, просторово-часовими – хвилі.

Структури Тьюринга виникають у хімічно активних системах з дифузійним підведенням компонентів. Для двокомпонентної системи з концентраціями компонентів с *i (i=1, 2)* кінетичні рівняння у лінеаризованому вигляді щодо малих відхилень концентрацій *ui =ci –ci(0)* від рівноважних концентрацій ci0 визначаються рівняннями

$$\partial u_i / \partial t = \sum_{k=1}^{2} a_{ik} u_k + D_i \partial^2 u_i / \partial x^2$$

Використовуючи Фур'є-перетворення

$$u_i = \sum_{l=0}^{\infty} b_{li} e^{\lambda_{li} t + \alpha \kappa_{li} x}$$

($\alpha = -1$ – уявна одиниця), можна навести ці рівняння до системи однорідних лінійних рівнянь алгебри щодо коефіцієнтів ряду Фур'є. З аналізу отриманих рішень випливає, що нестійкість Тьюринга виникає у

тому випадку, коли речова частина найбільшого з комплексних чисел λ_i (κ_i) перетворюється на нуль. У цьому випадку обмежена геометричними розмірами система з кінцевого числа неструктурованих мод посилює певні гармоніки. Наростання цих гармонік призводить до переходу системи в область упорядкування. На мікрорівні відбувається автокаталіз однієї з компонентів системи з придушенням виробництва іншим реагентом (інгібітором). Активація виробництва одного з компонентів призводить до поширення в хімічній системі обурення гаусівського типу (див., наприклад, розв'язання рівнянь теплопровідності Фур'є або рівнянь дифузії Фіка в курсі математичної фізики), які гасяться виробництвом інгібітору. У свою чергу, зростання концентрації інгібітору спричиняє поширення зворотної хвилі збурень, яка пригнічується підвищенням концентрації автокаталітичного компонента. При когерентній поведінці компонентів, що спостерігається при критичних концентраціях речовин, відбувається різке наростання одного з компонентів, що не може бути описано лінійною моделлю. Поява нелінійності в поведінці хімічної системи проявляється в гальмуванні хімічних реакцій та в солітоноподібних сплесках концентрацій компонентів (для модифікованого “брюсселятора”) показано на рисунку 14.3а та 14.3б), що супроводжується появою нової диссипативної структури, в більшій мірі адаптованої до нових умов існування.

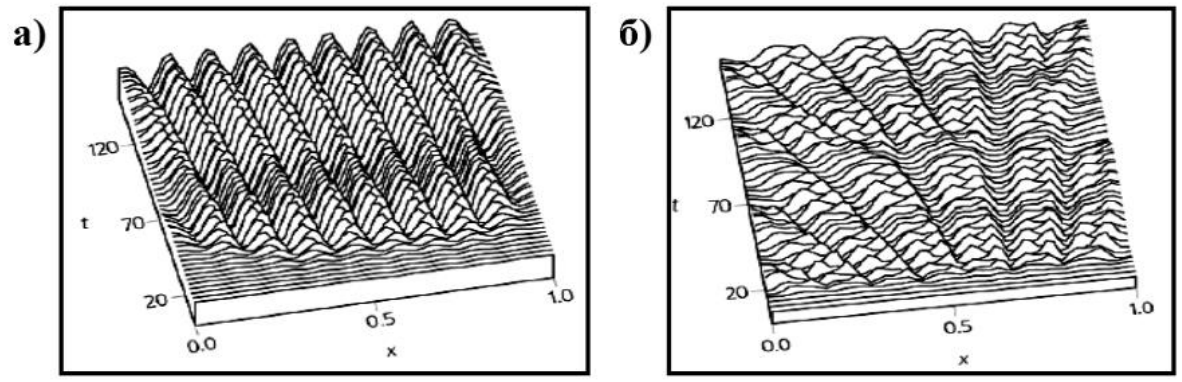


Рисунок 14.3 - Виникнення структур Тюрінга у модифікованій моделі "брюсселятора"

ПЕРЕЛІК ДЖЕРЕЛ ПОСИЛАНЬ

1. Falkovich G., Gawedzki K., Vergassola M. Particles and fields in fluid turbulence. *Reviews of Modern Physics* .2001. 73. Pp. 913-975.

2. Freund L. B. Dynamic Fracture Mechanics. Cambridge: Cambridge University Press,1998. 300 p.

3.Marder, M. , J. Fineberg . How things break. *Physics Today* .1996. 49. Pp.24-29.

4.Wu J. G., O. L. Loucks . From balance of nature to hierarchical patch dynamics: A paradigm shift in ecology.*Quarterly Review of Biology.*1995. 70. Pp.439-466.

5.Proulx S. R., D. E. L. Promislow, P. C. Phillips Network thinking in ecology and evolution. *Trends in Ecology and Evolution*. 2005. 20. Pp.343-353.

6. Marcus P. S. Jupiter Great Red Spot And Other Vortices. *Annual Review Of Astronomy And Astrophysics.*2000. 31. Pp.523-573.

7.Corwin E. I., H. M. Jaeger, Nagel S. R. Structural signature of jamming in granular media. *Nature* . 2005. 435. Pp.1075-1078.

8.McCauley J. L. Dynamics of Markets: Econophysics and Finance. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2004.364 p.

9. Wildfires, complexity and highly optimized tolerance / Moritz M. et al. *Proceedings Of The National Academy of Sciences of The United States Of America* . 2005. 102. Pp. 17912-17917.

10.Toner J., Y. H. Tu, S. Ramaswamy . Hydrodynamics and phases of flocks. *Annals Of Physics* .2005. 318. Pp.170-244.

11.Gaspard P. Out-of-equilibrium nanosystems. *Progress Of Theoretical Physics Supplement*. 2006. 165. Pp.33-56.

12. Local ionic and electron heating in single-molecule junctions / Huang Z. F. et al. *Nature Nanotechnology.* 2007. 2. Pp.698-703.

13.Murty B. S., S. Ranganathan. Novel materials synthesis by mechanical alloying/milling. *International Materials Reviews.*1998. 43. Pp.101-141.

14. Drying-mediated selfassembly of nanoparticles / Rabani E. et al. *Nature* . 2003. 426. Pp. 271-274.

15.Jaeger H. M., S. R. Nagel, R. P. Behringer. Granular solids, liquids, and gases. *Reviews Of Modern Physics* .1996.6 8. Pp.1259-1273..

16.de Gennes P. G. Granular matter: a tentative view. *Reviews of Modern Physics.* 1999. 71. Pp.S374-S382.

17.Kadanoff L. P. Built upon sand: Theoretical ideas inspired by granular flows. *Reviews Of Modern Physic.* 1999. 71. Pp. 435-444.

18. Герасимов О. І. Фізика гранульованих матеріалів. Одеса: ТЕС, 2015. 264 с.

19. Ultrathin cross-linked nanoparticle membranes / Lin Y. et al. *Journal Of The American Chemical Society.* 2003. 125. Pp.12690- 12691.

20.Герасимов О.І., Співак А.Я. Окремі задачі фізики м’якої матерії. Гельветика, 2020. 200 с.

21. Kinetically driven self assembly of highly ordered nanoparticle monolayers / Bigioni T. P. et al. *Nature Materials.* 2006. 5. Pp.265-270.

22.Morozov A.N., W. van Saarloos . An introductory essay on subcritical instabilities and the transition to turbulence in visco-elastic parallel shear flows. *Physics ReportsReview Section Of Physics Letters.* 2007. 447. Pp. 112-143.

23.Fisker J. L., D. S. Balsara, T. Burger. The accretion and spreading of matter on white dwarfs. *New Astronomy Reviews.* 2006. 50. Pp.509-515.

24.Jamming phase diagram for attractive particles / Trappe V. et al. *Nature* . 2001. 411. Pp.772-775.

25.Palmer T.N. Extended-Range Atmospheric Prediction And The Lorenz Model. *Bulletin of The American Meteorological Society.* 1993. 74. Pp.49-65.

26.Makse H. A., J. Kurchan. Testing the thermodynamic approach to granular matter with a numerical model of a decisive experiment. *Nature.* 2002. 415. Pp.614-617.

27.Kadanoff L., D. Lohse, J. Wang, R. Benzi . Scaling And Dissipation In The Goy Shell-Model. *Physics Of Fluids* .2009. 7. Pp.617-629.

28.Lewis G. S., H. L. Swinney . Velocity structure functions, scaling, and transitions in high-Reynolds-number Couette-Taylor flow. *Physical Review E*. 1999. 59. Pp.5457-5467.

29.Newman M. E. J. . The structure and function of complex networks. *Siam Review*.2003. 45. Pp.167-256.

30. Carlson J. M., Doyle J. Complexity and robustness. *Proceedings of The National Academy of Sciences of The United States of America*. 2002. Pp**.** 2538-2545.

31.Haxton T.K., A. J. Liu . Activated dynamics and effective temperature in a steady state sheared glass. *Physical Review Letters* .2007. 99. Pp.345-350.

32.Speck T., U. Seifert. Restoring a fluctuation-dissipation theorem in a nonequilibrium steady state. *Europhysics Letters.* 2006. 74. Pp.391-396.

33.Breakup of air bubbles in water: Memory and breakdown of cylindrical symmetry / Keim N. C.et al. *Physical Review Letters* .2006. 97. Pp.14-17.

34. Fluctuation theorems / Sevick E. M., et al. *Annual Review of Physical Chemistry*.2008 .58. Pp**.**603-633.

35. Эбелинг В. Образование структур при необратимых процессах. Москва: Мир, 2004. 256 с.

36. Хакен Г. Синергетика. Иерархия неустойчивостей в самоорганизующихся устройствах и системах. Москва: Мир,1985. 405с.

37. Хакен Г. Информация и самоорганизация. Москва: Мир, 1991. 320с.

38. Хакен Г., Хакен-Крелль М. Тайны восприятия. Москва:.Институт компьютерных исследований,2001. 272 с.

39. Хакен Г. Тайны природы. Синергетика: учение о взаимодействии. Москва: Институт компьютерных исследований, 2003.320 с.

40. Пригожин И. Введение в термодинамику необратимых процессов. Москва: Изд-во иностр. лит-ры, 1960.160 с.

7. Гленсдорф П., Пригожин И. Термодинамическая теория структуры, устойчивости и флуктуаций. Москва: Наука, 1973.280 с.

41. Николис Г., Пригожин И. Самоорганизация в неравновесных системах. Москва: Мир. 1979.399 с.

42. Николис Г., Пригожин И. Познание сложного. Москва:Мир, 1990.399 с.

43. Пригожин И. Конец определённости. Время, хаос и новые законы природы. Регулярная и хаотическая динамика. Ижевск,1999.208 с.

44. Лоскутов А.Ю., Михайлов А.С. Введение в синергетику. Москва: Наука, 1990.272 с.

45. Баблоянц А. Молекулы, динамика и жизнь: Введение в самоорганизацию материи. Москва:Мир, 1990.373 с.

46. Сугаков В.И. Введение в синергетику. Киев. КНУ, 1992.188 с.

47. Йосс Ж., Джозеф Д. Элементарная теория устойчивости и бифуркаций. Москва:Мир, 1983.301 с.

48. Шустер Г. Детерминированный хаос. Москва:Мир, 1988.253 с.

49. Заславский Г.М., Сагдеев Р.З. Введение в нелинейную физику. Москва:Наука,1988.368 с.

50. Заславский Г.М., Сагдеев Р.З. Слабый хаос и квазирегулярные структуры. Москва:Мир. 1991.368 с.

51. Берже П.и др. Порядок в хаосе: о детерминистическом подходе к турбулентности. Москва:Мир,. 1991.368 с.

52. Белоцерковский О.М. Численный эксперимент в турбулентности: от порядка к хаосу. Москва:Наука, 1997. 396 с.

53. Sanders J.A., Verhulst F. Averaging Methods in Nonlinear Dynamical. New York, Springer-Verlag, 1985. Pp.394.

54. Aoki Kazunori. Nonlinear Dynamics and Chaos in Semiconductors. / Series in condensed matter physics. Bristol-Philadelphia. IoP, 2001.Pp.580.

55. Андронов А.А., Леонтович Е.А., Гордон И.И., Майер А.Г. Качественная теория динамических систем второго порядка. Москва: Наука, 1966. 568 с.

56. Биркгоф Д. Динамические системы. Регулярная и хаотическая динамика. Ижевск, 1999.408 с.

57. Заславский Г.М. Стохастичность динамических систем. Москва: Наука, 1984.272 с.

58. Мун Ф. Хаотические колебания. Москва: Мир, 1990.312 с.

59. Дрёмин И.М., Иванов О.В., Нечитайло В.А. Вейвлеты и их использование. *Успехи физических наук*. 2001. 171. С.465-501.

60. Добеши И. Десять лекций по вейвлетам. Регулярная и хаотическая динамика. Москва: Ижевск,2001.464 с.

61. Постон Т., Стюарт И. Теория катастроф и её приложения. Москва: Мир, 1980.617 с.

62. Гилмор Т. Прикладная теория катастроф. В 2-х книгах. Москва: Мир,1984.636 с.

63. Томпсон Дж.М.Т. Неустойчивости и катастрофы в науке и технике. Москва: Мир, 1985.254 с.

64. Арнольд В.И. Теория катастроф. Москва: Наука, 1990.128 с.

65. Брёкер Т., Ландер Л. Дифференцируемые ростки и катастрофы. В.Плато, . 1997. 208 с.

66. Вилля Г. Теория вихрей. Л.-М.: ОНТИ, 1936.251 с.

67. Пуанкаре А. Теория вихрей.Регулярная и хаотическая динамика. Москва: 2000.160 с.

68. Моффагт К. Вихревая динамика: наследие Гельмгольца и Кельвина . *Нелинейная динамика*. 2006. 2. С.401-410.

69. Кадомцев Б.Б. Динамика и информация. Москва: Изд-во редакции журнала. *Успехи физических наук*. 1999.120с.

70. Пригожин И., Дефей Р. Химическая термо-динаміка. Новосибирск: Наука, 1966. 533 с.

71. Толпыго К.Б. Термодинамика и статистическая физика. Киев: КГУ, 1966.364 с.

72. Кубо Р. Термодинамика. Москва: Мир, 1970.304 с.

73. Пайтген Х.О., Рихтер П.Х. Красота фракталов. Образы комплексных динамических систем. Москва: Мир, 1993.176 с.

74. Кроновер Р.М. Фракталы и хаос в динамических системах. Основы теории. Москва: Постмаркет, 2000.352 с.

74. Шредер М. Фракталы, хаос, степенные законы. Регулярная и хаотическая динамика. Ижевск,2001.528 с.

75. Мандельброт Б.Б. Фрактальная геометрия природы. Москва: Институт компьютерных исследований, 2002.656 с.

76. Вильсон К., Когут Дж. Ренормализационная группа и ε-разложение. Москва: Мир ,1975.255 с.

77. Паташинский А.З., Покровский В.Л. Флуктуационная теория фазовых переходов. Москва: Наука, 1982.381 с.

78. де Жен П. Идеи скейлинга в теории полимеров. Москва: Мир, 1982.368 с.

79. Тоффоли Т., Марголус Н. Машины клеточных автоматов. Москва: Мир, 1991.283 с.

80. де Гроот С., Мазур П. Неравновесная термодинамика. Москва: Мир, 1964.456 с.

81. Хаазе Р. Термодинамика необратимых процессов. Москва: Мир, 1967.543с.

82. Кайзер Дж. Статистическая термодинамика неравновесных процессов. Москва: Мир, 1990.608 с.

83. Жаботинский А.М. Концентрационные автоколебания. Москва: Наука, 1974.179 с.

84. Шульц Г., Ширмер Р. Принципы структурной организации белка. Москва: Мир, 1982.354 с.

85. Марри Дж. Нелинейные дифференциальные уравнения в биологии. Москва: Мир,1983.396 с.

86. Самарский А.А., Михайлов А.П. Математическое моделирование. Москва: Наука, 1997.272 с.

Наукове електронне видання

ГЕРАСИМОВ Олег Іванович

ФІЗИКА СКЛАДНИХ НЕРІВНОВАЖНИХ СИСТЕМ ТА ПРОЦЕСІВ

Монографія

Видавець і виготовлювач
Одеський державний екологічний університет
вул. Львівська, 15, м. Одеса, 65016
тел./факс: (0482) 32-67-35
E-mail: info@odeku.edu.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи
ДК № 5242 від 08.11.2016