МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ОДЕСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ЕКОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до самостійної роботи студентів

з дисципліни «Моделювання динамічних об’єктів»

для студентів 4 курсу денної форми навчання

Рівень вищої освіти – «Бакалавр»

Напрям підготовки – «Комп’ютерні науки»

Затверджено на засіданні
методичної комісії факультету
Комп'ютерних наук
Протокол __ від __________

Одеса, 2017

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ОДЕСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ЕКОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до самостійної роботи студентів

та виконання лабораторних і контрольної робіт

з дисципліни «Моделювання динамічних об'єктів»

для студентів 4 курсу заочної форми навчання

Освітньо-кваліфікаційний рівень – «Бакалавр»

Напрям підготовки – «Комп'ютерні науки»

Одеса, 2016

Методичні вказівки до самостійної роботи студента з дисципліни “Моделювання динамічних об’єктів” для студентів 4 курсу денної форми навчання, напряму підготовки – комп’ютерні науки.

Укладачі:
МЕЩЕРЯКОВ В.І. – завідувач кафедри інформатики, професор
ЧЕРЕПАНОВА К.В. – асистент кафедри інформатики

ЗМІСТ

Передмова

Методичні вказівки призначені для студентів денного факультету ОДЕКУ до самостійної роботи студента з дисципліни “Моделювання динамічних об’єктів” освітньо-кваліфікаційний рівень – «Бакалавр» Напрям підготовки – «Комп’ютерні науки». Спеціальність – інформаційні управляючі системи та технології

Мета методичних вказівок – забезпечити отримання студентами теоретичних знань і практичних навичок щодо моделювання динамічних об’єктів, принципів побудови моделей інформаційних систем з динамічними об’єктами. Динамічні об’єкти розглядаються як невід’ємна частина інформаційної системи, яка впливає на швидкість одержання і формування інформації, прийняття рішень, пропускну здатність системи, та її структуру. Отримані студентами знання та вміння можуть використовуватися в дипломному проектуванні.

Ці методичні вказівки містять рекомендації по вивченню теоретичних розділів дисципліни для виконання лабораторних та контрольної робіт, контрольні запитання для самоперевірки та завдання. В методичних вказівках розглядаються питання, які відповідають навчальній програмі дисципліни.

1 ЗАГАЛЬНІ ВІДОМОСТІ ПРО ДИСЦИПЛІНУ

1.1 Мета дисципліни та її місце у навчальному процесі

Дисципліна “Моделювання динамічних об’єктів” входить до складу варіативної частини навчального плану підготовки фахівців з галузі знань “Інформатика та обчислювальна техніка”, напряму підготовки 6.050101 “Комп’ютерні науки”. Викладається відповідно до освітньо-професійної програми, освітньо-кваліфікаційної характеристики та навчального плану підготовки бакалавра.

Курс присвячений вивченню сучасного рівня моделювання динамічних об’єктів, принципів побудови моделей інформаційних систем з динамічними об’єктами. Динамічні об’єкти розглядаються як невід’ємна частина інформаційної системи, яка впливає на швидкість одержання і формування інформації, прийняття рішень, пропускну здатність системи, та її структуру.

Мета дисципліни – полягає у ознайомленні з існуючими інформаційними технологіями, які можуть бути використані для побудови моделей інформаційних систем з динамічними об’єктами, здатними оперативно реагувати за зміни зовнішньої обстановки.

Для підготовки курсу використано велика низка новітніх наукових та навчально-методичних робіт, як зарубіжних так і вітчизняних фахівців у галузі динаміки, управління, інформаційних технологій, мережевих структур.

Вивчення дисципліни базується на знаннях, отриманих в курсах системного аналізу, моделювання, проектування програмних засобів.

1.2. Зміст дисципліни

1. Динамічні об’єкти, моделі, структура, властивості
Література [1 с.4–45, 2 с.46–76, 3 с.16-88]

Структура і режими роботи динамічного об’єкту. Вплив на об’єкт і реакції на зміну впливів, прогноз поведінки.

Запуск LabView. Аналіз простих приладів. Дослідження блок-діаграми. Середовище проектування LabView. Типи даних. Основні елементи лицьової панелі і блок-діаграми.

2. Математичні моделі динамічних об’єктів
Література [1 с.4–45, 2 с.46–76, 5 с.10-48]

Класифікація математичних моделей, лінійні та нелінійні моделі. Етапи побудови математичних моделей, вибір метода рішення задачі, перевірка адекватності моделі.

Створення, редагування та налагодження ВП. Елементи управління та індикатори. Підключення. З'єднання елементів. Автоматичне додавання констант, елементів управління та індикаторів.

3. Структурні моделі

Література [1 с.4–45, 2 с.46–76, 5 с.16-108]

Структурна модель, мережеві графи. Способи побудови просторових, часових, фізичних, ієрархічних моделей.

Створення підпрограм віртуального приладу. Створення іконки, налаштування сполучної панелі, перетворення даних

4. Моделювання в умовах невизначеності

Література [1 с.4–45, 2 с.46–76, 5 с.16-100]

Моделювання в умовах невизначеності з позицій теорії нечітких множин.

Управління використанням програм за допомогою структур. Структурні цикли. Термінали всередині циклів. Розрахунки за допомогою циклів

Складові дані: масиви. Автоматичне індексування. Поліморфізм.

Складові дані: кластери. Упорядкування елементів, об'єднання даних, поділ кластерів.

При вивченні даної дисципліни використовується наступна навчальна література:

Основна

1. Томашевский В., Жданова Е. Имитационное моделирование в среде GPSS. М.: Бестселлер, – 2003. – 416 с.
2. Бережная Е.В., Бережной В.И. Математические методы моделирования экономических систем. Учебное пособие. – М.: Финансы и статистика, 2006. – 432 с.
3. Зарубин В.С., Крищенко А.П. Математическое моделирование в технике. Учебник для вузов. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2003. – 496 с.
4. Алиев Т.И. Основы моделирования дискретных систем. – СПб.: СПбГУ ИТМО, – 2009. – 363 с.
5. Трэвис Дж., Кринг Дж. LabView для всех – М.: ДМК Пресс, 2008. – 880 с.

Додаткова

1. Советов Б.Я., Яковлев С.А. Моделирование систем. Курсовое проектирование. – М.: Высш. школа, 1988. – 135 с.
2. Шеннон Р. Имитационное моделирование систем. – М.: Мир. – 1978. – 418 с.
3. Карпов Ю. Имитационное моделирование систем. Введение в моделирование с AnyLogic S. – СПб.: БХВ-Петербург, – 2005. – 400 с.
4. Семакин И.Г., Хеннер Е.К. Информационные системы и модели. Практикум. – М.: БИНОМ. – 2006. – 87 с.

1.3. Перелік знань та вмінь

В результаті вивчення дисципліни студенти повинні:

Знати:

Загальні характеристики моделювання динамічних об'єктів
Поняття динамічного об'єкту
Структуру і режими роботи динамічного об'єкту
Вплив на об'єкт, основні властивості, прогнозування поведінки.
Технологію побудови систем з динамічними об'єктами
Математичні моделі, класифікація;
Етапи побудови математичної моделі;
Структурні моделі.

Вміти:

Розробляти моделі простих динамічних об'єктів;
Працювати з пакетом LabView;
Аналізувати поведінку динамічних об'єктів за допомогою розроблених моделей.

1.4. Контрольні заходи

Вивчення дисципліни "Моделювання динамічних об'єктів" для студентів четвертого курсу денної форми навчання складається з лекційних та лабораторних занять, самостійної роботи студентів (СРС) із засвоєння теоретичного курсу.

Контроль самостійної роботи студентів денної форми навчання здійснюється шляхом захисту лабораторних робіт, написання модульних контрольних робіт, а також шляхом опитів під час лекційних та лабораторних занять.

1.5 Організація самостійної роботи студентів

Основною формою навчання студента є самостійна робота над навчальним матеріалом. СРС повинна сприяти активізації творчого мислення студентів, підвищенню самостійності студентів та індивідуалізації процесу навчання. СРС складається з наступних елементів: вивчення матеріалу по підручниках, виконання лабораторних та контрольних робіт.

В процесі вивчення курсу студенти виконують лабораторні роботи та пишуть модульні контрольні роботи, що містять як теоретичні запитання, так і практичні завдання.

Студент може звертатися до викладача з питаннями для одержання письмової чи усної консультації. Однак студент повинен пам'ятати, що допомога викладача виявиться досить ефективною лише за умови систематичної і завзятої роботи студента.

2 ТЕОРЕТИЧНІ МАТЕРІАЛИ ДО САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ СТУДЕНТА

Загальні поради по вивченню дисципліни «Моделювання динамічних об'єктів» та виконанню контрольної роботи

У процесі самостійного вивчення курсу студент повинен керуватися його програмою та вивчити за конспектом лекцій і літературою, що рекомендована викладачем, відповідний теоретичний матеріал.

Методичні вказівки містять перелік тем, які повинні бути розглянуті, завдання, які є необхідними для рішення поставленої задачі, контрольні питання та завдання в межах виконання контрольної роботи, які охоплюють наступні розділи:

- динамічні об'єкти, впливи на об'єкт, властивості об'єктів;
- етапи побудови математичної моделі, обмеження і адекватність моделі;
- структурні моделі, моделювання в умовах невизначеності;

і дають можливість студентам найкраще закріпити теоретичні знання, отримані на лекціях з дисципліни «*Моделювання динамічних об'єктів*».

Введення в моделювання

Безумовно, моделювання є далеко не єдиним методом вивчення навколишнього світу. Існує ціла область знання, яка спеціально займається вивченням методів пізнання і яку прийнято називати методологією. Методологія дослівно означає «вчення про методи» (бо відбувається цей термін від двох грецьких слів metodos – метод, шлях до чого-небудь і logos – вчення). Вивчаючи закономірності людської пізнавальної діяльності, методологія виробляє на цій основі методи її здійснення. Найважливішим завданням методології є вивчення походження, сутності, ефективності та інших характеристик методів пізнання.

Поняття «метод» означає сукупність прийомів і операцій практичного і теоретичного освоєння дійсності. Метод озброює людину системою принципів, вимог, правил, керуючись якими він може досягти наміченої мети.

Володіти методом – це значить знати, яким чином, в якій послідовності потрібно робити ті чи інші дії для вирішення різних завдань і вміти реалізувати ці знання на практиці.

Вмінню грамотно застосовувати той чи інший метод на практиці можливо навчитися тільки при вирішенні різних практичних завдань.

Визначення моделі

Наукове пізнання зосереджено на вивченні предметів, явищ і процесів, що існують поза нашою свідомістю і званих об'єктами дослідження (від лат. Objectum - предмет).

Поняття моделі та моделювання найбільш поширені в сфері навчання, наукових дослідженнях, проектно-конструкторських роботах, в серійному технічному виробництві. У кожній з цих областей моделювання має свої особливості. Далі моделювання буде розглядатися головним чином стосовно до наукових досліджень. Найчастіше термін «модель» використовують для позначення:

Пристрою, шо відтворює будову або дію будь-якого іншого пристрою (зменшене, збільшене або в натуральну величину);

Аналога (креслення, графіка, плану, схеми, опису і т.д.) будь-якого явища, процесу або предмета.

До недоліків терміна «модель» слід віднести його багатозначність. У словниках можна знайти до восьми різних тлумачень даного терміна, за яких в науковій літературі найбільш поширені два:

Модель, як аналог реального об'єкта;

Модель, як зразок майбутнього виробу.

Важливу роль при розробці моделей відіграють гіпотези (від. грец. Hypothesis – підстава, припущення), тобто певні передбачення, приблизні судження про причинно-наслідкові зв'язки явищ, засновані на певній кількості дослідних даних, спостережень, здогадів. Формулювання і перевірка правильності гіпотез ґрунтується, як правило, на аналогіях.

Аналогія (від грец. Analogia – відповідність), – це уявлення про будь-яку частинну схожість двох об’єктів, причому така схожість може бути як великою, так і несуттєвою. Істотність подібності або відмінності двох об’єктів умовна і залежить від рівня абстрагування , що визначається кінцевою метод дослідження. Рівень абстрагування залежить від набору врахованих параметрів об’єкта дослідження. Наприклад, при вивченні механічних властивостей в якості об’єктів дослідження можуть бути виділені матеріали з дерева, металу, пластмаси і т.д. У свою чергу матеріали з дерева можна поділити за видами деревини на листяні і хвойні, листяні – на «березу», «тополю», «ясен» і т.д.

В даному прикладі ступінь абстрагування знижується при додаванні врахованих параметрів. Слід зауважити, що рівень абстрагування даного об’єкта завжди встановлюється по відношенню до інших об’єктів.

Гіпотези і аналогії, в певній мірі відображають реальний, об’єктивно існуючий світ, вони повинні мати наочність або зводитися до зручних для дослідження логічних схем. Саме подібні логічні схеми, що спрощують міркування і логічні побудови, а також дозволяють проводити експерименти, які приводять до розуміння явищ природи, називають моделями. Іншими словами, модель – це об’єкт-замінник об’єкта-оригіналу, що забезпечує вивчення деяких властивостей оригіналу, які саме цікавлять дослідника.

Під моделлю (від лат. Modulus – міра, зразок, норма) розуміють такий матеріальний чи уявний об’єкт, який у процесі пізнання (вивчення) заміщає об’єкт оригінал, зберігаючи деякі важливі для даного дослідження типові його риси. Процес побудови і використання моделі називається моделюванням.

2.1 Динамічні об'єкти, моделі, структура, властивості. Структура і режими роботи динамічного об'єкту

Будь-яке сприйняття і відображення свідомістю людини, його інтелектом навколишньої дійсності: простору, середовища і поміщених в ній тіл, переміщення і взаємодія тіл і інших об'єктів, в широкому розумінні являє собою деяку модель реальності. Окремим випадком такого відображення є виділення з оточення т.зв. динамічних об'єктів, що володіють деякою загальною системою властивостей. Моделі можуть описуватися словами або формулами, іншими способами.

Динамічні об'єкти – це фізичні тіла і системи зв'язаних тіл, явища, технічні пристрої і системи пов'язаних пристроїв, а також технологічні процеси, здатні сприймати зовнішні фізичні впливи і відгукуватися на них зміною вихідних фізичних величин, що характеризують стан і поведінку об'єкта.

Як видно з цього не суворого, якісного визначення, до динамічних об'єктів в тій чи іншій мірі можна віднести величезне число реальних фізичних об'єктів і явищ, зокрема технічних пристроїв і їх систем, а також технологічних процесів. Цим визначається висока практична значущість розгляду, опису, моделювання динамічних об'єктів, що дозволяють розуміти і оцінювати властивості проектованих систем управління ще до їх реалізації і визначення поведінки фізичних об'єктів, яке можна від них очікувати. При необхідності система управління ще на стадії аналізу моделі може бути скоригована з метою отримання необхідного поводження динамічного об'єкта управління.

Динамічний об'єкт може мати складну фізичну структуру, складатися з елементів, що взаємодіють один з одним в одному і двох напрямках, він описується диференціальними рівняннями.

У вузькому сенсі динамічний об'єкт функціонує в часі, а його просторові параметри і характеристики наближено враховуються при моделюванні затримками часу, необхідні сигналам (впливів і реакцій) для поширення в просторі.

Внутрішня функціональна структура динамічного об'єкта є взаємопов'язані, взаємодіючі один з одним елементи, що представляють собою більш прості динамічні об'єкти (рис. 2.1) Така конкретизація ієрархії структури обмежується т.зв. найпростішими об'єктами. Зв'язки, за якими передаються впливу, можуть розгалужуватиметься, тобто один елемент може впливати на кілька інших, або, навпаки, на один елемент можуть впливати кілька інших.

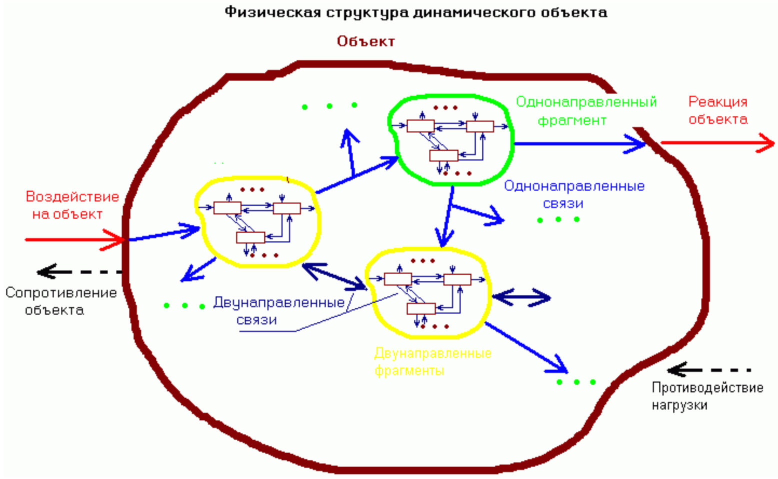

Рисунок 2.1 – Схематичне зображення фізичної структури динамічного об'єкта і його взаємодії з джерелом впливу на нього і навантаженням

Прикладами динамічних об'єктів, що складаються з двонапрямлених елементів, можуть служити електрична схема, що складається з пасивних RLC-елементів та джерел напруги, двигун, що приводить в рух деяку машину, наприклад ДВС автомобіля і багато ін.

По суті, всі елементи динамічного об'єкта є двонаправленими, як і сам об'єкт по відношенню до зовнішніх об'єктів. Це випливає з узагальнення третього закону Ньютона, сформульованого їм для механіки: сила протидії тіла дорівнює силі впливу на нього іншим тілом і спрямована назустріч їй, а в хімії також формулюється у вигляді принципу ЛеШательє. Узагальнюючи можна сказати: вплив одного динамічного елемента на інший зустрічає протидію деякого виду. Наприклад, електричне навантаження джерела напруги протидіє йому струмом, змінюючи значення напруги на виході джерела. У загальному випадку протидія навантаження впливає на режим роботи джерела, і їх поведінка визначається в результаті, якщо це можливо, переходом в деякий динамічна рівновага.

У багатьох випадках потужність джерела впливу значно більше потрібної вхідної потужності приймача, яким є динамічний об'єкт. В цьому випадку динамічний об'єкт практично не впливає на режим роботи джерела (генератора) і зв'язок може розглядатися як односпрямованим від джерела до об'єкта. Така однонаправленамодель елемента, яка ґрунтується на раціональному фізичному структуруванні об'єкта, істотно спрощує опис і аналіз системи. Власне, багато технічних об'єкти, хоча і далеко не всі, будуються саме за таким принципом, зокрема при проектуванні систем для вирішення завдань управління. В інших випадках, наприклад при вирішенні задачі, коли потрібне отримання максимального ККД двигуна, протидією знехтувати не можна.

Деталізуючи структуру динамічного об'єкта можна прийти до елементарних, умовно не спрощує об'єктів. Такі об'єкти описуються найпростішими алгебраїчними і диференціальнимирівняннями. Фактично такі елементи в свою чергу можуть мати складну структуру, однак зручніше при моделюванні сприймати їх як єдине ціле, властивості якого визначаються цими, порівняно простими рівняннями, що зв'язують реакцію з впливом.

Динамічний об'єкт може функціонувати як автономно, без зовнішніх впливів, за рахунок власних джерел енергії, в тому числі запасеної в накопичують елементах, так і під зовнішніми впливами.

Відзначимо, що порівняно повільним і гладким впливів, хоча і чинячи опір, "напружуючись", динамічний об'єкт, який має складну структуру, підпорядковується як ціле. Такий режим його функціонування називається сталим.

Диференціальне рівняння об'єкта не описує механізм цього "напруги", воно, це "напруга" побічно може проявлятися в вихідний величиною об'єкта і її похідних.

Якщо ж вплив або його молодші похідні порівняно короткий час змінюються занадто швидко, наприклад, стрибкоподібно, то динамічний об'єкт не встигає відреагувати на цю зміну. В результаті такого струсу виникає т.зв. перехідний режим, який визначається часом, протягом якого об'єкт "пристосовується" до нової ситуації, переходить в нове динамічна рівновага із змінним впливом, новий сталий режим. При переході проявляються власні, внутрішні інерційно-коливальні властивості об'єкта, пов'язані з перерозподілом енергії між елементами. Вони-то і визначають перехід від одного сталого режиму до іншого. Тому такий режим роботи об'єкта називається перехідним.

За відсутності зовнішніх впливів, інерція динамічного об'єкта проявляється в підтримці свого стану і поведінки, які визначаються і тим, споживається або розсіюється об'єктом енергія, яка надходить ззовні для забезпечення функціонування його елементів.

Т.зв. вільна консервативна система, не схильна до зовнішніх впливів. У ній відбувається в загальному випадку необмежений у часі, незатухаючий процес обміну енергією між інерційними елементами, незгасаючі коливання.

2.2 Вплив на об’єкт і реакції на зміну впливів, прогноз поведінки

У загальному випадку динамічні об'єкти схильні до зовнішніх впливів, що визначає поведінку вихідної величини об'єкта в часі.

Вплив на об'єкт це деяка фізична величина, яка сприймається об'єктом, і на яку він реагує зміною деякої фізичної величини, що характеризує стан об'єкта.

Динамічні об'єкти можуть піддаватися зовнішнім впливом, але впливу можуть бути і нульовими. У другому випадку об'єкти функціонують автономно, їх вихідна величина може змінюватися деякий час за рахунок внутрішньої енергії, запасеної заздалегідь в накопичувальних елементах, а також за рахунок сторонньої енергії, необхідної для правильного функціонування елементів об'єкта.

Вплив генерується деяким джерелом. Воно подається на об'єкт за допомогою деякого механізму, що відображається на графічному поданні фізичної структури об'єкта, на т.зв. функціональній схемі, у вигляді умовної односпрямованої лінії зв'язку.

До складного динамічного об'єкту вплив може бути докладено в різних точках, подано різними способами. При цьому може виявитися, що об'єкт як ціле реагує безпосередньо не тільки на саме вплив, але і на одну або кілька його молодших похідних. У разі лінійної моделі це сума:

$$k_0 F + k_1 \dot{F} + \ldots + k_m F^{(m)} \tag{2.1}$$

Максимальний ступінь m похідною, що безпосередньо впливає на реакцію об'єкта, визначається місцем і способом додатка зовнішнього впливу. Цей ступінь для реальних об'єктів не може перевищувати ступеня їх інерційності n, тобто числа накопичують елементів, наявних в динамічному об'єкті.

Якщо об'єкт здатний реагувати не тільки на вплив, а й на його молодші похідні, то це частково зменшує його інерційність.

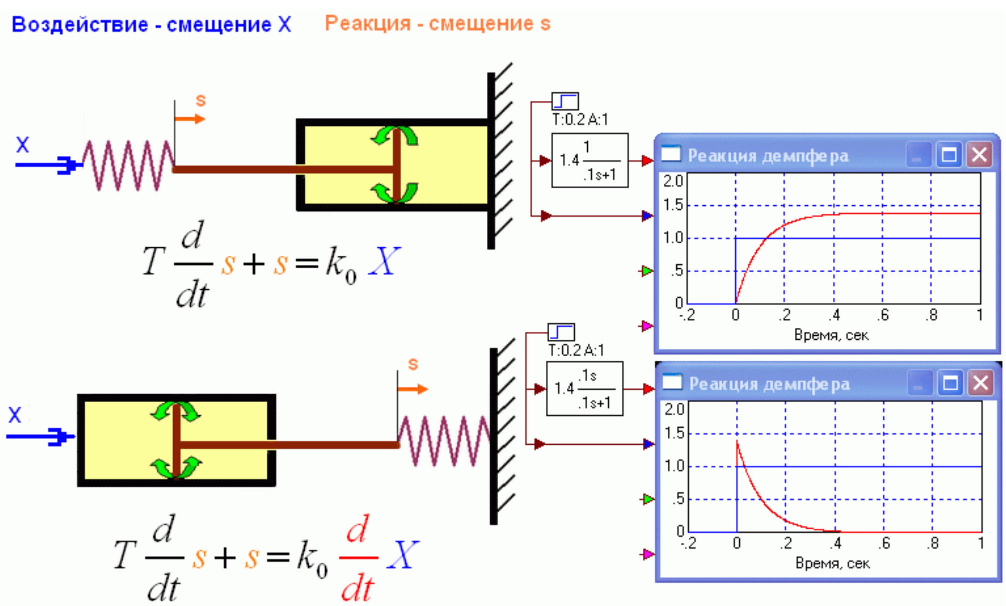

Рисунок 2.2 – Демпфер з пружиною.
Х - вплив, s - зсув, реакція. Один і той же об'єкт, в залежності від того, куди докладено зовнішній вплив, може інерційно відгукуватися або на саме вплив (схема вгорі), або на його першу похідну (схема внизу).

Вплив в загальному випадку може містити ненульові, що змінюються, в тому числі і стрибком, похідні і більш високих порядків, ніж m. Але вони впливають на реакцію об'єкта опосередковано, змінюючи з часом молодші похідні впливу і його саме і тим самим, позначаючись на реакції. Звідси виникає різноманіття поведінки об'єктів.

Порядок старшої похідної m вхідного впливу об'єкта, що безпосередньо впливає на його реакцію, може бути названий ступенем сприйнятливості об'єкта або просто сприйнятливістю (фізичну трактування див. Нижче). Число m це число коренів чисельника передавальної функції лінійного об'єкта, або, що те ж саме, число нулів його передавальної функції.

Різниця pr ступенів інерційності n і сприйнятливості m об'єкта визначає клас допустимих для подачі на лінійну модель сигналів, при яких реакція моделі матиме необхідну за фізичними міркуваннями ступінь гладкості (див. Нижче), тобто модель буде спроможною і дозволить, грунтуючись на цьому, прогнозувати, нехай на малий проміжок часу, поведінка в часі реакції, тобто самого об'єкта. Цю різницю pr можна назвати ступенем прогнозованості об'єкта.

Ступінь прогнозованості об'єкта визначає клас гладкості впливів, при яких лінійна модель є спроможною, тобто при яких деяка молодша похідна вихідної величини об'єкта, ступінь якої визначається фізичними властивостями об'єкта, що моделюється, неперервна.

Ця вимога достатньої гладкості вихідної величини забезпечує спроможність лінійної моделі динамічного об'єкта.

Класичне вимога можливості бути реалізованим лінійного об'єкта полягає в тому, що ступінь його інерційності n повинна бути не менше ступеня сприйнятливості m. Ця вимога забезпечує причинно-наслідковий зв'язок між впливом і реакцією об'єкта: реакція настає після впливу.

Зв'язки об'єктів з джерелами та іншими об'єктами.

Зв'язок - модель механізму передачі без спотворень впливу від одного об'єкта до іншого. При моделюванні зручніше користуватися односпрямованим зв'язками.

Якщо не потрібно спеціально, то механізм передачі впливів між елементами динамічного об'єкта детально не описується. Просто вважається, що вихідна фізична величина джерела впливу деяким чином без будь-яких змін надходить на вхід об'єкта. Така модель односторонньої передачі впливу (фізичної величини) називається зв'язком і відображається на функціональних схемах односпрямованим стрілками, що вказують напрямок передачі.

Двонаправлені зв'язку відображаються двома односпрямованим зв'язками, спрямованими протилежно.

Зв'язки можуть бути двох видів:

• - зв'язку, миттєво передають сигнал, і

• - зв'язку, що передають сигнал з деяким запізненням.

Перший вид зв'язків використовують при моделюванні щодо малогабаритних систем, коли час передачі впливу від джерела до об'єкта істотно менше характерного часу протікання процесів в об'єкті і їм обгрунтовано нехтують. Тим самим вважається, що динамічні об'єкти є точковими в просторі, тобто їх розміри і відстані між ними нехтує малі, як і час передачі впливу, в порівнянні з характерними часом протікання процесів в об'єкті.

У тих випадках, коли часом поширення впливів в об'єкті і між ними не можна нехтувати, протяжність об'єктів і систем враховується затримкою сигналу, при поширенні впливу від джерела до приймача. Це і є зв'язок з запізненням.

Підсумовування і розгалуження впливів.

На об'єкт можуть подаватися кілька впливів, наприклад від різних джерел. У лінійному наближенні ці дії підкоряються принципу суперпозиції, тобто підсумовуються на вході об'єкта. Їх сумарна дія на об'єкт дорівнює сумі реакцій об'єкта на кожне з них окремо.

Одне вплив може бути докладено до декількох об'єктів. Такий вид зв'язку - розгалуження.

Композиція елементів в моделі.

Модель, що складається з декількох об'єктів, в т.ч. взаємодіючих в двох напрямках, може бути замінена на еквівалентну, більш складну, описувану як ціле.

Диференціальне рівняння описує таку систему як односпрямовану. Т.ч. висновок диференціального рівняння з рівнянь окремих фізичних законів, що відображають процеси в об'єктах і взаємодія між ними, можна розглядати як алгоритм перетворення складної функціональної схеми до односпрямованої структурної, що складається з односпрямованих же елементів.

Для опису одним диференціальним рівнянням складної системи використовуються теореми про з'єднання односпрямованих ланок і еквівалентні перетворення структурних схем.

2.3 Математичні моделі динамічних об’єктів. Класифікація математичних моделей, лінійні та нелінійні моделі

Класифікаційні ознаки

Бурхливий розвиток методів математичного моделювання і різноманіття областей їх використання призвело до появи величезної кількості моделей самого різного типу. У зв'язку з цим виникає необхідність в певному впорядкування, класифікації існуючих і з'являються математичних моделей. З огляду на велику кількість можливих класифікаційних ознак і суб'єктивність їх вибору, поява все нових класів моделей, слід зазначити умовність і незавершеність даної нижче класифікації.

Представляється можливим розділити математичні моделі на різні класи в залежності від:

- Складності об'єкта моделювання;
- Оператора моделі (подмодели);
- Вхідних і вихідних параметрів;
- Способу дослідження моделі;
- Мети моделювання.

Класифікація математичних моделей в залежності від складності об'єкта моделювання.

Як об'єкт моделювання може виступати як певне матеріальне тіло або конструкція, так і природний, технологічний або соціальний процес або явище. Всі об'єкти моделювання можна розділити на дві групи: прості і об'єкти-системи (рис. 2.1). У першому випадку при моделюванні не розглядається внутрішню будову об'єкта, не виділяються складові його елементи або підпроцеси. Як приклад подібного об'єкта можна привести матеріальну точку в класичній механіці.

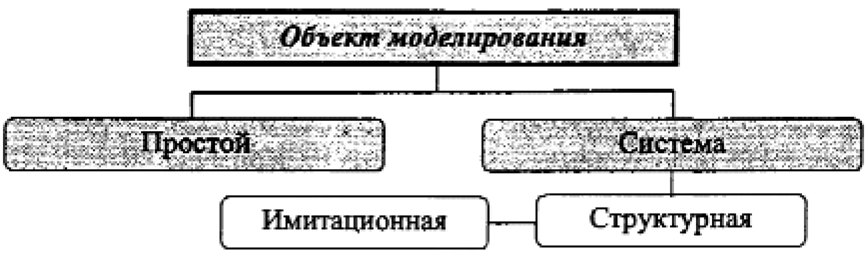

Рисунок 2.1 – Класифікація об’єктів моделювання

Система є сукупність взаємопов'язаних елементів, в певному сенсі відособлена від навколишнього середовища і взаємодіє з нею як ціле.

Для складних систем характерна наявність великої кількості взаємно пов'язаних, взаємодіючих між собою елементів. При цьому зв'язок між елементами A і B системи може відрізнятися від зв'язку між елементами B і A.

Якщо система має N елементів і кожен елемент пов'язаний з кожним, то загальне число зв'язків одно N (N-1). Якщо все N елементів мають по M станів, то для такої системи загальне число станів S одно MN. Наприклад, нехай деяка електронна система (рис. 2.2) складається з трьох блоків (N = 3) і кожен блок може перебувати в двох станах (M = 2, наприклад, включений і виключений). Для подібної системи маємо S = 23 = 8 станів. Максимальне число зв'язків в подібній системі дорівнює 6. Якщо поведінка системи описується процесом переходу блоку з одного стану в інший, то загальне число можливих переходів дорівнює S^2. Для розглянутого прикладу число сценаріїв можливої поведінки системи одно S = 8^2 = 64.

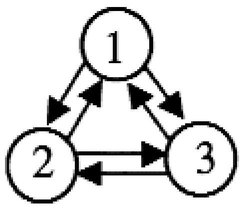

Рисунок 2.2 – Схема електронної системи

Поведінка системи швидко ускладнюється з ростом числа її елементів системи. Так, для системи з 10 елементів при M = 2 число станів S = 1024, а число сценаріїв дорівнює 1 048 576. Дана обставина, з одного боку, говорить про складність систем і багатоваріантності їх поведінки. З іншого боку, слід очікувати наявності великих труднощів, що виникають при вивченні та моделюванні систем.

Звичайно, поділ об'єктів дослідження на «прості» і «складні» умовно. Оскільки для будь-яких відомих процесів, явищ, матеріальних тіл неможливо виділити їх «елементарні цеглинки», «атоми», то будь-який об'єкт дослідження можна вважати нескінченно складним. Спрощення його будови при розробці моделі виконується в результаті відкидання малозначущих, несуттєвих для досягнення поставлених на даний момент цілей дослідження зв'язків між складовими об'єкт елементами. При зміні цілей дослідження або підвищенні вимог до точності і глибині моделі доводиться, як правило, переглядати рівень деталізації об'єкта.

Моделі об'єктів-систем, що враховують властивості і поведінку окремих елементів, а також взаємозв'язку між ними, називаються структурними

Серед структурних динамічних систем виділяють в окремий підклас імітаційні системи, що складаються з кінцевого числа елементів, кожен з яких має кінцеве число станів. Число зв'язків між елементами також передбачається кінцевим. Моделювання взаємодій елементів усередині системи здійснюється за допомогою деякого алгоритму, реалізованого зазвичай з використанням ЕОМ.

Для моделювання на ЕОМ реального часу вводиться поняття системного часу. В якості моделей окремих елементів можуть бути використані моделі будь-якого типу.

Як правило, взаємодія зовнішнього середовища зі складною системою повністю простежити не вдається, що призводить до невизначеності зовнішніх впливів і, як наслідок, неоднозначності в поведінці самої системи. Наявність такої невизначеності є характерною особливістю складних систем.

Класифікація математичних моделей в залежності від оператора моделі.

Вище зазначалося, що будь-яка математична модель може розглядатися як деякий оператор А, який є алгоритмом або визначається сукупністю рівнянь - алгебраїчних, звичайних диференціальних рівнянь (ОДУ), систем ОДУ (СЗДР), диференціальних рівнянь в приватних похідних (ДУЧП), інтегродиференціальних рівнянь (ІРУ) та ін. (Рис. 2.3)

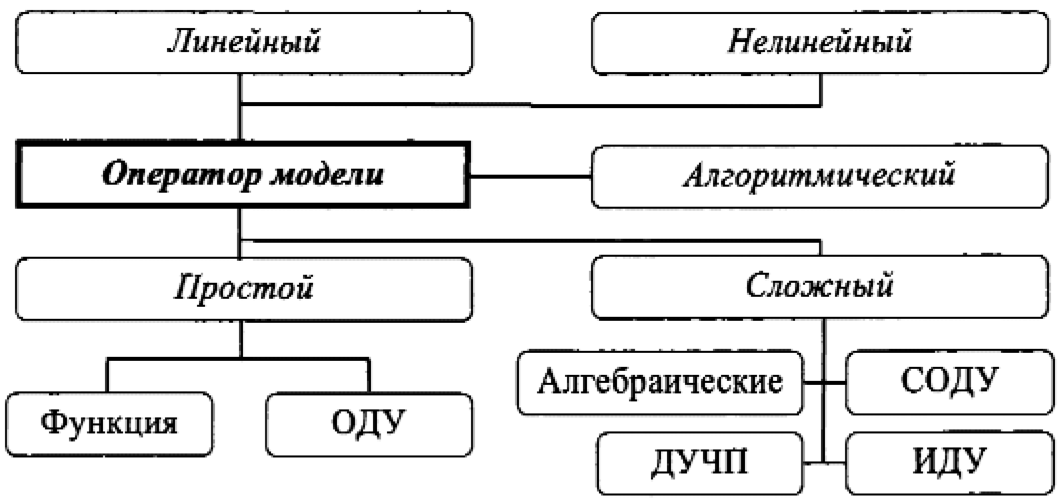

Рисунок 2.3 – Класифікація в залежності від оператора моделі

Якщо оператор забезпечує лінійну залежність вихідних параметрів У від значень вхідних параметрів Х, то математична модель називається **лінійною** (рис. 2.4). Лінійні моделі більш прості для аналізу. Наприклад, з властивості лінійності слід властивість суперпозиції рішень, тобто якщо відомі рішення Y_1 при X_1 і Y_2 при X_2, то рішення для вихідних параметрів при $X = X_1 + X_2$ є $Y = Y_1 + Y_2$. Граничні значення У для лінійних моделей досягаються, як правило, на кордонах областей Ω_x допустимих значень вхідних параметрів.

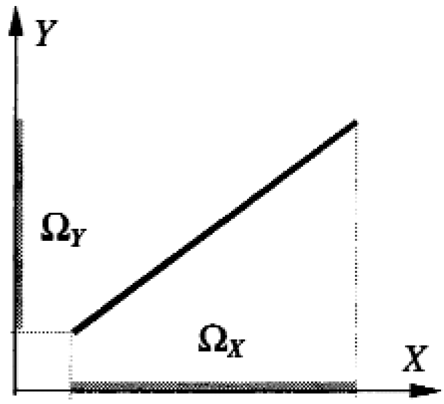

Рисунок 2.4 – Ілюстрація лінійної моделі

Історично першими стали розвиватись і досліджуватися саме лінійні математичні моделі. Область застосування подібних моделей дуже широка. Вона охоплює класичну механіку, електродинаміку, аналітичну хімію і біологію. Методи їх побудови, що розроблялися протягом століть, володіють великою спільністю і ефективністю.

Лінійна поведінка властива відносно простимоб'єктам. Системам, як правило, властиве нелінійне різноманітне поведінка (рис. 2.5).

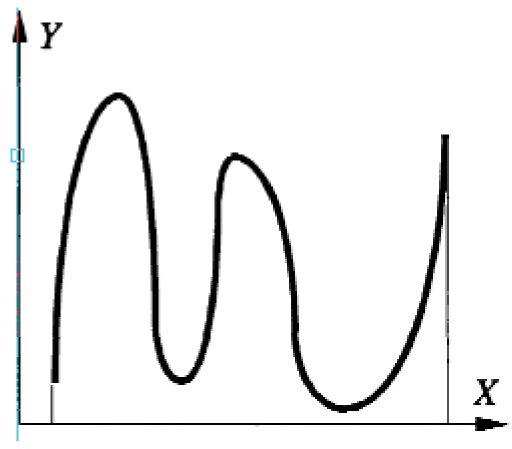

Рисунок 2.5 – Схематичне зображення нелінійної моделі

В даний час все частіше виникає потреба не тільки в підвищенні точності моделювання, а й у створенні якісно нових моделей, що враховують нелінійність поведінки реальних об'єктів дослідження. Аналіз подібних моделей набагато складніше, ніж лінійних, причому розробка методики і загальних підходів до дослідження в даний час далека від завершення. Будучи більш багатим і складним, світ нелінійних моделей представляється для сучасної науки більш перспективним в плані відкриття нових закономірностей і опису складних явищ. Наприклад, такі явища, як солітони і хаос, не можна з достатнім ступенем адекватності описати в рамках традиційних лінійних моделей. Методи дослідження нелінійних моделей в даний час швидко прогресують, складаючись в нові наукові напрямки. До таких щодо нових напрямків можна віднести, наприклад, синергетику - науку про складні системи, що самоорганізуються.

Залежно від виду оператора математичні моделі можна розділити на прості і складні.

У разі, коли оператор моделі є алгебраїчним виразом, що відображає функціональну залежність вихідних параметрів У від вхідних X, модель будемо називати простий.

Прості моделі найчастіше є результатом узагальнення і аналізу експериментальних даних, отриманих в результаті спостережень за досліджуваним об'єктом або явищем. На підставі аналізу таких даних висувається гіпотеза про можливу функціональної зв'язку вхідних і вихідних параметрів. Після цього гіпотеза перевіряється на наявному експериментальному матеріалі, уточнюється ступінь її адекватності, тобто ступінь відповідності результатів моделювання, отриманих із застосуванням даної гіпотези, які є знань про досліджуваний об'єкт. Якщо результати перевірки незадовільні, то прийнята гіпотеза відкидається і замінюється новою. Процес повторюється до отримання бажаного ступеня відповідності результатів експерименту і моделі.

Як приклади простих моделей можна привести багато законів фізики (закон всесвітнього тяжіння, закон Ома, закон Гука, закон тертя Амонтона-Кулона), а також всі емпіричні, тобто отримані з досвіду, алгебраїчні залежності між вхідними та вихідними параметрами. Так, в теорії різання металів дуже часто використовуються співвідношення, що ставлять час і вартість обробки деталі на верстаті в залежність від швидкостей її обертання (швидкості різання) і осьового переміщення (швидкості подачі) різця.

Модель, що включає системи диференціальних і інтегральних співвідношень, вже не може бути віднесена до простих, так як для свого дослідження вимагає застосування досить складних математичних методів. Однак в двох випадках вона може бути зведена до простих:

1) якщо отримана для подібної моделі система математичних співвідношень може бути дозволена аналітично;

2) якщо результати обчислювальних експериментів зі складною моделлю апроксимувати деякою алгебри залежністю. В даний час відомо досить велика кількість підходів і методів апроксимації (наприклад, метод найменших квадратів або метод планування експериментів).

На практиці досить часто виникають ситуації, коли задовільний опис властивостей і поведінки об'єкта моделювання (як правило, складної системи) не вдається виконати за допомогою математичних співвідношень. Однак в більшості випадків вдається побудувати деякий імітатор поведінки і властивостей такого об'єкта за допомогою алгоритму, який можна вважати оператором моделі.

Наприклад, якщо в результаті спостереження за об'єктом отримана таблиця відповідності між вхідними X і вихідними Y значеннями параметрів, то визначити оператор А, що дозволяє отримати «вихід» по заданому «входу», часто буває простіше за допомогою алгоритму.

Класифікація математичних моделей в залежності від параметрів моделі

У загальному випадку параметри, що описують стан і поведінку об'єкта моделювання, розбиваються на ряд непересічних підмножин:

- сукупність вхідних (керованих) впливів на об'єкт (Ω_x)
- сукупність впливів зовнішнього середовища (некерованихбΩ_E)
- сукупність внутрішніх (власних) параметрів об'єкта (Ω_I);
- сукупність вихідних характеристик (Ω_Y).

Рисунок 2.6 – Класифікація математичних моделей в залежності від параметрів моделі

Наприклад, при моделюванні руху твердого тіла в атмосферу в поле сил тяжіння вхідними параметрами можуть бути початкове положення і початкова швидкість точки, прийнятої за полюс, а також кутова швидкість в момент часу $t = 0$. Сила опору і сила тяжіння характеризують вплив зовнішнього середовища. Маса тіла і його форма є власними параметрами тіла. Координати і швидкості точок тіла (при $t > 0$) відносяться до вихідних параметрів.

У той же час віднесення параметрів до вхідних або вихідних залежить від постановки конкретного завдання. Наприклад, у наведеному прикладі можна переформулювати задачу, зробивши її зворотного до вихідної: визначити початкове положення і швидкості (лінійну швидкість полюса і кутову швидкість тіла) по заданому положенню і швидкостям в момент часу $t_1 > 0$. Зрозуміло, що в даному випадку вхідні і вихідні параметри міняються місцями.

Вхідні параметри X, параметри, що описують вплив зовнішнього середовища E, і внутрішні (власні) характеристики I об'єкта відносять зазвичай до незалежних (екзогенних) величинам. Вихідні параметри Y – залежні (ендогенні) величини.

У загальному випадку оператор моделі A перетворює екзогенні параметри в ендогенні A: $\{X, E, I\} \to Y$.

Слід зазначити, що введені тут внутрішні характеристики, які є незалежними (від зовнішніх впливів) величинами, не слід змішувати з так званими внутрішніми змінними, широко використовуються в механіці суцільних середовищ, термодинаміки та інших природно-наукових дисциплінах. До таких внутрішніх змінним відноситься, наприклад, щільність дислокацій в моделях фізики твердого тіла і мезомеханікі, яка, безумовно, залежить від зовнішніх впливів.

Кількість параметрів всіх типів в математичних моделях, як правило, звичайно (хоча параметри або функції можуть належати будь-якій безконечномірний функціональному простору). При цьому кожен з параметрів може мати різну «математичну природу»: бути постійною величиною або функцією, скаляром або вектором (або тензором другого, третього і вище рангів), чітким або нечітким безліччю і т.д. У математичних моделях, що розглядаються в природних науках, найбільш поширеними є параметри, які є тензор-знач-ними функціями (нагадаємо, що скаляр - тензор нульового рангу, а вектор - тензор першого рангу). В якості незалежних змінних (аргументів) при цьому зазвичай виступають координати точок тривимірного простору і/або час (або деякий неспадаючий параметр - аналог часу).

За своєю природою характеристики об'єкта можуть бути як якісними, так і кількісними. Введення тих чи інших кількісних характеристик об'єкта моделювання можливо при наявності еталона порівняння. Наприклад, для характеристики розмірів тіла використовується еталонний зразок - метр. Для кількісної характеристики вводяться числа, що виражають ставлення між даними параметром і еталоном. Крім того, кількісні значення параметра можуть виражатися дискретними або безперервними величинами. Якісні характеристики знаходяться, наприклад методом експертних оцінок. Залежно від виду використовуваних множин параметрів моделі можуть поділятися на якісні і кількісні, дискретні і безперервні, а також змішані.

При побудові моделей реальних об'єктів і явищ дуже часто доводиться стикатися з браком інформації. Як правило, для будь-якого досліджуваного об'єкта розподіл властивостей, параметри впливу і початковий стан відомі з тим або іншим ступенем невизначеності. Це пов'язано з великою кількістю важко прогнозованих факторів, обмеженістю числа використовуваних параметрів моделі, кінцевою точністю експериментальних вимірювань. При побудові моделі можливі наступні варіанти опису невизначеності параметрів:

1) детерміноване – значення всіх параметрів моделі визначаються детермінованими величинами (тобто кожному параметру відповідає конкретне

ціле, дійсне або комплексне число або відповідна функція). Даний спосіб відповідає повної визначеності параметрів;

2) стохастичне – значення всіх або окремих параметрів моделі визначаються випадковими величинами, заданими густиною ймовірності. У літературі найбільш повно досліджені випадки нормального (гаусова) і показового розподілу випадкових величин;

3) випадкове - значення всіх або окремих параметрів моделі встановлюються випадковими величинами, заданими оцінками щільності ймовірності, отриманими в результаті обробки обмеженою експериментальної вибірки даних параметрів. Ця форма опису тісно пов'язана з попередньою. Однак в даному випадку отримані результати моделювання будуть істотно залежати від точності оцінок моментів і щільності ймовірності випадкових параметрів, від постуліруемих законів розподілу і обсягу вибірок;

4) інтервальний - значення всіх або окремих параметрів моделі описуються інтервальними величинами, заданими інтервалом, утвореним мінімальним і максимально можливими значеннями параметра;

5) нечітке - значення всіх або окремих параметрів моделі описуються функціями належністю відповідному нечіткій множині. Така форма використовується, коли інформація про параметри моделі задається експертом природною мовою, а отже, в «нечітких» (з позиції математики) термінах типу «багато більше п'яти», «близько нуля».

Класифікація математичних моделей в залежності від цілей моделювання

Метою дескриптивних моделей (від лат. Descriptio - опис) є встановлення законів зміни параметрів моделі. Як приклад такої моделі можна привести модель руху матеріальної точки під дією прикладених сил, що використовує другий закон Ньютона. Ставлячи положення і швидкість точки в початковий момент часу (вхідні параметри), масу (власний параметр) і закон зміни яких докладають сил (зовнішні впливи), можна визначити швидкість і координати матеріальної точки в будь-який момент часу (вихідні параметри). Отримана модель описує залежність вихідних параметрів від вхідних. Тому дескриптивні моделі є реалізацією описових і пояснювальних змістовних моделей на формальному рівні моделювання.

Інший приклад дескриптивної моделі - модель руху ракети після старту з поверхні Землі. Як параметри моделі в даному випадку можуть виступати початкове положення і початкова швидкість ракети (вхідні), її початкова маса, імпульс двигуна, режим його роботи (власні параметри), закон зміни сил тяжіння і сил опору атмосфери (зовнішні впливи). Вихідними параметрами будуть положення і швидкість центру мас ракети і її орієнтація в просторі в довільний момент часу.

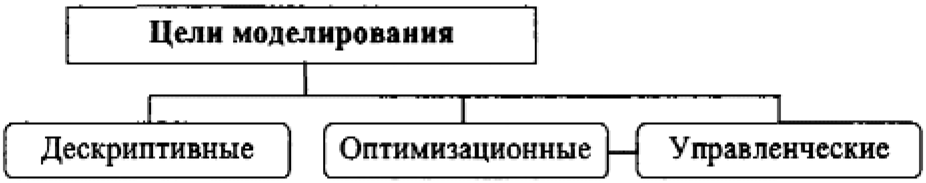

Рисунок 2.7 – Класифікація математичних моделей в залежності від цілей моделювання

Оптимізаційні моделі призначені для визначення оптимальних (найкращих) з точки зору деякого критерію параметрів модельованого об'єкта або ж для пошуку оптимального (найкращого) режиму управління деяким процесом. Частина параметрів моделі відносять до параметрів управління, змінюючи які можна отримувати різні варіанти наборів значень вихідних параметрів. Як правило, дані моделі будуються з використанням однієї або декількох дескриптивних моделей і включають деякий критерій, що дозволяє порівнювати різні варіанти наборів значень вихідних параметрів між собою з метою вибору найкращого. На область значень вхідних параметрів можуть бути накладені обмеження у вигляді рівностей і нерівностей, пов'язані з особливостями розглянутого об'єкта або процесу. Метою оптимізаційних моделей є пошук таких допустимих параметрів управління, при яких критерій вибору досягає свого «найкращого значення».

Прикладом оптимізаційної моделі може служити моделювання процесу запуску ракети з поверхні Землі з метою піднесення її на задану висоту за мінімальний час при обмеженнях на величину імпульсу двигуна, час його роботи, початкову і кінцеву масу ракети. Математичні співвідношення дескриптивної моделі руху ракети виступають в даному випадку у вигляді обмежень типу рівностей.

Відзначимо, що для більшості реальних процесів, конструкцій потрібно визначення оптимальних параметрів відразу за кількома критеріями, тобто ми маємо справу з так званими багатокритеріальної задачі оптимізації. При цьому нерідкими є ситуації суперечливості критеріїв; наприклад, при оптимізації конструкції рами вантажного автомобіля можна вимагати максимальної жорсткості, мінімальної маси і мінімальної вартості. Для вирішення подібних завдань використовуються спеціальні методи і алгоритми.

Керуючі моделі застосовуються для прийняття ефективних управлінських рішень в різних областях цілеспрямованої діяльності людини. У загальному випадку прийняття рішень є процесом, за своєю складністю можна порівняти з процесом мислення в цілому. Однак на практиці під прийняттям рішень зазвичай розуміється вибір деяких альтернатив із заданого їх безлічі, а загальний процес прийняття рішень представляється як послідовність таких виборів альтернатив. Наприклад, на підприємстві звільнилася посада головного інженера, і завдання директора полягає у виборі з наявного безлічі кандидатів на цю посаду одного, що відповідає заданим вимогам. Складність завдання полягає в наявності невизначеності як по вихідної інформації (неповні дані про кандидатів) і характером впливу зовнішніх умов (випадкове: обраний кандидат захворів або відмовився; ігрове: міністерство проти обраної кандидатури), так і за цілями (суперечливі вимоги до обраній кандидатурі: повинен бути хорошим фахівцем і адміністратором, досвідчений, енергійний, молодий і ін.). Тому на відміну від оптимізаційних моделей, де критерій вибору вважається певним і шукане рішення встановлюється з умов його екстремальності, в управлінських моделях необхідне введення специфічних критеріїв оптимальності, які дозволяють порівнювати альтернативи при різних невизначеностей завдання.

Оскільки оптимальність прийнятого рішення навіть в одній і тій же ситуації може розумітися по-різному, вид критерію оптимальності в управлінських моделях заздалегідь не фіксується. Саме в цьому полягає основна особливість даних моделей.

<u>Класифікація математичних моделей в залежності від методів реалізації</u>

Метод реалізації моделі відносять до аналітичних, якщо він дозволяє отримати вихідні параметри у вигляді аналітичних виразів, тобто виразів, в яких використовується не більше ніж лічильна сукупність арифметичних операцій і переходів до межі.

Рисунок 2.8 – Класифікація математичних моделей в залежності від методів реалізації

Приклади аналітичних виразів:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k x^k}{x^k+1}, \quad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n. \tag{2.2}$$

Окремим випадком аналітичних виразів є алгебраїчні вирази, в яких використовується кінцеве або рахункове число арифметичних операцій, операції зведення в цілочисельну ступінь і добування кореня. Приклади виразів алгебри:

$$ax^2+bx+c, \quad a+b\sqrt{x^3+4ac}. \tag{2.3}$$

Дуже часто аналітичне рішення для моделі представляють в елементарних або спеціальних функціях: показових, логарифмічних, тригонометричних, гіперболічних і т.п. Для отримання значень цих функцій при конкретних значеннях вхідних параметрів використовують їх розкладання в ряди (наприклад, Тейлора). Так, показова функція може бути представлена наступним рядом:

$$e^x = 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots. \tag{2.4}$$

З огляду на різне число членів ряду, можна обчислювати значення функції з різним ступенем точності. Наприклад, облік перших шести членів ряду в розкладанні показовою функції забезпечує точність в 10 ~ 4, а перших десяти - 10 ~ 8. Таким чином, значення функції при кожному значенні аргументу в цьому випадку визначається наближено. Моделі, які використовують подібний прийом, називаються наближеними.

Аналітичні методи реалізації моделі є більш цінними в тому плані, що дозволяють з меншими обчислювальними витратами вивчити властивості об'єкта моделювання, застосовуючи традиційні добре розвинені математичні методи аналізу аналітичних функцій. Істотно, що застосування аналітичних методів можливо без використання ЕОМ (за винятком випадків, коли аналітичне рішення визначається в рядах і для його доведення до числа потрібні трудомісткі обчислення із застосуванням ЕОМ). Крім того, знання аналітичного виразу для шуканих параметрів дозволяє досліджувати фундаментальні властивості об'єкта, його якісне поведінку, будувати нові гіпотези про його внутрішню структуру. Слід зазначити, що можливості аналітичних методів істотно залежать від рівня розвитку відповідних розділів математики.

В даний час потужний сплеск інтересу до аналітичних методів при реалізації моделей пов'язаний з появою пакетів математичних обчислень (Derive, MatLab, Mathcad, Maple, Mathematica, ScientificWorkplace і ін.). Спектр вирішуваних цими пакетами завдань дуже великий і постійно розширюється (елементарна математика, символьні операції з поліномами, похідними і інтегралами, з векторами і матрицями, задачі теорії поля і векторного аналізу, метод кінцевих елементів і т.п.). Застосування подібних програмних засобів не тільки спрощує процедуру отримання аналітичного рішення, а й полегшує подальший аналіз отриманого рішення із застосуванням різного роду візуалізаторів.

На жаль, існуючі в даний час математичні методи дозволяють отримати аналітичні рішення тільки для відносно нескладних математичних моделей у вузькому діапазоні значень параметрів. У більшості випадків при дослідженні моделей доводиться використовувати алгоритмічні підходи, що дозволяють отримати лише наближені значення шуканих параметрів.

При чисельному підході сукупність математичних співвідношень моделі замінюється конечномірнім аналогом. Це найчастіше досягається дискретизацією вихідних співвідношень, тобто переходом від функцій безперервного аргументу до функцій дискретного аргументу. Після дискретизації вихідної завдання виконується побудова обчислювального алгоритму, тобто послідовності арифметичних і логічних дій, виконуваних на ЕОМ і дозволяють за кінцеве число кроків отримати рішення дискретної задачі. Знайдене рішення дискретної задачі приймається за наближене рішення початкової математичної задачі.

Ступінь наближення визначаються за допомогою чисельного методу шуканих параметрів моделі залежить як від похибок самого методу, пов'язаних із заміною вихідної моделі її дискретним аналогом, так і від помилок округлення, що виникають при виконанні будь-яких розрахунків на ЕОМ в зв'язку з кінцевою точністю представлення чисел в її пам'яті. Основною вимогою до обчислювальному алгоритму є необхідність отримання рішення вихідної завдання з заданою точністю за кінцеве число кроків.

До теперішнього часу коло питань, пов'язаних з розробкою і використанням чисельних методів, а також з побудовою на їх основі обчислювальних алгоритмів, виділився в самостійний швидко розвивається і великий розділ - обчислювальну математику.

Якщо при чисельному підході дискретизації піддавалася отримана система математичних співвідношень, то при імітаційному підході на окремі елементи розбивається сам об'єкт дослідження. В цьому випадку система математичних співвідношень для об'єкта-системи в цілому не записується, а замінюється деяким алгоритмом, що моделює її поведінку і враховує взаємодію один з одним моделей окремих елементів системи. Моделі окремих елементів можуть бути як аналітичними, так і алгоритмічними.

Алгоритмічні моделі, що використовують як чисельний, так і імітаційний підхід, не дозволяють отримати рішення задач в аналітичній формі, що ускладнює і ускладнює процес аналізу результатів моделювання. Так як застосування моделей даного типу можливо лише при наявності обчислювальної техніки, то їх ефективність залежить від потужності і швидкодії ЕОМ. Безсумнівним достоїнством алгоритмічних моделей є відсутність принципових обмежень на складність моделі, що дозволяє застосовувати їх для дослідження систем довільної складності.

Використання математичної моделі, побудованої алгоритмічними методами, це проведення експериментів з реальним об'єктом, тільки замість реального експерименту з об'єктом проводиться обчислювальний експеримент з його моделлю. Переймаючись конкретним набором значень вихідних параметрів моделі, в результаті обчислювального експерименту знаходимо конкретний набір наближених значень шуканих параметрів. Для дослідження поведінки об'єкта при новому наборі вихідних даних необхідно проведення нового обчислювального експерименту.

2.4 Етапи побудови математичних моделей, вибір метода рішення задачі, перевірка адекватності моделі

Процес створення математичних моделей трудомісткий, тривалий і пов'язаний з використанням праці різних фахівців досить високого рівня, що володіють хорошою підготовкою як в предметної області, пов'язаної з об'єктом моделювання, так і в галузі прикладної математики, сучасних чисельних методів, програмування, знають можливості і особливості сучасної обчислювальної техніки. Відмінною особливістю математичних моделей, що створюються в даний час, є їх комплексність, пов'язана зі складністю модельованих об'єктів. Наприклад, при моделюванні процесів деформування різних конструкцій під дією прикладеного навантаження доводиться враховувати не тільки відбуваються при деформації процеси масопереносу, а й теплоперенос, а також пов'язані з цими процесами зміни структури і властивостей матеріалу.

У деяких випадках необхідно враховувати вплив різних видів випромінювання, впливу гравітаційних і електромагнітних полів, передісторії деформування. Крім того, для сучасних моделей характерно уявлення об'єкта моделювання у вигляді більш-менш складної системи взаємодіючих елементів.

Всі зазначені вище особливості призводять до ускладнення моделі і необхідності спільного використання декількох теорій (нерідко - з різних областей знання), застосування сучасних обчислювальних методів і обчислювальної техніки для отримання і аналізу результатів моделювання.

Впровадження обчислювальної техніки в усі сфери людської діяльності призвело до повсюдного використання математичних моделей. Зауважимо, що ЕОМ - це тільки «залізо», а «розумним» і корисним його роблять програми, які в більшості випадків є реалізаціями алгоритмів відповідних математичних моделей. Тому необхідне створення великої кількості різноманітних математичних моделей з широкими можливостями, що відповідають різним, часто суперечливим, вимогам. У разі складних об'єктів задовольнити всім вимогам, що пред'являються в одній моделі зазвичай неможливо. Доводиться створювати цілий спектр моделей одного і того ж об'єкта (в деяких випадках - ієрархічну сукупність «вкладених» одна в іншу моделей), кожна з яких найбільш ефективно вирішує покладені на неї завдання. Наприклад, в конструкторської та технологічної практиці, як правило, застосовується широкий спектр моделей - від простих розрахункових формул (частина з яких представляє собою апроксимацію експериментальних даних) на початковій стадії до вельми складних моделей, що наближаються до дослідницьких, - на завершальній стадії розробки конструкції або технологічного процесу.

Моделі, орієнтовані на дослідницькі цілі, здатні представляти об'єкт в широкому діапазоні вихідних параметрів з задовільною точністю. При цьому практично немає обмежень за складністю подібної моделі, а також час, що витрачається на отримання результатів.

Дослідницькі моделі можуть бути орієнтовані як на кількісні, так і на якісні результати. До моделей, що використовуються в автоматизованих системах управління (АСУ), на відміну від дослідницьких, пред'являються досить жорсткі обмеження щодо часу, що витрачається на отримання результатів, а також точності самих результатів.

Необхідність масового побудови моделей вимагає розробки деякої сукупності правил і підходів, які дозволили б знизити витрати на розробку моделей і зменшити ймовірність появи важко усунених згодом помилок. Подібну сукупність правил можна було б назвати технологією створення математичних моделей.

Процес побудови будь-якої математичної моделі можна уявити послідовністю етапів, представлених на рис. 2.8.

Рисунок 2.8 – Етапи побудови математичних моделей

Обстеження об'єкту моделювання

Математичні моделі, особливо ті, які використовують чисельні методи і обчислювальну техніку, вимагають для свого побудови значних інтелектуальних, фінансових і тимчасових витрат. Тому рішення про розробку нової моделі приймається лише в разі відсутності інших, більш простих шляхів вирішення виниклих проблем (наприклад, модифікації однієї з існуючих моделей). Необхідність у новій моделі може з'явитися в зв'язку з проведенням наукових досліджень (особливо - на стику різних галузей знань), виконанням проектних і конструкторських робіт на виробництві, створенням систем автоматичного управління, планування і контролю. Людину або організацію, зацікавлених в розробці нової математичної моделі, для стислості будемо називати замовником. Після прийняття рішення про необхідність побудови нової математичної моделі замовник шукає виконавця свого замовлення. В якості виконавця, як правило, може виступати робоча група, що включає фахівців різного профілю: прикладних математиків, фахівців, які добре знають особливості об'єкта моделювання, програмістів.

Отже, якщо рішення про створення моделі прийнято і робоча група сформована, то можна приступати до етапу обстеження об'єкта моделювання.

Основною метою даного етапу є підготовка змістовної постановки задачі моделювання.

Перелік сформульованих у змістовній (словесної) формі основних питань про об'єкт моделювання, що цікавлять замовника, становить змістовну постановку задачі моделювання.

Підготовка переліку питань, на які повинна відповісти нова модель, часто є самостійною проблемою, яка потребує для свого вирішення фахівців зі специфічними знаннями та здібностями. Вони повинні не тільки добре розбиратися в предметної області моделювання, знати можливості сучасної обчислювальної математики і техніки, а й бути досить комунікабельними, тобто вміти спілкуватися з людьми, «розговорити» практиків, добре «відчувають» об'єкт моделювання, нюанси його поведінки. Подібних фахівців в даний час називають постановниками задач.

На підставі аналізу всієї зібраної інформації постановник завдання повинен сформулювати такі вимоги до майбутньої моделі, які, з одного боку, задовольняли б замовника, а з іншого - дозволяли б реалізувати модель в задані терміни і в рамках виділених коштів.

Фахівці-постановники повинні мати здатність з великого обсягу слабо формалізованої різноманітної інформації про об'єкт моделювання, з різних нечітко висловлених і сформульованих побажань і вимог замовника до майбутньої моделі виділити те головне, що може бути дійсно реалізовано. З перерахованих вимог, що пред'являються до постановникам завдань, видно, наскільки велика покладена на них відповідальність і наскільки можуть бути важкі допущені ними помилки і прорахунки. Неправильна оцінка терміну і вартості реалізації необхідної моделі може привести до невдачі всього проекту, до марної втрати часу і коштів.

Фахівці, схильні до роботи в якості постановників завдань, особливо цінуються і є, без перебільшення, золотим фондом наукових колективів. З цього приводу Г.Біркгофр зазначає, що прикладники-математики, «здатні до глибокого спілкування з іншими вченими і інженерами і знайомі з міццю і обмеженнями цифрових машин, ... покликані стати вождями завтрашнього математичного світу, але їх буде вкрай важко знайти і розвинути ». З урахуванням даного висловлювання, а також маючи на увазі кінцеву мету діяльності робочої групи - побудова математичної моделі, - представляється доцільним рекомендувати в якості керівника групи саме прикладника-математика.

Етап обстеження проводиться членами робочої групи під керівництвом постановників завдань і включає наступні роботи:

> Ретельне обстеження власне об'єкта моделювання з метою виявлення основних факторів, механізмів, що впливають на його поведінку, визначення відповідних параметрів, що дозволяють описувати модельований об'єкт;

> Збір та перевірка наявних експериментальних даних про об'єкти-аналоги, проведення при необхідності додаткових експериментів;

> Аналітичний огляд літературних джерел, аналіз і порівняння між собою побудованих раніше моделей даного об'єкта (або подібних даного об'єкту);

> Аналіз і узагальнення всього накопиченого матеріалу, розробка загального плану створення математичної моделі.

На основі зібраної інформації про об'єкт моделювання постановники спільно з замовником формулюють змістовну постановку задачі моделювання, яка, як правило, не буває остаточною і може уточнюватися і конкретизуватися в процесі розробки моделі. Однак, з урахуванням викладеного вище, всі наступні уточнення і зміни змістовної постановки повинні носити приватний, не принципове характер. Якщо об'єктом моделювання є технологічний процес, машина, конструкція або деталь, то змістовну постановку задачі моделювання дуже часто називають технічною постановкою завдання.

Весь зібраний в результаті обстеження матеріал про накопичених до даного моменту знаннях про об'єкт, змістовна постановка задачі моделювання, додаткові вимоги до реалізації моделі і представлення результатів оформляються у вигляді технічного завдання на проектування та розробку моделі.

Технічне завдання є підсумковим документом, що закінчують етап обстеження, який, як уже зазначалося, є дуже важливим і відповідальним. Чим повнішу інформацію вдасться зібрати про об'єкт на етапі обстеження, тим чіткіше можна виконати змістовну постановку задачі, більш повно врахувати накопичений досвід і знання, уникнути багатьох складнощів на наступних етапах розробки моделі. Особливо суворо необхідно формулювати вимоги до майбутньої моделі. Неконкретні і нечіткі вимоги можуть серйозно ускладнити процес здачі моделі замовнику, викликати нескінченні доопрацювання і поліпшення. В цілому етап опрацювання технічного завдання може становити до 30% часу, відпущеного на створення всієї моделі, і навіть більше - з урахуванням можливого уточнення і переформулювання.

Розуміючи величезну важливість даного етапу, технічне завдання слід піддавати внутрішньої (всередині організації) і зовнішньої експертизи незалежними експертами, які брали участі в його розробці. Обов'язковою умовою на етапі розробки технічного завдання є участь в його обговоренні всіх членів робочої групи. Нижче наведено приклад змістовної постановки задачі про баскетболіста.

Приклад. Змістовна постановка задачі про баскетболіста. Розробити математичну модель, що дозволяє описати політ баскетбольного м'яча, кинутого гравцем в баскетбольну корзину.

Модель повинна дозволяти:

• обчислювати положення м'яча в будь-який момент часу;

• визначати точність попадання м'яча в кошик після кидка при різних початкових параметрах.

Початкові дані:

• маса і радіус м'яча;

• початкові координати, початкова швидкість і кут кидка м'яча;

• координати центру і радіус кошика.

Концептуальна постановка задачі моделювання

На відміну від змістовної концептуальна постановка задачі моделювання, як правило, формулюється членами робочої групи без залучення представників замовника, на підставі розробленого на попередньому етапі технічного завдання, з використанням наявних знань про об'єкт моделювання і вимог до майбутньої моделі.

Аналіз і спільне обговорення членами робочої групи всієї наявної інформації про об'єкт моделювання дозволяє сформувати змістовну модель об'єкта, що є синтезом когнітивних моделей, що склалися у кожного з членів робочої групи. На підставі змістовної моделі розробляється концептуальна, або «природно-наукова» (фізична, хімічна, біологічна і т.д.), постановка задачі моделювання, що служить основою для концептуальної моделі об'єкта.

Концептуальна постановка задачі моделювання - це сформульоване в термінах конкретних дисциплін (фізики, хімії, біології і т.д.) перелік основних питань, що цікавлять замовника, а також сукупність гіпотез щодо властивостей і поведінки об'єкта моделювання.

Найбільші труднощі при формулюванні концептуальної постановки доводиться долати в моделях, які перебувають на «стику» різних дисциплін. Відмінності традицій, понять і мов, які використовуються для опису одних і тих же об'єктів, є дуже серйозними перешкодами, що виникають при створенні «міждисциплінарних» моделей. Наприклад, такі поняття як «прибуток» і «баланс» викликають абсолютно різні асоціації у економіста і математика-прикладника.

Можна сказати, що когнітивні моделі, які стоять за цими поняттями, у цих двох фахівців абсолютно різні. Якщо економіст, кажучи про прибуток і балансі, пов'язує з цими поняттями конкретне виробництво, ціну та собівартість продукції, то для математика дані поняття виглядають більш формально - як результати вирішення деяких математичних рівнянь. При цьому практично неможливо навчити математика мислити як економіста, а економіста - як математика. І той, і інший спосіб сприйняття має свої переваги і недоліки. Економіст ніколи не зробить помилок, які може допустити математик, звертаючись з параметрами моделі формально, без належних знань у розглянутій предметній області. У той же час, використовуючи формальні перетворення математичних співвідношень, математик може отримати рішення, які дуже складно отримати економісту, котра має своїми підходами і методами (зазвичай більш простими з точки зору математики). Тому ефективність діяльності робочої групи в великій мірі залежить від здатності її членів поставити себе на місце фахівця іншого профілю, вивчити його точку зору (тобто особливості його когнітивної моделі) і знайти певний компроміс, що враховує все цінне.

Вище зазначалося, що концептуальна модель будується як деяка ідеалізована модель об'єкта, записана в термінах конкретних (наприклад, природничо-наукових) дисциплін. Для цього формулюється сукупність гіпотез про поведінку об'єкта, його взаємодії з навколишнім середовищем, зміні внутрішніх параметрів. Як правило, ці гіпотези правдоподібні в тому сенсі, що для їх обгрунтування можуть бути приведені деякі теоретичні доводи і використані експериментальні дані, засновані на зібраної раніше інформації про об'єкт. У виборі і обгрунтуванні прийнятих гіпотез у значній мірі проявляється мистецтво, досвід і знання, накопичені членами робочої групи. Згідно з прийнятими гіпотезами визначається безліч параметрів, що описують стан об'єкта, а також перелік законів, які керують зміною і взаємозв'язком цих параметрів між собою.

Приклад. Концептуальна постановка задачі про баскетболіста. Рух баскетбольного м'яча може бути описано в відповідності до законів класичної механіки Ньютона (рис. 2.9).

Приймемо наступні гіпотези:

• об'єктом моделювання є баскетбольний м'яч радіуса R;

• м'яч вважатимемо матеріальною точкою масою m, положення якої збігається з центром мас м'яча;

• рух відбувається в поле сил ваги з постійним прискоренням вільного падіння g і описується рівняннями класичної механіки Ньютона;

• рух м'яча відбувається в одній площині, перпендикулярній поверхні Землі і проходить через точку кидка і центр кошика;

• нехтуємо опором повітря і збуреннями, викликаними власним обертанням м'яча навколо центру мас.

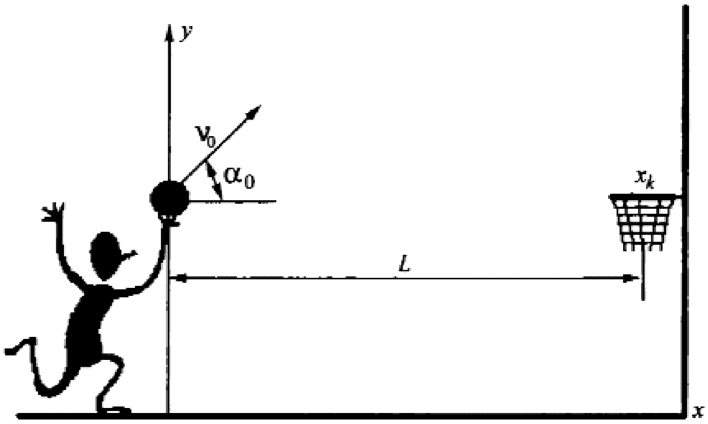

Рисунок 2.9 – Схема до постановки задачі про баскетболіста

Відповідно до викладеного гіпотезами в якості параметрів руху м'яча можна використовувати координати (x і y) і швидкість (її проекції v_x і v_y) центру мас м'яча. Тоді для визначення положення м'яча в будь-який момент часу достатньо знайти закон руху центру мас м'яча, тобто залежність координат x, y і проекцій вектора швидкості v_x і v_y центру м'яча від часу. В якості оцінки точності кидка A можна розглядати величину відстані по горизонталі (уздовж осі x) від центру кошика до центру м'яча в момент, коли останній перетинає горизонтальну площину, що проходить через площину кільця кошика.

З урахуванням вищевикладеного можна сформулювати концептуальну постановку задачі про баскетболіста в наступному вигляді: визначити закон руху матеріальної точки масою m під дією сили тяжіння, якщо відомі початкові координати точки x_0 і y_0, її початкова швидкість v_0 і кут кидання α_0. Центр кошика має координати $x_к$ і $y_к$. Обчислити точність кидка $\Delta = x(t_k) - x_к$, де t_k визначається з умов: $t_k > 0$, $v_y < 0$, $y(t_k) = y_к$.

Розглянемо особливості наведеної в прикладі концептуальної постановки завдання про баскетболіста. Перша з перерахованих гіпотез особливо важлива, так як вона виділяє об'єкт моделювання. В даному випадку об'єкт можна вважати простим. Однак в якості об'єкта моделювання можна розглядати систему «гравець - м'яч -кільце». Необхідна для опису подібної системи модель буде вже набагато складніше, тому що гравець в свою чергу представляє складну біомеханічну систему і його моделювання є далеко не тривіальним завданням. У даній ситуації вибір в якості об'єкта моделювання тільки м'яча обгрунтований, оскільки саме його рух потрібно досліджувати, а вплив гравця можна врахувати досить просто через початкові параметри кидка. Для складних систем вибір об'єкта моделювання - далеко не проста і неоднозначна завдання.

Гіпотеза про те, що м'яч можна вважати матеріальною точкою, широко застосовується для дослідження рухів тіл в механіці. В даному випадку вона виправдана в силу симетрії форми м'яча і малості його радіуса в порівнянні з характерними відстанями переміщення м'яча. Передбачається, що останній є кулею з однаковою товщиною стінки.

Гіпотезу про можливість застосування в даному випадку законів класичної механіки можна обґрунтувати величезним експериментальним матеріалом, пов'язаним з вивченням руху тіл поблизу поверхні Землі зі швидкостями багато менше швидкості світла. З огляду на, що висота польоту м'яча лежить в межах 5-10 м, а дальність - 5-20 м, припущення про сталість прискорення вільного падіння також представляється обгрунтованим. Якби моделювався рух балістичної ракети при дальності і висоті польоту понад 100 км, то довелося б враховувати зміна прискорення вільного падіння в залежності від висоти і широти місця.

Гіпотеза про рух м'яча в площині, перпендикулярній поверхні Землі, обмежує клас даних траєкторій і значно спрощує модель. Траєкторія м'яча може не лежати в одній площині, якщо при кидку він сильно підкручує навколо вертикальної осі. В цьому випадку швидкості точок поверхні м'яча щодо повітря на різних сторонах м'яча будуть різні. Для точок, що рухаються назустріч потоку, ідносна швидкість вище, а
для точок протилежного боку, які рухаються по потоку, - нижче швидкості центру мас м'яча.

Відповідно до закону Бернуллі, тиск газу на поверхню більше там, де його відносна швидкість менше. Тому для ситуації, зображеної на рис. 2.10, на м'яч буде діяти додаткова сила, спрямована (для будь м'яча даної схеми) зверху вниз. Цей ефект буде потоком повітря проявлятися тим більше, чим більше швидкість центру мас м'яча і швидкість його обертання. Для баскетболу характерні відносно низькі швидкості польоту м'яча (до 10 м/с). При цьому досить рідко використовується підкрутка м'яча рукою. Тому гіпотеза про рух м'яча в одній площині здається виправданою. Її використання дозволяє відмовитися від побудови значно складнішою тривимірної моделі руху м'яча.

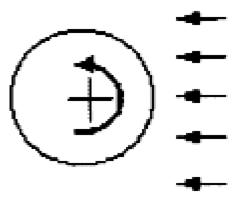

Рисунок 2.10 – Обтікання м’яча потоком повітря

Гіпотеза про відсутність впливу опору повітря найменш обгрунтована. При русі тіла в газі або рідини сила опору збільшується з ростом швидкості руху. З огляду на невисокі швидкості руху м'яча, його правильну обтічну форму і малі дальності кидків, зазначена гіпотеза може бути прийнята в якості першого наближення.

Слід зазначити, що концептуальна постановка задачі моделювання на відміну від змістовної постановки використовує термінологію конкретної дисципліни (в даному випадку - механіки). При цьому моделюється реальний об'єкт (м'яч) замінюється його механічної моделлю (матеріальною точкою). Фактично в наведеному прикладі концептуальна постановка звелася до постановки класичної задачі механіки про рух матеріальної точки в полі сил тяжіння. Концептуальна постановка більш абстрактна по відношенню до змістовної, так як матеріальної точки можна зіставити довільний матеріальний об'єкт, кинутий під кутом до горизонту: футбольний м'яч, ядро, камінь або артилерійський снаряд.

<u>Математична постановка завдання моделювання</u>

Закінчена концептуальна постановка дозволяє сформулювати математичну постановку задачі моделювання, що включає сукупність різних математичних співвідношень, що описують поведінку і властивості об'єкта моделювання.

Математична постановка задачі моделювання - це сукупність математичних співвідношень, що описують поведінку і властивості об'єкта моделювання.

Сукупність математичних співвідношень визначає вид оператора моделі. Найбільш простим буде оператор моделі в разі, якщо він представлений системою алгебраїчних рівнянь. Подібні моделі можна назвати моделями апроксимаційного типу, так як для їх отримання часто використовують різні методи апроксимації наявних експериментальних даних про поведінку вихідних параметрів об'єкта моделювання в залежності від вхідних параметрів і впливів зовнішнього середовища, а також від значень внутрішніх параметрів об'єкта.

Однак область застосування моделей подібного типу обмежена. Для створення математичних моделей складних систем і процесів, які можна застосувати для широкого класу реальних завдань потрібно, як уже зазначалося вище, залучення великого обсягу знань, накопичених в розглянутій дисципліни (а в деяких випадках і в суміжних областях). У більшості дисциплін (особливо природничо-наукових) ці знання сконцентровані в аксіомах, законах, теоремах, що мають чітку математичну формулювання.

Слід зазначити, що в багатьох областях знань (механіці, фізиці, біології тощо) прийнято виділяти закони, справедливі для всіх об'єктів дослідження даної галузі знань, і співвідношення, які описують поведінку окремих об'єктів або їх сукупностей. До числа перших в фізиці і механіки належать, наприклад, рівняння балансу маси, кількості руху, енергії і т.д., справедливі при певних умовах для будь-яких матеріальних тіл, незалежно від їх конкретного будови, структури, стану, хімічного складу. Рівняння цього класу підтверджені величезною кількістю експериментів, добре вивчені і в силу цього застосовуються у відповідних математичних моделях як даність. Співвідношення другого класу у фізиці і механіці називають визначальними, або фізичними рівняннями, або рівняннями стану. Вони встановлюють особливості поведінки матеріальних об'єктів або їх сукупностей (наприклад, рідин, газів, пружних або пластичних середовищ і т.д.) при впливах різних зовнішніх факторів.

Як класичні приклади визначальних співвідношень можна привести закон Гука в теорії пружності або рівняння Клапейрона для ідеальних газів. Очевидно, що визначають співвідношення повинні відображати реальний атомно-молекулярну будову досліджуваних матеріальних об'єктів.

Співвідношення другого класу набагато менш вивчені, а в ряді випадків їх доводиться встановлювати самому досліднику (особливо при аналізі об'єктів, що складаються з нових матеріалів). Необхідно відзначити, що визначають співвідношення - це основний елемент, «серцевина» будь-якої математичної моделі фізико-механічних процесів. Саме помилки у виборі або встановленні визначальних співвідношень призводять до кількісно (а в деяких випадках і якісно) невірних результатів моделювання.

Сукупність математичних співвідношень зазначених двох класів визначає оператор моделі. У більшості випадків оператор моделі включає в себе систему звичайних диференціальних рівнянь (ОДУ), диференціальних рівнянь в приватних похідних (ДУЧП) і/або інтегродиференціальних рівнянь (ІРУ). Для забезпечення коректності постановки задачі до системи ОДУ або ДУЧП додаються початкові і/або граничні умови, які, в свою чергу, можуть бути алгебраїчними або диференціальними співвідношеннями різного порядку.

Можна виділити кілька найбільш поширених типів завдань для систем ОДУ або ДУЧП:

> Задача Коші, або завдання з початковими умовами, в якій по заданих в початковий момент часу змінним (початковими умовами) визначаються значення цих шуканих змінних для будь-якого моменту часу;

> Початково-крайова, або крайова, завдання, коли умови на шукану функцію вихідного параметра задаються в початковий момент часу для всієї

просторової області і на кордоні останньої в кожен момент часу (на досліджуваному інтервалі);

> Завдання на власні значення, в формулювання яких входять невизначені параметри, які визначаються з умови якісної зміни поведінки системи (наприклад, втрата стійкості стану рівноваги або стаціонарного руху, поява періодичного режиму, резонанс і т.д.).

Для контролю правильності отриманої системи математичних співвідношень потрібне проведення ряду обов'язкових перевірок:

> Контроль розмірностей, що включає правило, згідно з яким прирівнюватися і складатися можуть лише величини однакової розмірності. При переході до обчислень дана перевірка поєднується з контролем використання однієї і тієї ж системи одиниць для значень всіх параметрів.

Контроль порядків, що складається з грубої оцінки порівняльних порядків складаються величин і винятком малозначущих параметрів. Наприклад, якщо для вираження $X+Y+ Z =0$ в результаті оцінки встановлено, що в даній області значень параметрів моделі $|z| \ll |x|$ та $|z| \ll |y|$, то третім доданком в вихідному виразі можна знехтувати.

Контроль характеру залежностей полягає в перевірці того, що напрямок і швидкість зміни вихідних параметрів моделі, що випливають з виписаних математичних співвідношень, такі, як це випливає безпосередньо з «фізичного» сенсу досліджуваної моделі.

> Контроль екстремальних ситуацій - перевірка того, який вид приймають математичні співвідношення, а також результати моделювання, якщо параметри моделі або їх комбінації наближаються до гранично допустимим для них значенням, найчастіше до нуля або нескінченності. У подібних екстремальних ситуаціях модель часто спрощується, математичні співвідношення набувають більш наочний сенс, спрощується їх перевірка. Наприклад, в задачах механіки деформованого твердого тіла деформація матеріалу в досліджуваній області в ізотермічних умовах можлива лише при додатку навантажень, відсутність же навантажень повинно призводити до відсутності деформацій.

> Контроль граничних умов, що включає перевірку того, що граничні умови дійсно накладені, що вони використані в процесі побудови шуканого рішення і що значення вихідних параметрів моделі насправді задовольняють даним умовам.

> Контроль фізичного сенсу - перевірка фізичного чи іншого, в залежності від характеру завдання, сенсу вихідних і проміжних співвідношень, що з'являються в міру конструювання моделі.

> Контроль математичної замкнутості, що складається в перевірці того, що виписана система математичних співвідношень дає можливість, при тому

однозначно, вирішити поставлену задачку. Наприклад, якщо завдання звелася до відшукання n невідомих з деякою системи алгебраїчних або трансцендентних рівнянь, то контроль замкнутості полягає в перевірці того факту, що число незалежних рівнянь має бути n. Якщо їх менше n, то треба встановити відсутні рівняння, а якщо їх більше n, то або рівняння залежні, або при їх складанні допущена помилка. Однак якщо рівняння виходять з експерименту або в результаті спостережень, то можлива постановка задачі, при якій число рівнянь перевищує n, але самі рівняння задовольняються лише наближено, а рішення шукається, наприклад, за методом найменших квадратів. Нерівностей серед умов також може бути будь-яке число, як це буває, наприклад, в задачах лінійного програмування.

Властивість математичної замкнутості системи математичних співвідношень тісно пов'язане з введенням Ж. Адамаром поняттям коректно поставленої математичної задачі, тобто завдання, для якого рішення існує, воно єдино і безперервно залежить від вихідних даних. В даному випадку рішення вважається безперервним, якщо малому зміни вихідних даних відповідає досить мале зміна рішення.

Поняття коректності завдання має велике значення в прикладній математиці. Наприклад, чисельні методи рішення виправдане застосовувати лише до коректно поставлених завдань. При цьому далеко не всі завдання, що виникають на практиці, можна вважати коректними (наприклад, так звані зворотні завдання). Доведення коректності конкретної математичної задачі - досить складна проблема, вона вирішена тільки для деякого класу математично поставлених завдань. Перевірка математичної замкнутості є менш складною в порівнянні з перевіркою коректності математичної постановки. В даний час активно досліджуються властивості некоректних задач, розробляються методи їх вирішення. Аналогічно поняттю «коректно поставлене завдання» можна ввести поняття «коректна математична модель».

Математична модель є коректною, якщо для неї здійснений і отримано позитивний результат всіх контрольних перевірок: розмірності, порядків, характеру залежностей, екстремальних ситуацій, граничних умов, фізичного сенсу і математичної замкнутості.

Приклад. Математична постановка задачі про баскетболіста.

Математичну постановку задачі про баскетболіста можна уявити як в векторної, так і в координатної формі (рис. 2.11).

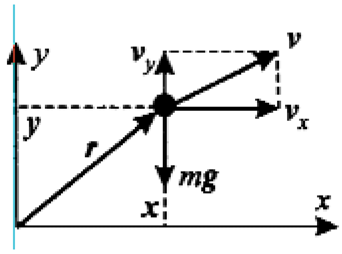

Рисунок 2.11 – Розрахункова схема

1. Векторна форма.

Знайти залежності векторних параметрів від часу - r(t) і v (t) - з рішення системи звичайних диференціальних рівнянь

$$m\frac{dv}{dt} = mg, \quad v = \frac{dr}{dt} \tag{2.5}$$

при початкових умовах

$$r(0) = 0, \quad v(0) = v_0. \tag{2.6}$$

Обчислити параметр Δпо формулі

$$\Delta = r_x(t_k) - r_{xk}, \tag{2.7}$$

де t_kвизначити з наступних умов:

$$t_k > 0, \;\; v_y(t_k) < 0, \;\; y(t_k) = y_k. \tag{2.8}$$

Проектуючи векторні співвідношення (2.5) - (2.8) на осі координат, отримаємо математичну постановку задачі про баскетболіста в координатної формі.

2. *Координатна форма*. Знайти залежності x (t), y(t) и v_x(t), v_y(t) з рішення системи диференційних рівнянь:

$$m\frac{dv_x}{dt}=0, \qquad v_x=\frac{dx}{dt},$$
$$m\frac{dv_y}{dt}=-mg, \qquad v_y=\frac{dy}{dt} \tag{2.9}$$

при початкових умовах

$$x(0)=x_0, \quad y(0)=y_0,$$
$$v_x(0)=v_0\cos\alpha_0, \quad v_y(0)=v_0\sin\alpha_0. \tag{2.10}$$

Обчислити параметр Δ по формулі

$$\Delta = x(t_k)-x_k, \tag{2.11}$$

Де t_k обчислити із умов:

$$t_k>0, \;\; v_y(t_k)<0, \;\; y(t_k)=y_k. \tag{2.12}$$

Як можна бачити, з математичної точки зору завдання про баскетболіста звелася до задачі Коші для системи ОДУ першого порядку з заданими початковими умовами. Отримана система рівнянь є замкнутої, так як число незалежних рівнянь (чотири диференціальних і два алгебраїчних) дорівнює числу шуканих параметрів завдання (x, y, v_x, v_y, Δ, t_k). Виконаємо контроль розмірностей завдання:

рівняння динаміки:

$$m\frac{dv}{dt}=\sum F \Rightarrow [\text{кг}]\frac{[\text{м/с}]}{[\text{с}]}=[H]\Rightarrow\left[\frac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{с}^2}\right]=\left[\frac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{с}^2}\right], \tag{2.13}$$

зв'язок швидкості та переміщення:

$$\frac{dr}{dt}=v\Rightarrow\frac{[\text{м}]}{[\text{с}]}=\left[\frac{\text{м}}{\text{с}}\right]. \tag{2.14}$$

Існування і єдність розв'язку задачі Коші доведена математиками. Тому дану математичну модель можна вважати коректною.

Математична постановка задачі ще більш абстрактна, ніж концептуальна, так як зводить вихідну задачу до чисто математичної (наприклад, до задачі Коші), методи вирішення якої досить добре розроблені. Уміння звести вихідну проблему до відомого класу математичних задач і обгрунтувати правомочність такого відомості вимагає високої кваліфікації математика-прикладника і особливо високо цінується в дослідних колективах.

<u>Вибір та обґрунтування вибору метода рішення завдання.</u>

При використанні розроблених математичних моделей, як правило, потрібно знайти залежність деяких невідомих заздалегідь параметрів об'єкта моделювання (наприклад, координат і швидкості центру мас тіла, точності кидка), які відповідають певній системі рівнянь. Таким чином, пошук рішення задачі зводиться до відшукання деяких залежностей шуканих величин від вихідних параметрів моделі. Всі методи вирішення завдань, що становлять «ядро» математичних моделей, можна поділити на аналітичні та алгоритмічні.

Слід зазначити, що при використанні аналітичних рішень для отримання результатів «в числах» також часто потрібна розробка відповідних алгоритмів, що реалізуються на ЕОМ. Однак вихідне рішення при цьому є аналітичний вираз (або їх сукупність). Рішення ж, засновані на алгоритмічних методах, принципово не зводяться до точних аналітичних розв'язків даної задачі.

Вибір того чи іншого методу дослідження в значній мірі залежить від кваліфікації і досвіду членів робочої групи. Як вже було зазначено, аналітичні методи більш зручні для подальшого аналізу результатів, але застосовні лише для відносно простих моделей. У разі, якщо математична задача (хоча б і в спрощеній постановці) допускає аналітичне рішення, останнє, без сумніву, краще чисельного.

Алгоритмічні методи зводяться до деякого алгоритму, який реалізує обчислювальний експеримент з використанням ЕОМ. Точність моделювання в подібному експерименті істотно залежить від обраного методу і його параметрів (наприклад, кроку інтегрування). Алгоритмічні методи, як правило, більш трудомісткі в реалізації, вимагають від членів робочої групи хорошого знання методів обчислювальної математики, великої бібліотеки спеціального програмного забезпечення і потужної обчислювальної техніки. Сучасні моделі на базі алгоритмічних методів розробляються в дослідних організаціях, які зарекомендували себе як авторитетні наукові школи у відповідній галузі знання.

Наближені і чисельні методи дослідження поставлених математичних задач відносяться до великого розділу - сучасної обчислювальної математики. Чисельні методи застосовні лише для коректних математичних задач, що суттєво обмежує використання їх в математичному моделюванні.

Загальним для всіх чисельних методів є зведення математичного завдання до кінцевомірного. Це найчастіше досягається дискретизацією початкового завдання, тобто переходом від функції неперервного аргументу до функцій дискретного аргументу. Наприклад, траєкторія центра ваги баскетбольного м'яча визначається не як безперервна функція часу, а як таблична (дискретна) функція координат від часу, тобто визначальна значення координат лише для кінцевого числа моментів часу. Отримане рішення дискретної задачі приймається за наближене рішення початкової математичної задачі.

Застосування будь-якого чисельного методу неминуче призводить до похибки результатів рішення задачі. Виділяють три основних складових виникає похибки при чисельному рішенні вихідної задачі:

> Непереборна похибка, пов'язана з неточним завданням вихідних даних (початкові і граничні умови, коефіцієнти і праві частини рівнянь);

> Похибка методу, пов'язана з переходом до дискретного аналогу вихідної завдання (наприклад, замінюючи похідну $y'(x)$ різницевим аналогом $(y(x + \Delta x)-y(x))/\Delta y$, отримуємо похибку дискретизації, що має при $\Delta x \to 0$ порядок Δx);

> Помилка округлення, пов'язана з кінцевою розрядністю чисел, що представляються в ЕОМ.

Природною вимогою для конкретного обчислювального алгоритму є узгодженість в порядках величин перерахованих трьох видів похибок.

Чисельний, або наближений, метод реалізується завжди в вигляді обчислювального алгоритму. Тому всі вимоги, що пред'являються до алгоритму, застосовні і до обчислювальному алгоритму. Перш за все, алгоритм повинен бути реалізуємо - забезпечувати вирішення завдання за допустимий машинний час. Важливою характеристикою алгоритму є його точність, тобто можливість отримання рішення вихідної завдання із заданою точністю $\varepsilon > 0$ за кінцеве число $Q(\varepsilon)$ дій. Очевидно, чим менше ε, тим більше витрачається машинний час. Для дуже малих значень ε час обчислень може бути неприпустимо великим. Тому на практиці домагаються деякого компромісу між точністю і витрачається машинним часом. Очевидно, що для кожного завдання, алгоритму та типу ЕОМ є своє характерне значення досягається точності.

Час роботи алгоритму залежить від числа дій $Q(\varepsilon)$, необхідних для досягнення заданої точності. Для будь-якої математичної задачі, як правило, можна запропонувати кілька алгоритмів, що дозволяють отримати рішення із заданою точністю, але за різну кількість дій $Q(\varepsilon)$. Алгоритми, що включають менше число дій для досягнення однакової точності, будемо називати більш економічними, або більш ефективним.

В процесі роботи обчислювального алгоритму на кожному акті обчислень виникає деяка похибка. При цьому від дії до дії вона може зростати або не збільшується (а в деяких випадках навіть зменшуватися). Якщо похибка в процесі обчислень необмежено зростає, то такий алгоритм називається нестійким, або тим, який розходиться. В іншому випадку алгоритм називається стійким, або збіжним.

Вище вже зазначалося, що обчислювальна математика об'єднує величезний пласт різноманітних, швидко розвиваються чисельних і наближених методів, тому практично неможливо привести їх закінчену класифікацію. Прагнення отримати більш точні, ефективні і стійкі обчислювальні алгоритми призводить до появи численних модифікацій, що враховують специфічні особливості конкретної математичної задачі або навіть особливості модельованих об'єктів.

Можна виділити наступні групи чисельних методів по об'єктах, до яких вони застосовуються:

> Інтерполяція і чисельне диференціювання;

> Чисельне інтегрування;

> Визначення коренів лінійних і нелінійних рівнянь;

> Рішення систем лінійних рівнянь (підрозділяють на прямі і ітераційні методи);

> Рішення систем нелінійних рівнянь;

> Рішення задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь;

> Рішення крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь;

> Рішення рівнянь в приватних похідних;

> Рішення інтегральних рівнянь.

Величезна різноманітність чисельних методів в значній мірі ускладнює вибір того чи іншого методу в кожному конкретному випадку. Оскільки для реалізації однієї і тієї ж моделі можна використовувати кілька альтернативних алгоритмічних методів, то вибір конкретного методу здійснюється з урахуванням того, який з них більше підходить для даної моделі з точки зору забезпечення ефективності, стійкості та точності результатів, а також більш освоєний і знаком членам робочої групи. Освоєння нового методу, як правило, дуже складно і пов'язано з великими часовими і фінансовими витратами. При цьому основні витрати пов'язані з розробкою і налагодженням необхідного програмного забезпечення для відповідного класу ЕОМ, що забезпечує реалізацію даного методу.

Приклад. *Аналітичне рішення задачі про баскетболіста*. Для отримання рішення розглянутої вище задачі про баскетболіста в постановці (2.9) - (2.12) можна використовувати як аналітичні, так і чисельні методи. Проінтегрував співвідношення (2.9) за часом, отримаємо

$$x(t) = C_2 + C_1 t, \quad y(t) = C_4 + C_3 t - gt^2/2,$$
$$v_x(t) = C_1, \qquad v_y(t) = C_3 - gt. \tag{2.15}$$

Константи інтегрування знайдемо з початкових умов (2.10). Тоді рішення задачі можна записати в такий спосіб:

$$x(t) = x_0 + v_0 t\cos\alpha_0, \quad y(t) = y_0 + v_0 t\sin\alpha_0 - gt^2/2,$$
$$v_x(t) = v_0\cos\alpha_0, \qquad v_y(t) = v_0\sin\alpha_0 - gt. \tag{2.16}$$

Приймемо для простоти, що в момент кидка м'яч знаходиться на початку координат і на одному рівні з кошиком (тобто $x_0 = y_0 = y_k = 0$). Під дальністю L кидка будемо розуміти відстань уздовж осі Ох, яке пролетить м'яч від точки кидка до перетину з горизонтальною площиною, що проходить через кільце кошика. Зі співвідношень (2.16) дальність кидка виразиться в такий спосіб:

$$L = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\alpha_0. \tag{2.17}$$

З урахуванням (2.7) точність кидка

$$\Delta = L - x_k. \tag{2.18}$$

Наприклад, при кидку м'яча зі штрафної лінії можна прийняти наступні вхідні дані: $X_0 = y_0 = y_k = 0$; $x_k = 4{,}225$ м; $v_0 = 6{,}44$ м/с; $\alpha_0 = 45$ °. Тоді з (2.171) і (2.18) маємо L = 4,225 м; $\Delta = 0$ м.

<u>Реалізація математичної моделі у вигляді програми для ЕОМ</u>

При створенні різних програмних комплексів, які використовуються для вирішення різноманітних дослідницьких, проектно-конструкторських і управлінських завдань, в даний час, основою, як правило, служать математичні моделі. У зв'язку з цим виникає необхідність реалізації моделі у вигляді програми для ЕОМ. Процес розробки надійного і ефективного програмного забезпечення є не менш складним, ніж всі попередні етапи створення математичної моделі. Успішне вирішення цього завдання можливе лише при впевненому володінні сучасними алгоритмічними мовами і технологіями програмування, знанні можливостей обчислювальної техніки, наявного програмного забезпечення, особливостей реалізації на ЕОМ методів обчислювальної математики, наявності досвіду вирішення подібних завдань.

Процес створення програмного забезпечення можна розбити на ряд етапів:

> Складання технічного завдання на розробку пакету програм програмного забезпечення;

> Проектування структури програмного комплексу;

> Кодування алгоритму;

> Тестування і налагодження;

> Супровід і експлуатація.

Технічне завдання на розробку програмного забезпечення оформляють у вигляді специфікації. Орієнтовна форма специфікації включає наступні сім розділів:

1. Назва завдання - дається коротке визначення розв'язуваної задачі, назва програмного комплексу, вказується система програмування для його реалізації і вимоги до апаратного забезпечення (комп'ютера, зовнішніх пристроїв і т.д.).

2. Опис – детально викладається математична постановка задачі, описуються застосовується математична модель для задач обчислювального характеру, метод обробки вхідних даних для завдань не обчислювального (логічного) характеру і т.д.

3. Управління режимами роботи програми - формуються основні вимоги до способу взаємодії користувача з програмою (інтерфейс «користувач-комп'ютер»).

4. Вхідні дані – описуються вхідні дані, вказуються межі, в яких вони можуть змінюватися, значення, які вони не можуть приймати, і т.д.

5. Вихідні дані – описуються вихідні дані, вказується, в якому вигляді вони повинні бути представлені (в числовому, графічному або текстовому), наводяться відомості про точність і обсязі вихідних даних, способи їх збереження і т.д.

6. Помилки –- перераховуються можливі помилки користувача при роботі з програмою (наприклад, помилки при введенні вхідних даних), вказуються способи діагностики (в даному випадку під діагностикою розуміється виявлення, виявлення помилок при роботі програмного комплексу) і захисту від цих помилок на етапі проектування, а також можлива реакція користувача при здійсненні їм помилкових дій і реакція програмного комплексу (комп'ютера) на ці дії.

7. Тестові завдання - наводяться один або кілька тестових прикладів, на яких в найпростіших випадках проводиться налагодження та тестування програмного комплексу.

Приклад. Специфікація завдання про баскетболіста.

1. Назва завдання

Назва програми	Basketball
Система програмування	Delphi
Комп'ютер	IBM PC Pentium
Операційна система	Windows-9x, NT

2. Опис

Наводиться математична постановка задачі і опис методу її рішення.

3. Управління режимами роботи програми

Для управління режимами роботи програми необхідно використовувати інтерфейс Windows з використанням меню, діалогових вікон, полів введення даних, кнопок.

4. Вхідні дані

Радіус і маса м'яча, його початкові координати і швидкість, кут кидання, координати кошика.

5. Вихідні дані

Траєкторія центру м'яча, розрахункова величина дальності і точність кидка. Вихідні дані представляються в табличному і графічному вигляді.

6. Помилки

При введенні вихідних даних передбачити контроль:

> Все введені значення повинні бути позитивні;

> Кут кидання повинен бути в межах від 5 ° до 85 °;

> Початкова швидкість м'яча повинна бути в межах від 0 до 30 м/с;

> Горизонтальна координата центру кошика повинна бути більше початкової горизонтальної координати м'яча.

При діагностуванні перелічених помилок програма повинна видавати відповідні повідомлення, які можуть супроводжуватися звуковим сигналом, і пропонувати повторити введення.

7. Тестові приклади

При $x_0 = y_0 = y_k = 0$; $x_k = 4{,}225$; $v_0 = 6{,}44$; $\alpha_0 = 45$ ° отримуємо: $L = 4{,}225$; $\Delta = 0$.

На етапі проектування формується загальна структура програмного комплексу. Вся програма розбивається на програмні модулі. Для кожного програмного модуля формулюються вимоги по реалізованим функцій і розробляється алгоритм, який виконує ці функції. Визначається схема взаємодії програмних модулів, звана схемою потоків даних програмного комплексу. Розробляється план і задаються вихідні дані для тестування окремих модулів і програмного комплексу в цілому.

Більшість програм, що реалізують математичні моделі, складаються з трьох основних частин:

> Препроцесора (підготовка і перевірка вихідних даних моделі);

> Процесора (рішення задачі, реалізація обчислювального експерименту);

> Постпроцесора (відображення отриманих результатів). Лише для відносно простих випадків ці три складові частини можуть бути оформлені у вигляді однієї програми. При вирішенні сучасних завдань з моделювання поведінки рідин, газів і

твердих тіл кожна з частин може включати в себе цілий комплекс програм. Наприклад, постпроцесор повинен вміти подавати інформацію не тільки в табличному, але і графічному вигляді (діаграми, графіки залежності від різних параметрів, відображення скалярних, векторних (тензорних) полів і т.п.). Можливості пре- і постпроцесора найбільш широко реалізуються в сучасних системах автоматизованого проектування (САПР), де вони в значній мірі можуть скоротити час на отримання даних і оцінку результатів моделювання.

Як правило, створення сучасних математичних моделей в якійсь галузі і доведення їх до програмних комплексів вимагає значних витрат часу (мінімум 3-5 років). Потрібен час не тільки на освоєння методик і підходів до моделювання в досліджуваній області, а й на напрацювання бібліотек програм щодо вирішення виникаючих математичних задач, з підготовки вихідних даних і відображенню одержуваних результатів. Якісні, надійні, володіють дружнім інтерфейсом, легко модифікуються і добре супроводжувані програмні комплекси можна створювати лише при наявності добре продуманої стратегії розвитку програмного забезпечення, що забезпечує його модульність і сумісність по вхідних і вихідних параметрів.

Велике значення слід надавати освоєння сучасних технологій програмування: структурної, абстрактної, об'єктно-орієнтованої та візуальної. Призначення будь-якої технології - це в першу чергу підвищення надійності програмного забезпечення і збільшення продуктивності праці програміста. Причому чим серйозніший і об'ємніший програмний проект, тим більшого значення набувають питання використання сучасних технологій програмування. Нехтування цими питаннями може привести до значних тимчасовим витратам і зниження надійності програмного комплексу.

Найважливішим фактором, що визначає надійність і малі терміни створення програмного комплексу для вирішення конкретного класу задач, є наявність розвиненої бібліотеки сумісних між собою програмних модулів. Програма виходить більш надійною і створюється за менші терміни при максимальному використанні стандартних програмних елементів. Для ефективної розробки програмного забезпечення в галузі математичного моделювання необхідно звернути увагу на створення наступних стандартних бібліотек програм:

> Наближені і чисельні методи (процесори);

> Кошти підготовки вихідних даних (препроцесори);

> Кошти візуалізації і представлення результатів (постпроцесора).

Розробка таких загальних бібліотек програм можлива лише при стандартизації потоків передачі даних між препроцесором, процесором і постпроцесорі. У найпростішому випадку мова може йти про уніфікацію форматів файлів, що передаються.

<u>Перевірка адекватності моделі</u>

Під адекватністю математичної моделі буде розумітися ступінь відповідності результатів, отриманих за розробленою моделі, даними експерименту або тестового завдання. Перш ніж переходити до перевірки адекватності моделі, необхідно переконатися в правильному комплексному функціонуванні всіх алгоритмів і програм моделі, виконати незалежне тестування і налагодження всіх окремих алгоритмів (наприклад, використовуваних програмних модулів, що реалізують використовуваний чисельний метод).

Перевірка адекватності моделі переслідує дві мети:

1) переконатися в справедливості сукупності гіпотез, сформульованої на етапах концептуальної і математичної постановок. Переходити до перевірки гіпотез слід лише після перевірки використаних методів вирішення, комплексного налагодження і усунення всіх помилок і конфліктів, пов'язаних з програмним забезпеченням;

2) встановити, що точність отриманих результатів відповідає точності, обумовленої в технічному завданні.

Перевірка розробленої математичної моделі виконується шляхом порівняння з наявними експериментальними даними про реальний об'єкт або з результатами інших, створених раніше і добре себе зарекомендували моделей. У першому випадку говорять про перевірку шляхом порівняння з експериментом, у другому - про порівняння з результатами рішення тестового завдання.

Вирішення питання про точність моделювання залежить від вимог, що пред'являються до моделі, і її призначення. При цьому повинна враховуватися точність отримання експериментальних результатів або особливості постановок тестових завдань. У моделях, призначених для виконання оціночних і приблизних розрахунків, задовільною вважається точність 10-15%. У моделях, використовуваних в керуючих і контролюючих системах, необхідна точність може бути 1-2% і навіть більше.

Як правило, розрізняють якісний і кількісний збіг результатів порівняння. При якісному порівнянні потрібно лише збіг деяких характерних особливостей у розподілі досліджуваних параметрів (наприклад, наявність екстремальних точок, позитивне або негативне значення параметра, його зростання або спадання і т.д.). Фактично при якісному порівнянні оцінюється збіг лише виду функції розподілу параметрів (спадна або зростаюча, з одним екстремумів або з декількома). Питання про кількісний порівнянні можна ставити лише після задовільної відповіді на питання про якісне відповідність результатів. При кількісному порівнянні велике значення слід надавати точності вихідних даних для моделювання і відповідних їм значень порівнюваних параметрів.

Неадекватність результатів моделювання можлива, по крайній мірі, з трьох причин:

а) значення параметрів, що задаються моделі не відповідають допустимої області цих параметрів, яка визначається прийнятою системою гіпотез. Наприклад, в задачі про баскетболіста гіпотезу про відсутність опору повітря можна використовувати лише при відносно малих (менше 5 м / с) швидкостях руху тіла. При великих значеннях початкової швидкості м'яча вплив сили опору буде істотним;

б) прийнята система гіпотез вірна, але константи і параметри в використаних визначають співвідношеннях встановлені не точно. Наприклад, в разі завдання про баскетболіста значення прискорення вільного падіння g може бути уточнено в залежності від широти місцевості, де знаходиться баскетболіст;

в) невірна вихідна сукупність гіпотез.

Всі три випадки вимагають додаткового дослідження як моделює мого об'єкта (з метою накопичення нової додаткової інформації про його поведінку), так і дослідження самої моделі (з метою уточнення меж її застосовності).

Зауваження. В даному випадку не аналізується вплив обраного чисельного методу на точність одержуваного рішення, а значить, і на адекватність моделі. Питання про збіжність алгоритму і стійкості одержуваного обраним чисельним методом рішення, а також накопичення похибок, пов'язаних з помилками округлення при використанні ЕОМ, тут не розглядається.

При виникненні проблем, пов'язаних з адекватністю моделі, її коригування потрібно починати з послідовного аналізу всіх можливих причин, що призвели до розбіжності результатів моделювання і результатів експерименту. В першу чергу потрібно досліджувати модель і оцінити ступінь її адекватності при різних значеннях змінних параметрів (початкових і граничних умовах, параметрів, що характеризують властивості об'єктів моделювання). Якщо модель неадекватна в цікавій для дослідника області параметрів, то можна спробувати уточнити значення констант і вихідних параметрів моделі. Якщо ж і в цьому випадку немає позитивних результатів, то єдиною можливістю поліпшення моделі залишається зміна прийнятої системи гіпотез. Дане рішення фактично означає повернення до другого етапу процесу розробки моделі і може спричинити не тільки серйозна зміна математичної постановки задачі, а й методів її рішення (наприклад, перехід від аналітичних до чисельних), повної переробки програмного забезпечення і нового циклу перевірки моделі на адекватність. Тому рішення про зміну прийнятої системи гіпотез має бути всебічно зважене і прийматися тільки в тому випадку, якщо вичерпані всі інші можливості щодо поліпшення адекватності моделі.

Приклад. Перевірка адекватності рішення задачі про баскетболіста. Співвідношення (2.16) є аналітичним рішенням завдання про баскетболіста і дозволяють визначити значення координат і швидкостей центру мас м'яча в будь-який момент часу. Для координат x і y співвідношення (2.16) є рівнянням параболи в параметричної формі. М'яч при кидку рухається по траєкторії, близькій до параболи. Тому в даному випадку можна говорити про якісне збігу результатів моделювання і експериментальних даних. Питання про кількісний збіг результатів моделювання і експерименту швидше за все буде вирішено негативно, так як відмова від обліку сили опору повітря є грубим припущенням. Для задовільної оцінки точності попадання м'яча в кошик розбіжність результатів моделювання і експерименту не повинно перевищувати 1-2 см. Тому гіпотезу про відсутність сили опору повітря в концептуальній постановці завдання замінимо нової: сила опору повітря прямо пропорційна швидкості м'яча:

$$\mathbf{F}_{\text{сопр}} = -\,k_{\text{сопр}} v, \tag{2.19}$$

де $к_{\text{сопр}}$ - коефіцієнт опору, що залежить від властивостей середи і форми тіла.

Для тіла в формі кулі коефіцієнт опору визначався за формулою Стокса:

$$k_{\text{сопр}} = 6\pi\mu R, \tag{2.20}$$

де μ - динамічна в'язкість середовища (для повітря при температурі 20 ° C і тиску 1 атмμ = 0,0182 Н с/м2).

Відповідно до прийнятих в баскетболі правилами довжина кола м'яча може змінюватися від 0,749 до 0,780 м, що відповідає зміні радіуса м'яча від 0,119 до 0,124 м. Вага м'яча повинна бути в межах від 0,567 до 0,650 кг. Приймемо для визначеності радіус м'яча R = 0,12 м, а масу м'яча m = 0,6 кг. Тоді коефіцієнт опору середовища становить $k_{\text{сопр}}$ = 0,0412 Н*с/м.

Співвідношення (2.9) в математичній постановці завдання слід замінити на нові:

$$\begin{aligned} &m\frac{dv_x}{dt} = -k_{\text{сопр}} v_x, \qquad v_x = \frac{dx}{dt}, \\ &m\frac{dv_y}{dt} = -mg - k_{\text{сопр}} v_y, \quad v_y = \frac{dy}{dt}. \end{aligned} \tag{2.21}$$

Поділяючи змінні та інтегруючи з урахуванням початкових умов (2.10), можна отримати рішення в наступному вигляді:

$$
\begin{aligned}
&x = m_k v_{x0}\left(1-\exp\left(-t/m_k\right)\right),\\
&y = m_k\left(m_k g + v_{y0}\right)\left(1-\exp\left(-t/m_k\right)\right) - m_k g t,\\
&v_x = v_{x0}\exp\left(-t/m_k\right),\\
&v_y = \left(m_k g + v_{y0}\right)\exp\left(-t/m_k\right) - m_k g,
\end{aligned}
\tag{2.22}
$$

де $m_k = m/k_{сопр}$.

Для визначення дальності кидка слід друге співвідношення в (2.22) записати у вигляді

$$y_k = m_k\left(m_k g + v_0\sin\alpha_0\right)\left(1-\exp\left(-t/m_k\right)\right) - m_k g t,$$

де y_k - координата центру кошика. При $y_k = 0$ отримаємо нелінійне рівняння щодо часу

$$\left(m_k g + v_0\sin\alpha_0\right)\left(1-\exp\left(-t/m_k\right)\right) = gt. \tag{2.23}$$

Визначивши час з рішення (2.23) і підставивши їх у перше з співвідношень (2.22), можна знайти дальність кидка. Однак в даному випадку немає можливості визначити аналітичне рішення співвідношення (2.23), що не дозволяє побудувати співвідношення для дальності L кидка, аналогічне (2.17). В цьому випадку можна тільки порівняти результати рішення (2.16) і (2.22) для деяких фіксованих значень v_0 і α_0.

Сила опору повітря залежить не тільки від $k_{сопр}$, але і від швидкості м'яча. Нижче наведені дані порівняння сили опору по відношенню до сили тяжіння.

v, м/с	5	10	15	20
$F_{сопр}$, Н·с/м^2	0,206	0,412	0,618	0,824
$F_{сопр}/(mg)$, %	3,5	7,0	10,5	14,0

Як можна бачити, сила опору повітря при швидкості руху м'яча 20 м/с не перевищує 14% величини сили тяжіння. Однак навіть така незначна вплив на рух м'яча може істотно позначитися на точності попадання. Так, при кидку м'яча під кутом 45° з початковою швидкістю 6,44 м/с дальність кидка з урахуванням і без урахування сил опору буде відрізнятися на 17 см. При радіусі кошика R_k = 23,3 см різниця становить більше половини R_k

Облік сил опору призводить до зміни результатів в завданню про попадання м'яча в кошик. Так, при моделюванні без урахування опору середовища кидка м'яча зі штрафної лінії при початкових даних $x_0 = y_0 = y_k = 0$, $x_k = 4{,}225$ м, $\alpha_0 = 45°$ отриманий в розд. 2.4 результат для початкової швидкості v0 склав 6,44 м / с. З урахуванням опору середовища початкова швидкість м'яча повинна бути рівною 6,575 м / с, тобто збільшиться на 2,1%.

2.5 Структурна модель, мережеві графи

Дуже часто для досягнення практичних цілей виникає необхідність розглядати досліджуваний об'єкт як сукупність окремих елементів, пов'язаних (взаємодіючих) між собою певним чином, в той же час взаємодіючих з навколишнім світом як щось ціле. В цьому випадку досліджуваний об'єкт зручно представити у вигляді системи, а при його моделюванні використовувати методи системного аналізу.

Одним з основоположних понять системного аналізу є поняття штучної системи, яку визначимо наступним чином.

Система є сукупність взаємопов'язаних елементів, виділених із середовища і взаємодіючих з навколишнім середовищем як ціле для досягнення поставленої мети.

Слід зазначити, що важливою ознакою для виділення системи з середовища є можливість визначення взаємодії цієї системи з оточенням незалежно від поведінки її окремих елементів (саме це мається на увазі під словами «взаємодіє ... як ціле»). Виділяє систему з середовища дослідник, який відокремлює її елементи від середовища відповідно до поставленої мети. Під середовищем тут розуміється сукупність всіх об'єктів, зміна властивостей яких впливає на систему, а також тих об'єктів, чиї властивості змінюються в результаті поведінки системи.

З наведених визначень видно, наскільки важлива роль дослідника - він формулює цілі, виділяє систему і визначає середовище. При цьому сам може віднести себе до середовища і будувати ізольовані системи, включити себе в систему і будувати її з урахуванням свого впливу на її функціонування (адаптивні системи), а також виділити себе і з системи, і з середовища, розглядаючи систему як відкриту або розвивається . В принципі дослідника можна не розглядати як елемент системи або середовища, але, на думку деяких авторів, додаткове введення дослідника допомагає при побудові систем і їх класифікації.

Для опису систем в системному аналізі розглядаються чотири основні моделі. Якщо внутрішня будова системи невідомо (або не цікавить дослідника), то застосовується модель «чорного ящика». У цій моделі системи відсутні (або не використовуються в явній формі) відомості про внутрішній зміст «ящика» (тому він і називається «чорним»), а тільки задаються вхідні і вихідні зв'язки з середовищем. Зазвичай це зводиться до завдання двох множин вхідних і вихідних параметрів, але ніяких співвідношень між ними не задається. Прикладом моделі «чорного ящика» може служити експериментальне дослідження деякого складного об'єкта, коли експериментатор, змінюючи вхідні параметри об'єкта, отримує на виході різні його характеристики.

Очевидно, що дослідження внутрішнього устрою системи неможливо за допомогою моделі «чорного ящика»; застосування останньої можна вважати виправданим лише на самих ранніх етапах дослідження нового об'єкта. Для цього необхідні більш розвинені моделі. Однією з таких моделей є модель складу системи, що описує, з яких елементів і підсистем складається дана система. При цьому елементами системи називаються ті її частини, які покладаються неподільними; частини, що складаються більш ніж з одного елемента, називаються підсистемами. Наприклад, якщо в якості системи розглянути автомобіль, то її підсистемою можна вважати систему управління, а елементами останньої - кермо, педалі і т.д.

Складність побудови моделі складу системи полягає в її неоднозначності. Це можна пояснити наступним чином. По-перше, поняття «елементарності» можна визначати по-різному. По-друге, модель складу (як і будь-яка інша модель) є цільовою і для відрізняються цілей один і той же об'єкт може зажадати різного розбиття на частини. По-третє, будь-яке розбиття цілого на частини є відносним. Наприклад, гальмівну підсистему автомобіля можна віднести як до ходової частини, так і до підсистеми управління.

У більшості випадків моделі складу системи виявляється недостатньо для її опису. Мало знати склад системи, крім цього необхідно встановити зв'язки між окремими елементами, які називаються *відносинами*. Сукупність необхідних і достатніх для досягнення мети відносин між елементами називається *моделлю структури системи*. Основною складністю при описі структури (списку відносин) є обгрунтування кінцевого числа зв'язків, найбільш суттєвих за ставленням до даної мети. Наприклад, при моделюванні механічної системи, що рухається в навколоземному просторі, зазвичай не враховуються сили взаємного тяжіння окремих матеріальних точок (елементів), але враховується сила тяжіння до Землі (відносини).

Слід зазначити, що структура системи є абстрактною моделлю, тому що розглядає тільки зв'язку (відносини) між елементами, а не самі елементи (зрозуміло, що на практиці говорити про відносини без елементів просто не має сенсу). Однак в деяких випадках модель структури теоретично може бути досліджена окремо, якщо, наприклад, відносини задані у вигляді математичних формул або рівнянь.

Тепер, маючи три формальні моделі системи - «чорного ящика», складу і структури - і об'єднавши їх, можна отримати ще одну модель, яку називають структурною схемою системи, або моделлю «білого ящика». Дана модель включає всі елементи системи, всі зв'язки між елементами всередині системи і зв'язку системи (або її окремих елементів) з навколишнім середовищем (входи і виходи системи), як зображено на рис. 2.12. Зауважимо, що під «усіма» елементами і зв'язками розуміються, звичайно, значимі з точки зору мети і завдань розробляється моделі.

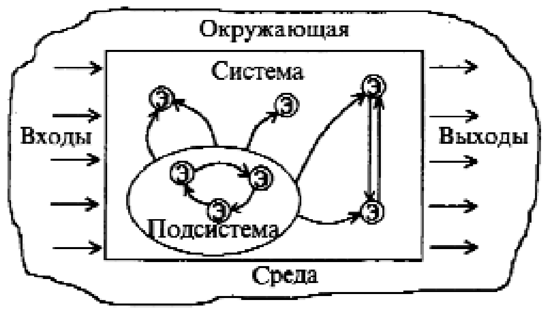

Рисунок 2.12 – Структурна схема системи

Слід зазначити, що структурна схема системи є формальною моделлю, відокремленої від змістовного наповнення. Це дозволяє розглядати її як особливий математичний об'єкт і досліджувати його властивості. Такий об'єкт називається графом. Він складається з позначень елементів довільної природи, називаних вершинами, і позначень зв'язків між ними, званих ребрами.

На рис. 2.13 наведено приклад графа, у якого вершини позначені у вигляді кружечків, а ребра - у вигляді ліній. Стрілки вказують на несиметричність деяких зв'язків. Такий граф називається орієнтованим. Кожна пара вершин може бути з'єднана з будь-яким числом ребер. Щоб ввести інші відмінності між ребрами, крім несиметричності, їм приписують різні ваги. Такі графи називаються зваженими. Як терезів можуть виступати різні характеристики графа, наприклад довжина ребра, число каналів електромережі, тип покриття в мережі автомобільних доріг і т.д.

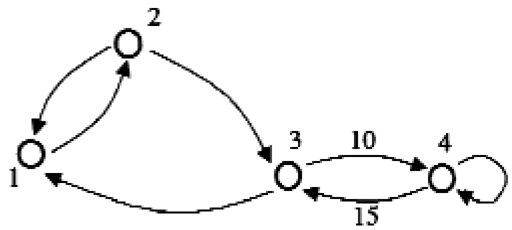

Рисунок 2.13 – Приклад графа

В даний час для графів розроблена ціла теорія, що має численні додатки. Графи можуть зображати будь-які структури. Деякі графи отримали спеціальні назви: лінійні, деревоподібні (ієрархічні), мережеві, матричні і т.д. Приклад мережевого графа наведений на рис. 2.14.

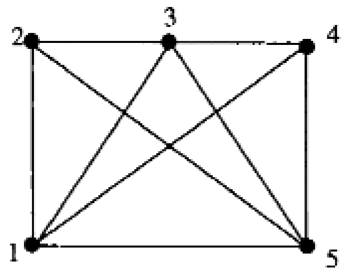

Рисунок 2.14 – Мережевий граф

Як зазначено вище, граф (структурна схема) є формальною моделлю, яку необхідно наповнити конкретним змістом. Тільки після цього структурна схема стає структурною моделлю досліджуваного об'єкта. Наприклад, якщо в якості вершин графа, зображеного на рис. 2.14, вважати циліндричні шарніри, а ребер - прямолінійні стержні, то отримаємо структурну модель стрижневий конструкції, широко застосовується при моделюванні в будівельній механіці. Якщо ж в якості вершин розглядати вузли зв'язку, а за ребра прийняти лінії зв'язку, то отримаємо структурну модель мережі електрозв'язку.

Таким чином, можна дати наступне визначення структурної моделі.

Структурна модель системи - це сукупність конкретних елементів даної системи, необхідних і достатніх відносин між цими елементами і зв'язків між системою і навколишнім середовищем.

Розглянемо приклад побудови структурної моделі, що пояснює це визначення. Нехай потрібно побудувати структурну модель абсолютно твердого тіла, що здійснює поступальний рух під дією прикладеної сили (рис. 4.4). Нагадаємо, що абсолютно тверде тіло при русі не змінює форму і розміри. Тому таке тіло можна уявити як сукупність матеріальних точок (елементів), з'єднаних прямолінійними невагомими стрижнями, які не деформуються.

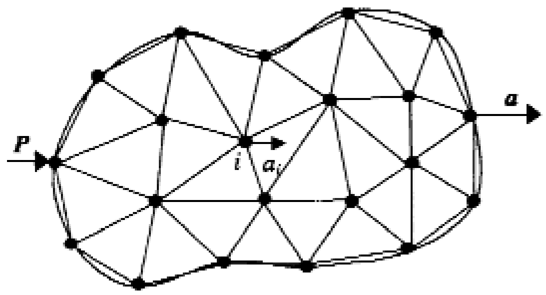

Рисунок 2.15 – Структурна модель абсолютно твердого тіла при поступальному руху

Сила P виступає в якості впливу зовнішнього середовища на тіло, а відгуком на це вплив (вихідним параметром) служить прискорення тіла a (або будь-який його точки внаслідок їх рівності при поступальному русі). Згідно з другим законом Ньютона,

$$\boldsymbol{a} = (m_{\mathrm{T}})^{-1} \boldsymbol{P}, \tag{2.24}$$

де m_{T} – маса тіла.

Таким чином, для того щоб дана структурна модель правильно описувала поступальний рух тіла, необхідно і достатньо, щоб виконувалася умова

$$\sum_{i=1}^{N} m_i = m_{\mathrm{T}}, \tag{2.25}$$

де m_i - маса i -го елемента, N- число елементів. З останнього співвідношення випливає, що число елементів і їх розподіл всередині тіла не мають значення. Інша справа, коли необхідно описати обертальний рух твердого тіла навколо деякої заданої осі під дією прикладеного моменту сил. У цьому випадку розподіл елементів всередині обсягу тіла має бути таким, щоб виконувалася умова рівності моментів інерції реального тіла і його структурної моделі щодо заданої осі Z:

$$I_Z = \sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2, \tag{2.26}$$

де I_z - момент інерції тіла відносно осі Z, r_i - відстань i-й точки до осі Z. З цієї рівності випливають необхідні і достатні умови на відносини між елементами даної структурної моделі (довжини і орієнтації стрижнів, маси матеріальних точок), що добре видно з рис. 2.16.

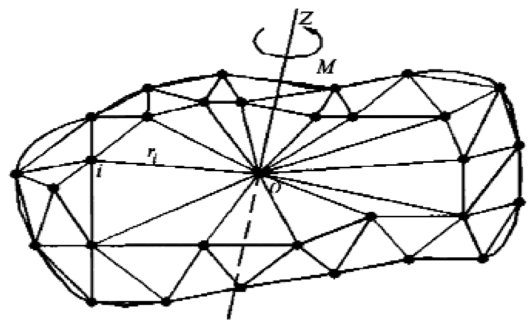

Рисунок 2.16 – Структурна модель тіла, яке обертається

Ще більше ускладниться структурна модель в разі опису руху деформованого, наприклад пружного, тіла. Тоді замість стрижнів, які не деформуються, в якості зв'язків між елементами (матеріальними точками) можуть виступати пружинки з різними пружними властивостями (рис. 2.17).

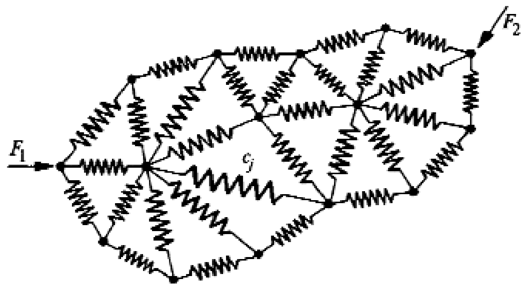

Рисунок 2.17 – Структурна модель пружного тіла

У цій структурної моделі для отримання необхідних і достатніх відносин між елементами крім розподілу мас за обсягом тіла необхідно врахувати розподіл жорсткостей з пружинок, щоб сукупність останніх описувала пружні властивості реального тіла.

З цього прикладу видно, що структурне моделювання дозволяє описувати поведінку досить складних систем. При цьому чим складніше система, тим структурний моделювання стає все більш ефективним (а в деяких випадках - просто необхідним). Наприклад, при описі поступального руху твердого тіла структурна модель, в принципі, не потрібна, так як в цьому випадку тіло можна представити у вигляді однієї матеріальної точки, маса якої дорівнює масі тіла. В інших розглянутих вище прикладах структурна модель допомагає описати поведінку досить складних механічних систем за допомогою взаємодіючих найпростіших елементів. Для деяких механічних систем структурний моделювання є чи не єдиним способом опису їх поведінки. Це відноситься, наприклад, до моделювання поведінки структурно-неоднорідних матеріалів (композитів, полімерів, керамік і т.д.).

Слід зазначити, що тієї інформації, яка міститься в структурній схемі системи, дуже часто буває недостатньо для дослідження. Тому графи треба розглядати як допоміжний інструмент при моделюванні. Головним же при структурному моделюванні є встановлення конкретних функціональних зв'язків між вхідними, внутрішніми і вихідними параметрами. Тому без досить широкого арсеналу методів математичного моделювання тут також не обійтися. У більшості випадків доводиться складати рівняння, що описують поведінку кожного елемента структури з урахуванням взаємодії всіх елементів. Це призводить до необхідності вирішення систем рівнянь з великим числом змінних. Однак з появою сучасної обчислювальної техніки такі підходи до моделювання складних систем стають все більш поширеними.

На закінчення даного параграфа коротко зупинимося на класифікації структурних моделей і прикладах їх застосування.

Структурні моделі бувають чотирьох видів: просторові, тимчасові, фізичні та ієрархічні.

Просторовіструктури зазвичай використовують для опису геометрії досліджуваного об'єкта і розташування в просторі його окремих елементів. Такі структури добре описуються за допомогою мережевих і матричних графів, вершини яких вказують місця розташування елементів, а ребра - відстані між ними або інші умови з'єднання. Приклад просторової структурної моделі - структурна схема телефонної мережі деякого населеного пункту, в якій вершинами є вузли зв'язку, а ребрами - лінії зв'язку із зазначенням, наприклад, числа каналів зв'язку. Іншим прикладом просторової структури може служити звичайно-елементна сітка, за допомогою якої описується геометрія досліджуваного об'єкта при його, наприклад, розрахунки на міцність методом кінцевих елементів.

Тимчасові структурні моделі широко використовуються в мережевому і календарному плануванні, а також в теорії масового обслуговування. У тимчасових структурах в якості елементів виступають етапи процесу, що відбувається або стану системи в деякий момент часу. Відносинами тут служать умови переходу від одного етапу до іншого або з одного стану системи в інше. Наприклад, на виробництві широко застосовують так звані мережеві графіки (технологічні карти). Вони являють собою графи, вершинами яких служать необхідні виробничі операції, а за допомогою ребер вказується послідовність і тривалість цих операції. При моделюванні систем масового обслуговування зручно застосовувати структурну схему «загибелі і розмноження», яка представляє собою лінійний граф (послідовний набір станів системи, витягнутий в один ланцюжок). Вважається, що система обслуговує випадковий потік заявок, що надходять в неї. Тоді відносинами між елементами системи (її станами в різні моменти часу) служать умови надходження нової заявки, які можна характеризувати, наприклад, інтенсивністю відповідних випадкових потоків подій.

Фізичні структурні моделі застосовуються для опису складних фізичних властивостей досліджуваного об'єкта за допомогою простих структурних елементів. Приклад моделювання пружних властивостей тіла був наведений вище. Інші приклади застосування фізичного структурного моделювання будуть приведені в кінці цього розділу.

Для моделювання керованих систем широко застосовуються *ієрархічні структурні схеми*, які передбачають наявність кількох рівнів обробки інформації та прийняття рішень. Основне завдання ієрархічної структури - розподіл функцій обробки інформації та прийняття рішень між окремими елементами. На рис. 2.18 наведено приклад дворівневої ієрархічної структуриуправління системою у вигляді віяла. У даній системі існує один привілейований елемент, який має можливість управляти іншими елементами. Цей привілейований елемент зазвичай називається центром (Ц), а інші елементи - виробниками ($П_i$, i = 1, ..., n).

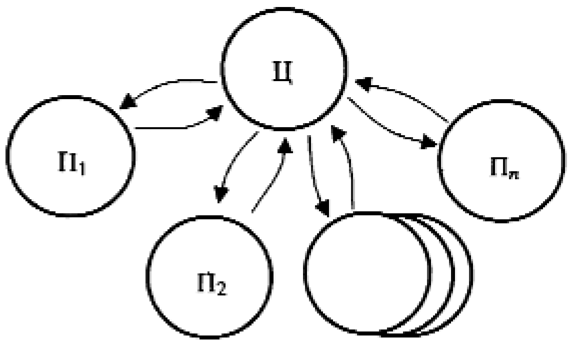

Рисунок 2.18 – Двоступенева віялова структурна схема

Відносинами в цій моделі служать умови обміну інформацією, грошовими і матеріальними ресурсами між центром і виробниками. Слід зазначити, що у наведеній структурній схемі відносини між виробниками (горизонтальні зв'язки) відсутні. Нерівноправність елементів системи проявляється в тому, що центр призначає правила формування впливів на виробників і тим самим має можливість направляти в потрібне для нього русло дії нижніх елементів. Дану схему нескладно узагальнити до багаторівневої віялової структури, яка широко використовується в економіці.

Структурні моделі знайшли широке застосування в різних областях цілеспрямованої діяльності людини. У деяких випадках вони допомагають побудувати модель досліджуваної системи або процесу, а іноді є єдиним ефективним інструментом при моделюванні.

2.6 Способипобудовипросторових, часових, фізичних, ієрархічних моделей

При структурному моделюванні широко застосовуються методи аналізу і синтезу. За допомогою методів аналізу проводиться поділ даного об'єкту на частини і дослідження кожної з цих частин окремо. Методи синтезу, навпаки, служать для з'єднання частин в ціле. Слід зазначити, що при структурному моделюванні методи аналізу і синтезу необхідно застосовувати спільно. Важливо не просто розбити ціле на окремі елементи, але і з'єднати ці елементи таким чином, щоб вони знову утворили єдине ціле. З цієї точки зору синтез є завершальним етапом аналізу, так як тільки після цього етапу можна пояснити ціле через його частини - у вигляді структури цілого. Це пов'язано з тим, що при аналізі губляться важливі властивості об'єкта як цілого (розібраний автомобіль не поїде), так і окремих його елементів (відірваний кермо «Не рулить»). Тому, як зазначав один з провідних фахівців з системного аналізу Р. Акофф, результатом аналізу є лише розтин структури системи, знання про те, як система працює, але не розуміння того, чому і навіщо вона це робить. Тільки після синтезу можна пояснити поведінку системи, розглядаючи кожен елемент і його роль через призму всієї системи.

Таким чином, аналіз і синтез не можна розглядати як окремі методи. Вони доповнюють один одного і при структурному моделюванні повинні застосовуватися спільно. Тільки в цьому випадку побудована структурна модель буде відображати основні властивості досліджуваного об'єкта відповідно до поставлених цілей.

Тепер розглянемо методи аналізу і синтезу більш докладно. Почнемо з методів аналізу, які знайшли широке застосування в науці і практиці. В математиці давно з успіхом застосовуються такі аналітичні методи, як розкладання функцій в ряди, спектральний аналіз, диференціальне та інтегральне числення; у фізиці - методи молекулярної динаміки; на виробництві - конвеєрна технологія виготовлення.

Як було зазначено вище, основною операцією при аналізі є поділ цілого на частини. Надалі цю операцію називатимемо декомпозицією і розуміти під нею метод розкладання системи на окремі елементи. В результаті декомпозиції вихідна система розпадається на підсистеми, завдання - на підзадачі і т.д. При необхідності операція декомпозиції може повторюватися кілька разів, що призводить до деревовидним структурам системи.

Основною проблемою при декомпозиції є її неоднозначність. Зрозуміло, що одну і ту ж систему можна розбити на різні підсистеми в залежності як від досвіду дослідника, так і від застосовуваної методики аналізу. Тому в системному аналізі існують спеціальні критерії для обґрунтування процесу декомпозиції. Одним з таких критеріїв є повнота декомпозиції, яка в свою чергу пов'язана з повнотою моделі системи, взятої в якості вихідної при декомпозиції.

В системному аналізі розглядаються тільки чотири формальні моделі системи: «чорного ящика», складу, структури і «білого ящика». Очевидно, що для декомпозиції підходять тільки останні три моделі, які дозволяють розглядати систему через взаємодію її окремих елементів. Тому однією з проблем системного аналізу є накопичення наборів повних формальних моделей (повнота тут розглядається щодо поставленої мети) для різних досліджуваних систем, які отримали в теорії штучного інтелекту назву фреймів.

Відомі фрейми для деяких інформаційних, організаційних та соціальних систем. Однак побудова і обґрунтування фреймів для довільної системи залишається складним завданням, від вирішення якої багато в чому залежить успіх декомпозиції. Розглянемо, наприклад, педагогічний процес у вищому навчальному закладі (ВНЗ). Фреймом при декомпозиції в даному випадку може служити формальна модель діяльності людини, запропонована ще К. Марксом в «Капіталі» для аналізу процесу праці (рис.2.19).

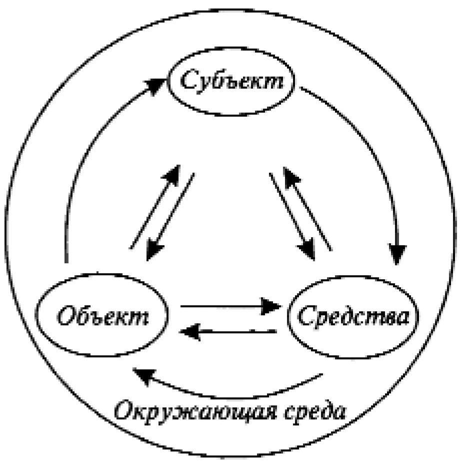

Рисунок 2.19 – Повна формальна модель діяльності людини

Як елементи тут виділені: суб'єкт діяльності, об'єкт, на який спрямована діяльність, і засоби, що використовуються в процесі діяльності, а також всі можливі зв'язки між ними і навколишнім середовищем. Використовуючи цю формальну модель, можна побудувати модель педагогічного процесу у вузі, варіант якій зображений на рис. 2.20. Тут суб'єктом виступає викладач вузу, об'єктами - студенти, а засобами - методичні, інформаційні та технічні засоби навчання (навчальні програми предметів, що вивчаються, методичні та навчальні посібники, лабораторна база і т.д.). Навколишнє середовище описується за допомогою трьох елементів: школи, вузу і міністерства, які мають істотний вплив на організацію навчального процесу (зрозуміло, що число елементів, що входять в наведену структурну модель, може бути набагато більше).

Рисунок 2.20 – Формальна модель педагогічного процесу у вузі

Однак при декомпозиції необхідно враховувати і інший критерій - простоту, який вимагає скорочення розмірів деревовидної структури. Таким чином, при декомпозиції повинен бути прийнятий якийсь компроміс між повнотою і простотою, який може бути досягнутий в тому випадку, якщо в структурну модель включаються тільки елементи, істотні по відношенню до мети аналізу.

Число рівнів декомпозиції (рівнів деревовидної структури) вибирається з таких міркувань. Декомпозиція по кожній з гілок деревоподібної структури ведеться до тих пір, поки не призведе до отримання елементів системи, які не потребують подальшого розкладання. Такі складові називаються елементарними. Відзначимо, що поняття елементарності складової системи повинно бути конкретизовано в кожному даному випадку окремо. При цьому можуть бути використані як формалізовані (за допомогою критеріїв), так і неформалізовані (за допомогою експертів) способи. Наприклад, в деяких випадках багатовимірну задачу механіки суцільного середовища вдається розкласти на послідовність одновимірних задач, що мають просте (аналітичне) рішення. Тоді кожну з цих одновимірних задач можна вважати елементарної частиною вихідної системи.

Частина системи, яку не можна вважати елементарної на підставі обраних критеріїв, підлягає подальшій декомпозиції. При цьому можуть використовуватися різні фрейми. Якщо дослідник «перебрав» все фрейми, але не досяг елементарності на будь-якої гілки деревовидної структури, то вводяться нові елементи в модель, взяту в якості підстави.

Слід зазначити, що в результаті декомпозиції буде реалізований лише перший етап структурного моделювання, а саме - етап аналізу. Після цього етапу вдається розділити досліджувану систему на окремі елементи (або вихідну задачу - на більш прості підзадачі). Однак, як було зазначено вище, на поведінку кожного елемента потрібно дивитися з точки зору цілей всієї системи. Іншими словами, отримана сукупність елементів крім зовнішньої цілісності (тобто певної відособленості від навколишнього середовища) повинна володіти і внутрішньої цілісністю.

Зовнішня цілісність добре описується моделлю «чорного ящика», а внутрішня - пов'язана з моделлю структури системи, тобто встановленням відносин між елементами. Для цього використовується операція агрегування - об'єднання декількох елементів в єдине ціле. Результатом агрегування є система, яку називають агрегатом. Властивості агрегату не є тільки сукупністю властивостей його окремих елементів. Агрегат може мати такі властивості, яких немає ні у одного з його елементів, взятих окремо. Іншими словами, об'єднання елементів в систему спричиняє появу нової якості, яка не могла з'явитися без цього об'єднання. Таке «раптове» поява нових якостей у агрегату отримало назву емерджентності (від англ. Emergent - раптово виникає). Слід зазначити, що нові властивості виникають завдяки конкретним зв'язків між елементами. Інші зв'язку можуть дати інші нові властивості агрегату.

Доброю ілюстрацією властивості емерджентності є приклад, запропонований М. Арбіб. Нехай є певний цифровий автомат 5, що збільшує на 1 будь-яке ціле число, яке надходить на його вхід. При послідовному з'єднанні двох автоматів в ланцюжок це властивість не змінюється. Якщо ж з'єднати два таких автомата послідовно в кільце (рис. 4.21), то в отриманому агрегаті виявиться нова властивість: він генерує зростаючі послідовності на виходах А і В, причому одна послідовність складається з парних, а інша - з непарних чисел. Іншим яскравим підтвердженням властивості емерджентності може служити приклад з матеріалознавства. Відомо, що тип кристалічної решітки (спосіб з'єднання атомів) визначає твердість матеріалу. При цьому твердість одержуваного агрегату, що складається з однакових елементів, може відрізнятися в десятки тисяч разів (графіт і алмаз).

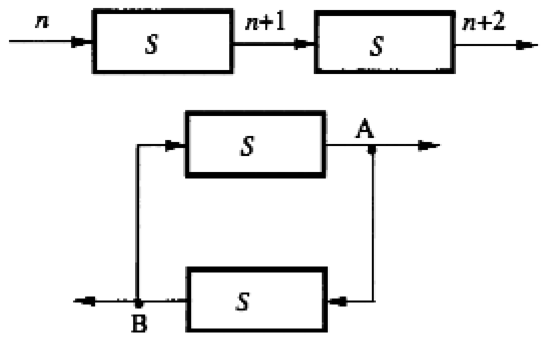

Рисунок 2.21 – Приклад обчислювального агрегату

Виникнення якісно нових властивостей при агрегування є приватна, але яскравий прояв одного із законів діалектики - закону переходу кількості в якість. При цьому вважається, що чим більше властивості агрегату відрізняються від властивостей його елементів, тим вище організованість системи. Кібернетик У. Ешбі довів, щоу системи тим більше можливостей у виборі поведінки, чим сильніше ступінь узгодженості поведінки її елементів. Вища ступінь прояву узгодженості поведінки елементів системи - самоорганізація системи, вивченням якої займається відносно молода міждисциплінарна область знань - синергетика (від грец. Synergos - разом діючий).

Таким чином, як випливає з вищевикладеного, при агрегування велике значення має встановлення зв'язків між елементами, тобто вибір моделі структури. Значить, в найзагальнішому вигляді агрегування можна визначити як встановлення відносин на заданій множині елементів. Таке встановлення відносин може бути проведено різними способами: побудовою математичних залежностей, структуруванням, статистичною обробкою, класифікацією і т.п. В результаті виходять різні агрегати, основними з яких є наступні: конфігуратор, класифікатор, оператор, статистик і структура. Розглянемо ці агрегати більш докладно.

Конфігуратором називається такий агрегат, який складається з якісно різних мов опису досліджуваного об'єкта і володіє тим властивістю, що число цих мов мінімально, але необхідно для виконання заданої мети. Слід зазначити, що конфігуратор є змістовною моделлю вищого можливого рівня. Перерахувавши мови, на яких буде вестися опис системи, ми тим самим визначаємо тип системи і її основні властивості.

Наприклад, в радіотехніці для опису одного і того ж приладу використовується наступний конфігуратор: блок-схема, принципова схема та монтажна схема. Цей конфігуратор повністю описує робочі характеристики приладу. Однак якщо крім мети виробництва радіоапаратури ставиться мета її збуту, то в конфігуратор необхідно додати мову реклами (маркетинг, дизайн, ціна і т.п.).

В інженерній графіці для опису поверхні будь-якого тривимірного тіла в якості конфігуратора використовуються сукупність трьох ортогональних проекцій. Число їх не можна зменшити і недоцільно збільшувати.

А який конфігуратор застосовується при математичному моделюванні? Вибір мови залежить від виду моделі. Зрозуміло, що основна мова для математичної моделі - мова математичних формул. Однак важливими етапами математичного моделювання є змістовна і концептуальна постановки завдання. На етапі змістовної постановки здійснюється словесна постановка завдання на тій мові, на якому вона формулюється замовником. На етапі концептуальної постановки виконується запис задачі на мові тих областей знань, які використовуються при моделюванні даного об'єкту. Тому конфігуратором в даному випадку можна вважати змістовну, концептуальну і математичну постановки завдання.

Як класифікатор виступає агрегат, який встановлює відносини еквівалентності між елементами системи, тобто описує умови утворення класів.

Кажуть, що на безлічі A визначено ставлення R, якщо по деякому правилу складені впорядковані пари елементів, які мають відношення. При цьому пишуть aRb, a, b ∈ A.

Відношення R на A, яке задовольняє аксіомам:

1) a R a (елемент a еквівалентний самому собі),

2) a R b => b R a (якщо елемент a еквівалентний елементу b, то елемент b еквівалентний елементу a),

3) a Rb, bRc =>aRc (якщо елемент a еквівалентний елементу bі елемент b еквівалентний елементу c, то елемент a еквівалентний елементу c),

називається відношенням еквівалентності. Воно розбиває безліч елементів системи на класи.

Наступним типом агрегату є оператор, який ставить у відповідність деякому набору окремих елементів один елемент.

Найбільш поширений в математичному моделюванні вид оператора - функція. Цей вид оператора з'являється, якщо агрегіруемі елементи вимірюються в числових шкалах. В такому випадку можна задати відношення на безлічі елементів у вигляді числової функції багатьох змінних f, яка і є агрегатом, тобто

$$f : R^n \to R, \tag{2.27}$$

де R^n–n-мірний евклідів простір; R – речова вісь. Тут елементом відображуваного простору R^n є n-мірний вектор змінних системи x = (x1, x2, ..., x_n), що характеризує її поведінку.

Наведений вид функції - один з найпростіших. У загальному випадку області визначення і значень функції можуть відноситься до більш складним просторів і множин. Конкретне завдання функції f(x) пов'язане з побудовою математичної моделі даної системи. Тому на вибір функції накладаються обмеження, що випливають із змістовної постановки задачі, тобто цей вибір не є вільним. У тих же (досить рідкісних) випадках, коли оператор-функція є цілком адекватною математичною моделлю всієї системи, свобода вибору функції, агрегує набір внутрішніх змінних, взагалі відсутній. Такий випадок має місце, наприклад, коли закономірності природи вдається з достатнім ступенем адекватності відобразити безрозмірними ступеневими одночленами фізичних розмірних величин. При цьому можна стверджувати, що якщо вдалося побудувати безрозмірний степеневий одночлен з розмірних фізичних величин, що утворюють конфігуратор певного явища, то встановлений фізичний закон даного явища. Це легко можна показати на прикладі другого закону Ньютона, що описує поступальний рух твердого тіла. Безрозмірний одночлен тут має вигляд

$$m_т a/F = 1, \tag{2.28}$$

що підтверджує правомірність отриманого закону.

На жаль, побудувати функціональну залежність, адекватно описує поведінку складної системи, дуже важко, а іноді практично неможливо. Набагато простіше встановити функціональні залежності між окремими елементами системи. У цьому випадку оператор буде являти собою деяку (часто нелінійну) систему рівнянь. Як правило, внутрішніми змінними системи не є числа, а функції одного або декількох аргументів. Тоді вихідними параметрами можуть виступати також функції, або функціонали. Наприклад, для динамічних систем, що описують процеси і явища, що змінюються в часі, зв'язок між внутрішніми параметрами x(t) і вихідними параметрами системи y(t) в операторної формі мають вигляд

$$y(t) = f(x(t)), \quad t \in [0,T], \tag{2.29}$$

де оператор f зазвичай являє собою систему диференціальних рівнянь, T-час протікання процесу. Приклад побудови подібного оператора для механічної системи, що складається з декількох тіл, буде наведено нижче.

При математичному моделюванні складних систем побудувати оператор f буває зовсім не просто. Це пов'язано з багатьма причинами. Основний з цих причин можна вважати брак інформації про характер і механізми взаємодії між окремими елементами системи. Наприклад, ці взаємодії можуть носити випадковий характер, закон якого нам невідомий. У цьому випадку говорять, що моделювання ведеться в умовах невизначеності, а оператор f може бути знайдений тільки з деякою обмеженою точністю, наприклад з точністю до кінцевого числа параметрів $\Theta = (\Theta_1, \Theta_2, ..., \Theta_n)$:

$$y(t) = f(x(t), \theta), \quad t \in [0, T]. \tag{2.30}$$

Зазвичай вважається, що параметри Θ носять випадковий характер або можуть бути визначені в ході самого моделювання за допомогою методів ідентифікації. У цьому випадку використовуються системи зі зворотним зв'язком. Назвемо оператор, який задається за допомогою алгоритму, що реалізує деякий набір правил, імітатором.

Окремо при агрегування розглядається ситуація, коли всі параметри, які описують поведінку елементів системи, є випадковими величинами. У цьому випадку вводиться поняття агрегату статистика, що визначає відносини на безлічі випадкових параметрів системи. Для його побудови використовуються функції вибіркових значень випадкових величин, в якості яких широко використовуються функції розподілу ймовірностей або щільності розподілу ймовірностей випадкових подій.

На практиці використовуються достатні і оптимальні статистики. Достатніми статистиками називаються такі агрегати, які витягують всю корисну інформацію про цікавить нас параметрі з сукупності спостережень. Наприклад, для систем, результат діяльності яких нас цікавить тільки в середньому, достатнім статистиком може служити математичне очікування вихідний випадкової величини. Однак на практиці достатні статистики застосовуються рідко, так як при такому агрегування втрати інформації неминучі. Найчастіше застосовуються оптимальні статистики - такі агрегати, які дозволяють звести втрати інформації до мінімуму. Наприклад, математичне очікування і дисперсія випадкової величини в сукупності є оптимальним статистиком для багатьох технічних систем.

Останнім з розглянутих видів агрегатів, але не останнім по частоті застосування при структурному моделюванні є структура системи, тобто агрегат, який встановлює типи зв'язків між окремими елементами системи. Найбільш широко подібний вид агрегування застосовується при моделюванні технічних, інформаційних і організаційних систем. Наприклад, в матеріалознавстві в якості структури матеріалу використовуються різні моделі кристалічних решіток, що встановлюють типи зв'язку між атомами і симетрійного властивості кристала. В інформаційних системах застосовується структура у вигляді первинної мережі, що вказує напрямок і інтенсивність передачі інформації. В організаційних системах структура описує ієрархію в процесі прийняття рішень та розподіл влади і відповідальності (відповідальність за прийняті рішення).

2.7 Моделювання в умовахневизначеності з позиційтеоріїнечіткихмножин

При вирішенні завдань математичного моделювання (завдання проектування, опису різних технологічних процесів, вибору оптимальних параметрів і т.д.) вже на стадії концептуальної постановки необхідно задуматися над тим, наскільки однозначно визначені параметри, в термінах яких здійснюється математичний опис об'єкта моделювання. На цьому етапі необхідно визначити для кожного параметра, чи можна вважати його однозначно певним або йому властива деяка невизначеність. Причому невизначеними можуть бути не тільки параметри, але і зв'язки між ними. Невизначеність розуміється в тому сенсі, що відповідні характеристики даної системи знаходяться в умовах наближення і неповноти інформації. Ця невизначеність може бути пов'язана, з одного боку, з тим, що параметри можуть змінюватися випадковим чином, а з іншого боку, з тим, що вони можуть адаптуватися (змінюватися, встановлюватися) в процесі функціонування досліджуваної системи.

До найбільш значущих причин появи невизначеності можна віднести наступні:

> Показники системи практично завжди залежать від великої кількості різних факторів, причому частина з них може бути навіть невідома досліднику;

> При побудові моделі зазвичай обмежуються відбором найбільш істотних (на думку суб'єкта або в силу об'єктивних обставин) змінних, що, звичайно, призводить до огрубіння моделі;

> Математичні похибки, що виникають при лінеаризації моделі або використанні розкладання в ряд при обмеженні на число членів ряду; помилки вимірювань і похибки при проведенні експерименту і т.п.

У загальному випадку всі причини виникнення невизначеності можна розбити на дві основні групи: *суб'єктивні і об'єктивні*. Суб'єктивні причини обумовлені деякими приватними, нерегулярно повторюваними явищами, тому їх досить складно врахувати при вирішенні прикладних задач. Об'єктивні причини найчастіше пов'язані з фізичними особливостями досліджуваного явища.

Наприклад, якщо розглядати завдання дослідження деякого технологічного процесу, то до суб'єктивних причин можна віднести кваліфікацію працівників, які проводять і регламентують досліджуваний процес, їх навички, реакцію, час адаптації і т.д. До об'єктивних причин появи невизначеності для такого типу завдань можна віднести:

> Фізико-механічні властивості матеріалів, що поставляються (зокрема, межа плинності, модуль Юнга, коефіцієнти теплопровідності, теплоємності, тепловіддачі і т.д.);

>Анізотропію властивостей;

> Поля залишкових напружень;

> Геометричні характеристики заготовок (форма і розміри); > Характер зносу інструменту і т.д.

У свою чергу кожна із зазначених об'єктивних причин появи невизначеності може бути обумовлена цілим рядом передумов. Так, неоднорідність властивостей матеріалу, з одного боку, визначається як неоднорідність за обсягом, обумовлена особливостями технологічного процесу (виливки, прокат, армовані і порошкові композити та інші), а з іншого – як неоднорідність партій поставляються заготовок. При вирішенні прикладних задач для усунення невизначеностей зазвичай вводиться припущення про прийняття в якості фізико-механічних характеристик деяких граничних або середніх значень (з можливих діапазонів). На наш погляд, подібне припущення є досить спірним в силу нелінійності досліджуваних процесів і складного характеру взаємодії окремих частин об'єкта між собою. Тому виникає необхідність врахування розподілу відповідної невизначеною величини.

Залежно від повноти опису невизначеність можна розбити на три основні групи: невідомість, недостовірність і неоднозначність. Розглянемо групи опису невизначеності більш детально (рис. 2.22).

Невідомість - це початкова стадія опису невизначеності, при якій інформація повністю відсутня.

Недостовірність - це друга стадія опису невизначеності, яка для різних стадій збору інформації може класифікуватися як неповнота, недостатність, недовизначеність і неадекватність. Неповнота характеризується тим, що зібрана не вся можлива інформація; недостатність - зібрана не вся необхідна інформація. *Недовизначеність* - для деяких елементів визначені не їм точну характеристику, а лише безлічі, яким ці описи належать; неадекватність - ряд елементів досліджуваного об'єкта описаний за аналогією з уже наявними описами подібних елементів, тобто має місце так зване «заміщає» опис, яке не завжди задовольняє цілям дослідження.

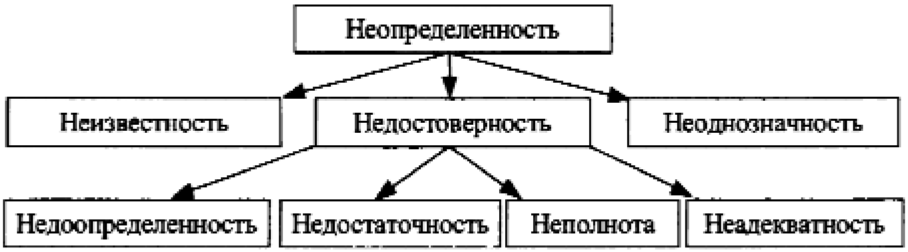

Рисунок 2.22 – Види опису невизначеностей

Подальший аналіз невизначеності, облік нових факторів, що визначають досліджуване явище, може привести або до усунення невизначеності (всі елементи описані однозначно), або до неоднозначності.

Неоднозначність - це кінцева (по повноті можливого опису) ступінь невизначеності, коли вся можлива інформація зібрана, але повністю необхідне опис не вийшло.

Причини виникнення неоднозначності можуть бути лінгвістичні і фізичні, (рис. 2.23).

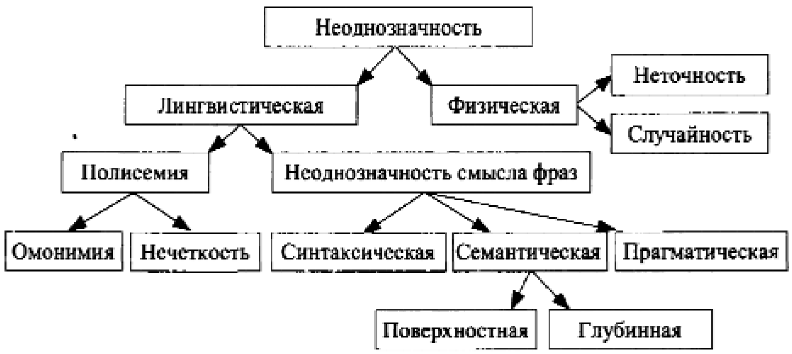

Рисунок 2.23 – Причини виникнення неоднозначності

Фізична невизначеність пов'язана або з наявністю декількох можливостей, кожна з яких випадковим чином може стати реальністю, або з неточністю обчислень або вимірювань. Таким чином, фізична невизначеність пов'язана або з фізичною суттю досліджуваного явища, або з його вимірюваними проявами.

Лінгвістична невизначеність пов'язана з використанням деякого природної мови. Вона породжується, з однієї сторони, множинністю значень слів (понять і відносин) - полісемією (грец. polysema - багатозначність), з іншого - неоднозначністю сенсу фраз.

Можна виділити два види полісемії: *омонимию і нечіткість.*

Омонімія (грец. Homonymia - одноименность) характеризується тим, що одним і тим же словом можна характеризувати різні фізичні об'єкти. Наприклад:

коса - це вид узбережжя, інструмент або зачіска. Якщо ж об'єкти опису подібні по суті, але описують деякий безліч понять, то ситуацію відносять до *нечіткості*. Наприклад, поняття кілька кроків. Це може бути два кроки, три кроки, чотири кроки і т.д

Розглядаючи джерела неоднозначності сенсу фраз, можна виділити синтаксичну, семантичну і прагматичну неоднозначність. При *синтаксичної* невизначеності уточнення синтаксису дозволяє зрозуміти сенс фрази. Приклад: «стратити не можна помилувати» - «стратити, не можна помилувати» або «стратити не можна, помилувати». Семантична невизначеність буває поверхнева і глибинна. У першому випадку окремі слова зрозумілі, але неясний сенс фрази («*блакитні зелені думки люто сплять*»), у другому випадку незрозумілі і все окремі слова («*глокаякуздраШтекбудланулабокра і курдячітбокренка*»). *Прагматична* невизначеність пов'язана зі спільною проявом синтаксичної і семантичної невизначеності. Вона частішепроявляється при роботі з незнайомими об'єктами і, можливо, в незнайомому (наприклад, мовному) середовищі.

Як уже зазначалося, на стадії концептуальної постановки завдання можна виконати детальний аналіз ступеня невизначеності всіх характеристик системи і зв'язків між ними. При переході до математичної постановці завдання перед дослідником постають непрості питання: яким типом змінних описати ті чи інші параметри і як описати зв'язок між цими параметрами?

Якщо цілі дослідження припускають однозначне опис явища (процесу) або якщо параметри системи і зв'язку між ними визначені єдино можливим чином, то в цьому випадку застосовується чіткий опис, тобто всі характеристики вважаються детермінованими і зв'язку між відповідними чіткими змінними - однозначними. В іншому випадку в залежності від цілей дослідження і необхідної повноти опису можна використовувати різні математичні підходи уявлення невизначеностей. Відзначимо, що ускладнення моделі (наприклад, ієрархічність) також може привести до необхідності використання інших типів опису змінних, що характеризують досліджуване явище.

Математично невизначеність може бути описана стохастично, статистично, з позицій теорії нечітких множин, а також інтервально (рис. 2.24). Зазначені форми опису містить список за зростанням ступеня невизначеності. Розглянемо фізичний зміст цих невизначеностей.

Рисунок 2.24 – Форми опису невизначеності

Стохастичний опис використовується тоді, коли невизначені параметри мають імовірнісний (випадковий) характер.

При цьому необхідно, щоб був визначений закон розподілу таких випадкових параметрів. Стохастичним описом займається теорія ймовірностей і теорія випадкових процесів.

Статистичний опис є, по суті, окремим випадком стохастичного опису. Цю форму опису застосовують, коли задані тільки вибіркові оцінки будь-яких характеристик випадкової величини або набори значень деяких випадкових параметрів. Статистичним описом займається математична статистика.

При описі з позицій нечітких множин невизначений параметр задається деяким безліччю можливих його значень, що характеризуються тим або іншим ступенем приналежності (за допомогою так званої функції приналежності) об'єкту, описуваному цим нечітким безліччю. Функція приналежності може приймати значення від 1 (повна приналежність) до 0 (повна неналежність). Інтерпретацією функції приналежності є суб'єктивна міра того, наскільки повно елемент (параметр) відповідає поняттю, сенс якого описується нечіткою множиною. Цим описом займається теорія нечітких множин [39,82].

Інтервальний опис можна використовувати, коли невизначені параметри задані тільки діапазонами можливих значень (верхньою і нижньою межами), причому параметр може приймати будь-яке значення всередині інтервалу і йому не можна приписати ніякої імовірнісної міри. Інтервальний опис є предметом дослідження інтервального математики.

Слід зазначити, що залежність математичного підходу до опису змінних від повноти наявної інформації досить умовна. Так, при чисельній реалізації тих чи інших алгоритмів моделей на ЕОМ навіть для детермінованих змінних (неявним чином) використовується апарат інтервальних обчислень, так як розрахунки на ЕОМ ведуться з інтервальними величинами. Тому вважати, що інтервальний опис змінних «менш певне», ніж стохастическое, напевно, не можна. Однак з цим твердженням можна погодитися, якщо інтервальний опис вводиться вже на стадії концептуальної і математичної постановок задач.

Різноманіття форм опису невизначеностей призводить до різних особливостей постановки і вирішення відповідних завдань.

При вирішенні складних технічних, економічних, технологічних, соціальних та інших завдань ми стикаємося з тим, що чим складніше система, тим менше ми здатні дати точні і в той же час мають практичне значення судження про її поведінку. Така ситуація визначається терміном «принцип несумісності».

Висновок з цього принципу коротко можна сформулювати так: «Чим глибше ми аналізуємо реальну задачу, тим невизначений стає її рішення». Саме в цьому сенсі точний кількісний аналіз поведінки складних систем для практичного дослідження реальних завдань, мабуть, недостатній. Підхід, який спирається на передумову про те, що елементами дослідження являються не числа, а деякі нечіткі множини, для яких перехід від «приналежності до класу» до «неналежність" не скачкообразен, а безперервний. В основі такого підходу лежить не традиційна двозначна або навіть багатозначна логіка, а логіка з нечіткою істинністю, нечіткими зв'язками і нечіткими правилами виводу. Цей підхід має три відмінні риси:

1) в ньому використовуються так звані «лінгвістичні» змінні замість числових змінних або на додаток до них;

2) прості відносини між змінними описуються за допомогою нечітких висловлювань;

3) складні відносини описуються нечіткими алгоритмами.

Відзначимо, що з математичної точки зору запропонований підхід як метод опису невизначеності лежить між описами з позицій теорії ймовірностей і математичної статистики (в цьому випадку параметри системи, що мають імовірнісний, випадковий характер, визначаються деякими розподілами) і з позицій інтервальної математики, при якій характеристики задаються діапазонами можливих значень (верхніми і нижніми межами).

ми і нижніми межами).

Подібний тип завдань найчастіше має місце в тому випадку, коли концептуальна постановка задачі сформульована у вигляді деякого невизначеного висловлювання типу «Якщо А, то В» (А = * В), в якому А і В можна описати нечіткими множинами.

Перш ніж перейти до докладного обговорення запропонованого підходу, наведемо деякі основні положення.

Нечітка безліч - це математична модель класу з нечіткими або, інакше кажучи, розмитими межами.

У цьому понятті враховується можливість поступового переходу від приналежності до неналежність елемента множині. Іншими словами, елемент може мати ступінь приналежності безлічі між повною приналежністю (1) і повною неналежністю (0). Якщо ступінь приналежності позначити μ, то $\mu \in [0,1]$.

Введемо деякі основні поняття і визначення. З математичної точки зору нечітка множина А можна визначити наступним чином:

Нечіткою множиною А в U називається сукупність пар виду $(u, \mu_A(u)$, де $u \in U$, а μ_A (u) - функція приналежності елементівнечіткої множини А, μ_A: U ->

[0,1]; U – деяка множина (в звичайному сенсі) елементів, яке називається *універсальною множиною*. (Поняття множини вважається первиннимі не визначається. По суті, множина – це сукупність елементів будь-якого виду). Для кожного елемента $u \in U$ функція приналежності визначає ступінь його належності тієї сукупності елементів, яка формалізується даними нечітким безліччю. Математично нечітка множина визначається наступним чином:

$$A = \bigcup_{u \in U} \mu_A(u)/u.^* \tag{2.31}$$

Наприклад, нехай універсальна множина і сукупність функцій приналежності описуються виразами: U = (a, b, c, d, e, f) і M= (0; 0, 5; 1). В цьому випадку M - сукупність можливих значень функції приналежності. При цьому одна з можливих форм запису нечіткого безлічі A може бути представлена в наступному вигляді:

A = (0,0/a; 1,0/b; 0,5/c; 0,0/d; 0,5/e, 0,0/f)

Розглянемо більш докладно, що розуміється під функцією приналежності. Спектр думок з цього питання надзвичайно широкий. Якщо під функцією приналежності розуміти «міру благопріятствія» відповідних елементів тому поняттю, яке формалізується даними нечітким безліччю, то в цьому випадку функція приналежності ототожнюється з поняттям ймовірності (визначення поняття ймовірності дано нижче).

Передбачається, що функція приналежності - це деякий неймовірнисний суб'єктивний вимір неточності, що вона відмінна від щільності ймовірності і від функції розподілення ймовірності. Іноді під функцією приналежності розуміють можливість або корисність тієї чи іншої події.

У даній роботі, під значенням функції приналежності $\mu_A(x)$ нечіткої множини A для будь-якого $x \in X$ будемо розуміти ймовірність того, що особа, яка приймає рішення (ОПР), віднесе елемент x до безлічі A. В випадку, коли A - деяке поняття природної мови, а x - елемент безлічі об'єктів, що позначаються поняттям A, $\mu_A(x)$ є ймовірність того, що ЛПР використовує A як ім'я об'єкта x. Необхідно відзначити, що:

> Наведена інтерпретація, яку будемо називати ймовірнісної, не виключає інших (в тому числі неймовірнисних);

> Елемент x, як випливає з визначення, вже пред'явлено ЛПР, а ЛПР і вирішує завдання віднесення елемента до нечіткій множині A.

Як конкретний приклад застосування апарату теорії нечітких множин для математичного моделювання деякого явища розглянемо наступну задачу.

Приклад. Нехай справедливим вважається наступне висловлення: «Якщо дорога слизька - їзда небезпечна, в іншому випадку - НЕ небезпечна». Необхідно визначити, в якому випадку їзда буде більш небезпечною: якщо дорога не дуже слизька або дорога є дуже не слизькою!

Відзначимо, що в якості прикладу вибрано найпростіше твердження, яке легко формалізується, відповідь на нього майже очевидна. В реальних задачах операцій може бути десятки і сотні і відповіді на поставлені питання не такі тривіальні.

Для математичної постановки представленої задачі необхідно ввести ряд визначень і деякі найпростіші операції з нечіткими множинами, що і робиться нижче.

Носієм нечіткої множини А (*Supp*А або S(A)) називається множина (у звичайному розумінні), яка визначається як

$$Supp\,A = \{u / u \in U,\ \mu_A(u) > 0\}$$

Нечітке відношення R: X –>У представляє бінарне відношення нечітких множин Xi Y; R наступним чином описується за допомогою функції приналежності двох змінних:

$$\boldsymbol{R} = \bigcup_{(x,y)\in X\times Y} \mu_{\boldsymbol{R}}(x,y)/(x,y).$$

постановки завдання показує перевагу або схожість елементів першого і другого нечітких множин.

Порівнюючи визначення нечіткої множини і нечіткого відносини, можна бачити, що останнє - це нечітка множина з векторної базової змінної. Залежно від того, для чого використовуються бінарні нечіткі відносини, вводяться нечіткі відносини *подібності* та нечіткі відносини *переваги*.

Для прикладу розглянемо бінарне відношення подібності. Припустимо, що X = {яблуко, груша}, Y = {айва, апельсин}. Подібність будемо оцінювати за ступенем солодощі зрілих фруктів (функція приналежності в цьому прикладі вибирається суб'єктивно; в даному випадку вважають, що за ступенем солодощі груша і апельсин найбільш близькі, а груша і айва - найменш близькі один одному).

Бінарне нечітке відношення подібності між елементами множин Xi У можна записати у вигляді:

схожість = {0,8 / (яблуко, айва); 0,6 / (яблуко, апельсин);

0,2 / (груша, айва); 0,9 / (груша, апельсин)}.

Для зручності запису в теорії нечітких множин нечіткі відносини зазвичай подаються у вигляді так званої *матриці відносин*. В даному випадку маємо:

$$R = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.6 \\ 0.2 & 0.9 \end{bmatrix}$$

де елемент R_Y дорівнює значенню функції $\mu_R(x, y)$ для і-го елемента X і j-го елемента Y.

В реальних задачах часто виникає така ситуація. Між множинами X –>У і Y–>Z є бінарні нечіткі відносини. Необхідно встановити бінарне нечітке відношення між множинами X –>Z. Ця ситуація вимагає введення операції добутка відносин. Нехай R - відношення X –> У, а S – відношення У –> Z, тоді відношення X –> Z визначить додаток R*S, яке в теорії нечітких множин визначається як *максимінниййдобуток* такого вигляду:

$$\boldsymbol{R} \circ \boldsymbol{S} = \bigcup_{x,z \in (X,Z)} \max(\min(\mu_R(x,y), \mu_S(y,z)))/(x,z).$$

При виконанні звичайного добутку матриць елемент матриці-добутка, що стоїть в і-му рядку і k-му стовпці, дорівнює сумі добутків відповідних елементів і-го рядка першої матриці і k-того стовпцядругоїматриці. По суті, *максимінниййдобуток*визначається як звичайнийдобуток матриць, де замість операції множення вводиться min, а замість операції додавання - max.

Нехай, наприклад

$$R = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.8 \\ 0.6 & 0.9 \end{bmatrix}, \quad S= \begin{bmatrix} 0.5 & 0.9 \\ 0.4 & 1.0 \end{bmatrix}$$

тоді

$$R*S= \begin{bmatrix} 0.3 & 0.8 \\ 0.6 & 0.9 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0.5 & 0.9 \\ 0.4 & 1.0 \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} \max(\min(0.3; 0.5);\ \min(0.8; 0.4)) & \max(\min(0.3; 0.9);\ \min(0.8; 1.0)) \\ \max(\min(0.6; 0.5);\ \min(0.9; 0.4) & \max(\min(0.6; 0.9);\ \min(0.9; 1.0)) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0.4 & 0.8 \\ 0.5 & 0.9 \end{bmatrix}$$

Нечіткою (лінгвістичною) змінною називається сукупність(кортеж) виду (X, U, $\tilde{X}$), де X- найменування нечіткої змінної; U = {u} - область її визначення (звичайна множина);

$\tilde{X} = \bigcup_{u \in U} \mu_{\tilde{x}}(u)/u$і - нечітка множина на U, яке описує чисельнізначення нечіткої змінної X.

Якщо звернути увагу на структуру найменування лінгвістичної змінної, то можна відзначити, що в загальному випадку це складовою термін, який представляє поєднання деяких елементарних термінів. Ці елементарні терміни можна розбити на чотири основні категорії:

>*Первинні* - символи спеціальних нечітких підмножин, наприклад молодий, старий і т.д .;

> Заперечення НЕ та спілки I, АБО;

>*Невизначеності* типу: дуже, слабо, більш-менш і т.д .;

>*Маркери* найчастіше це вступне слово.

Приклад. Нехай нечітка множина описується складовим терміном: «на думку оточуючих, це був не дуже сильний і зовсім не високий чоловік». Виділимо основні категорії:

> Первинні терміни - сильна, висока (людина);

> Заперечення НЕ та спілки I;

> Невизначеності - дуже, зовсім;

> Маркери – на думку оточуючих.

Заперечення НЕ, союзи I, АБО, невизначеності типу *дуже, зовсім, більше, менше* та ін., які входять у визначення значень лінгвістичних змінних, можуть розглядатися як символи різних операцій, визначених на нечітких підмножинах U. Розглянемо найбільш істотні з них.

Нехай A і B - нечіткі множини; S(A), S(B) - їх носії. Зазвичай вводяться два набору визначень основних операцій над нечіткими множинами: *максимінний* (mm) і *імовірнісний* (p). Об'єднанням нечітких множин A і B називається нечітка множина A ∪ B з функцією приналежності виду:

$$\mu_{A\cup B}(u)=\begin{cases}\max(\mu_A(u),\ \mu_B(u)),\ u\in U, & -(mm),\\ \mu_A(u)+\mu_B(u)-\mu_A(u)\cdot\mu_B(u),\ u\in U, & -(p).\end{cases}$$

Об'єднання відповідає союзу АБО. Таким чином, якщоXі Y - символи нечітких множин, то X ∪ Y = (X або Y).

Приклад. Нехай A = (0,2/1; 0,5/2; 1,0/3), B = (0,8/1; 0,4/2; 0,5/3; 0,8/4) . Тоді:

A ∪ B = (0,8/1; 0,5/2; 1,0/3; 0,8/4) - (mm);

A ∪ B = (0,84/1; 0,7/2; 1,0/3; 0,8/4) - (p).

Перетином нечітких множин A і B у U називається нечітка множина A∩B з функцією приналежності виду:

$$\mu_{A\cap B}(u)=\begin{cases}\min(\mu_A(u),\mu_B(u)),\ u\in U, & -(mm),\\ \mu_A(u)\cdot\mu_B(u),\ u\in U, & -(p).\end{cases}$$

Перетин відповідає союзу I. Таким чином, X∩Y = (Xі Y).

Приклад. Нехай A = (0,2/1; 0,5/2; 1,0/3), B = (0,8/1; 0,4/2; 0,5/3; 0,8/4) . Тоді:

A∩B = (0,2/1; 0,4/2; 0,5/3; 0,0/4) - (mm);

A∩B = (0,16/1; 0,2/2; 0,5/3; 0,0/4) - (p).

Доповненням нечіткої множини A називається нечітка множина $\overline{A}$ з функцією приналежності:

$$\mu_{\bar{A}}(u) = 1 - \mu_A(u), \ u \in U, -(mm, p).$$

Визначення доповнення відповідає запереченню НЕ, тобто

$$\bar{X} = (\text{не } X) = \bigcup_U (1 - \mu_X(x)) / x.$$

Приклад. Нехай A = (0,2/1; 0,5/2; 1,0/3). Тоді $\overline{A}$ = (0,8/1; 0,5/2; 0,0/3).

Декартовийдобуток A_1*A_2*..* ...*A_nнечітких множин A_i в U_i, i=$\overline{1,n}$, визначається як нечітка множина A в декартовому добутку U = U_1*U_2*…U_nз функцією приналежності виду:

$$\mu_A(u) = \min\{\mu_{A_1}(u_1), \ldots, \mu_{A_n}(u_n)\}, \ u = (u_1, \ldots, u_n) \in U.$$

Звичайноюмножиноюα-рівня нечіткоїмножини A називається

$$S_\alpha = \{u : u \in U, \ \mu_A(u) \geq \alpha\},$$

де α ∈ [0,1].

Для визначення арифметичних операцій *=(+, -, /) існує так званий *принципузагальнення* Л.А.Заде.

Нехай A і B - дві нечітких множини. Тоді нечітка множина D = A*B визначається функцією приналежності

$$\mu_D(u) = \Theta[\mu_A(u), \mu_B(u)],$$

де

$$\Theta[\mu_A(u), \mu_B(u)] = \begin{cases} \sup\limits_{\substack{a \otimes b = u \\ a \in S_A, b \in S_B}} \min(\mu_A(u), \mu_B(u)), & -(mm), \\ \sup\limits_{\substack{a \otimes b = u \\ a \in S_A, b \in S_B}} (\mu_A(u) \cdot \mu_B(u)), & -(p). \end{cases}$$

Тепер арифметичні операції *=(+, -, /) можна визначити наступним чином: A*B = $\bigcup_u \mu_D(u)/(a * b)$, якщо операція (a*b) визначена.

Прикладоперацій над множинами.

Нехай A = (0,2/1; 0,5/2; 1,0/3), B= (0,8/1; 0,4/2; 0,5/3; 0,8/4). Тоді

$$A+B=\sup_{\substack{a\otimes b=u\\ a\in S_A,b\in S_B}}(0{,}2/2;\ 0{,}2/3;\ 0{,}2/4;\ 0{,}2/5;\ 0{,}5/3;\ 0{,}4/4;\ 0{,}5/5;\ 0{,}5/6;\ 0{,}8/4;$$

$$0{,}4/5;\ 0{,}5/6;\ 0{,}8/7)=(0{,}2/2;\ 0{,}5/3;\ 0{,}8/4;\ 0{,}5/5;\ 0{,}5/6;\ 0{,}8/7)\ -\ (\boldsymbol{mm});$$

$$A+B=\sup_{\substack{a\otimes b=u\\ a\in S_A,b\in S_B}}(0{,}16/2;\ 0{,}08/3;\ 0{,}1/4;\ 0{,}16/5;\ 0{,}4/3;\ 0{,}2/4;\ 0{,}25/5;\ 0{,}4/6;$$

$$0{,}8/4;\ 0{,}4/5;\ 0{,}5/6;\ 0{,}8/7)=(0{,}16/2;\ 0{,}4/3;\ 0{,}8/4;\ 0{,}4/5;\ 0{,}5/6;\ 0{,}8/7)\ -\ (\boldsymbol{p}).$$

Ступенем нечіткої множини А називається нечітка множина A^{α}- з функцією приналежності

$$\mu_{A^{\alpha}}(u)=(\mu_A(u))^{\alpha},\ u\in U,\ \alpha>0.$$

При α = 2 отримуємо операцію *концентрування* (CON): CON(A) = A^2.

В результаті застосування цієї операції до множини А знижується ступінь нечіткості опису, причому для елементів з високим ступенем приналежності це зменшення відносно мало, а для елементів з малим ступенем приналежності - відносно велике.

При α = 0,5 отримуємо операцію *розтягування* (DIL): DIL(A) = $A^{0,5}$. Ця операція збільшує ступінь нечіткості вихідної нечіткої множини.

Невизначеність зручно визначити через деякі основні операції (особливо операції ступінь, CON, DIL). Покажемо, як це можна зробити для невизначеності *дуже*. Аналогічним чином можна встановити невизначеності: *більше, менше, багато, слабо, на кшталт, цілком і ін.*

У звичайному використанні невизначеність *дуже* не має чітко визначеного значення і діє як підсилювач, генеруючи підмножини того безлічі, до якого вона застосовується. Аналогічним чином діє операція концентрування, тому *дуже і*, де *і* - деякий термін, може бути визначено як квадрат і, тобто

дуже u=u^2=$\cup_U \mu_U^2\,(u)/u$

Наприклад, якщо u = *маленький вік* = (1,0/1; 0,8/2; 0,6/3; 0,4/4; 0,2/5), тоді дуже маленький вік = (1,0/1; 0,64/2; 0,36/3; 0,16/4; 0,04/5). Розглянутий як оператор, *дуже* може діяти сам на себе. Так, наприклад, *дуже дужеu* = (*дуже u*) 2 = u^4

Зауважимо, що порядок проходження елементарних термінів в складеному терміні істотно впливає на результат. Так, наприклад:

u= *дуже неточно* = $(\overline{\text{точно}})^2$ і u = *не дуже точно*=$\overline{(\text{точно})^2}$ – не одне і те ж саме. З іншого боку, *не дуже точно* може бути записано по-різному, хоча результат буде один і той же:

u = ue дуже точно = $\overline{\text{дуже точно}}$=$\overline{(\text{точно})^2}$

Повернемося до нашого прикладу про слизькі дороги.

Вислів «якщо А, то В, інакше С» (де А, В, С – нечіткіпідмножини, при цьому А обов'язково з U, а В і С можуть бути визначені як на U, так і на V в залежності від формулювання завдання; нагадаємо, що U і V- універсальні множини, на яких визначені нечіткі множини А, В, С) в термінах декартового добутку можна визначити наступним чином:

$$\textit{если } A, \textit{ тогда } B, \textit{ иначе } C \overset{\text{def}}{=} A \times B \cup \bar{A} \times C.$$

По суті, ми отримали деякий невизначене ставлення R (R: U => V). Далі (за умовою завдання) ми хочемо визначити значення деяких підмножин з V, які визначаються заданими підмножинами з U. Для вирішення цієї та подібного типу завдань було сформульовано *складене правило виведення*, яке має наступний вигляд.

Якщо R - невизначене ставлення U => V і x - невизначена підмножина U, тоді невизначена підмножинаy∈V, яке індукується підмножиною x, дається композицією x і R, тобто y = x*R, де «*» - максимінннийдобуток.

У розглянутому прикладі 1 необхідно визначити x_1 - «*дорога не дуже слизька*», x_2 - «*дорога дуже не слизька*», і, вирішивши відповідні завдання виведення, отримаємо підмножини y_1іy_2.

Для порівняння отриманих нечітких множин будується деяка чітка функція H (y_1, y_2) від нечітких аргументів, яка називається індексом ранжирування. Значення індексу для конкретної пари нечітких чисел (є, по суті, нечіткими множинами) дає підставу вирішити питання про те, яке з двох нечітких чисел більше (або - з яким ступенем більше). Найпростіший індекс ранжирування має вигляд:

$$H_5^1(A,B) = \sup_{a \geq b} \min(\mu_A(a), \mu_B(b)),$$

де sup — позначення точної верхньої межі множини. При цьому, якщо $H\frac{1}{5}$(A,B) > $H\frac{1}{5}$(B,A), то A > B.

Відзначимо, що наведений індекс ранжирування як найбільший вибирає то нечітке число, пік функції приналежності якого відповідає більшому значенню носія. Даний індекс ранжирування є детермінованим, так як для порівняння нечітких чисел використовуються однозначно визначені представники цих нечітких чисел. Недоліком детермінованих індексів ранжирування є те, що вони не враховують вид і форму функції приналежності порівнюваних нечітких чисел. Щоб уникнути такого обмеження, в теорії нечітких множин введено так звані інтегральні індекси ранжирування. Розглянемо один з них:

$$H_2(A,B) = H_+(A) - H_+(B), \quad H_+(A) = \sum_{\Delta\alpha} M(A^\alpha) \cdot \Delta\alpha,$$

де A^α–α-рівнева підмножина нечіткої множини А;

$$M(A^\alpha) = \frac{\inf\limits_{a \in A^\alpha} a + \sup\limits_{a \in A^\alpha} a}{2},$$

де inf – точна нижня межа множини.

При цьому якщо $H_2(A, B) \geq 0$, то $A \geq B$. Відзначимо, що інтегральні індекси ранжирування дають більш точний результат рішення, ніж детерміновані.

<u>Приклад</u>. Нехай A = (0,1/1; 0,2/2; 0,8/3; 0,4/4; 0,2/5); B = (0,4/1; 0,5/2; 0,9/3; 0,5/4; 0,1/5). Тоді:

$$H_+(A) = H_+(A)_1 + H_+(A)_2 + H_+(A)_3 + H_+(A)_4 =$$
$$= \frac{1+5}{2}0{,}1 + \frac{2+5}{2}0{,}1 + \frac{2{,}33+4}{2}0{,}2 + \frac{3+3}{2}0{,}4 = 2{,}48;$$

$$H_+(B) = \frac{1+5}{2}0{,}1 + \frac{2+4}{2}0{,}4 + \frac{3+3}{2}0{,}4 = 2{,}7;$$

$$H_2(A,B) = H_+(A) - H_+(B) = 2{,}48 - 2{,}7 = -0{,}22 < 0 \Rightarrow A < B.$$

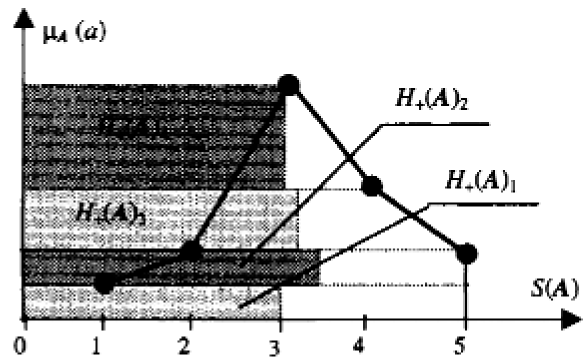

Рисунок 2.25 – Ілюстрація до визначення індексів ранжування

Продовження прикладу.

Введемо нечіткі множини слизька дорога і небезпечна їзда. Першу нечітку множину можна визначити через коефіцієнт тертя ковзання. Якщо використовувати коефіцієнти 0,01; 0,02; 0,03; 0,04; 0,05; 0,06, то можна записати:

A = слизька дорога = (0,8/0,01; 1,0/0,02; 0,6/0,03; 0,4/0,04; 0,2/0,05; 0,1/0,06) .

Для визначення ступеня небезпеки можна ввести коефіцієнти небезпеки I-V. Наприклад, I - це легкі удари, садна; II - переломи кінцівок і т.д. При цьому

B = небезпечна їзда = (0,1 / 1; 0,3 / П; 0,5 / Ш; 0,7 / IV; 0,9 / V).

Тепер можна визначити всі необхідні для виконання завдання чіткі множини:

Не слизька дорога $=\overline{A}=(0{,}2/0{,}01;\ 0{,}0/0{,}02;0{,}4/0{,}03;\ 0{,}6/0{,}04;\ 0{,}8/0{,}05;\ 0{,}9/0{,}06)$;

Безпечна їзда = B = (0,9/I; 0,7/II; 0,5/III; 0,3/IV; 0,1/V);

X_1 = Не дуже слизька дорога=

$=\overline{A^2} = (0{,}36/0{,}01;\ 0{,}0/0{,}02;\ 0{,}64/0{,}03;\ 0{,}84/0{,}04;\ 0{,}96/0{,}05;\ 0{,}99/0{,}06)$;

X_2 – Зовсім не слизька дорога =

$= \overline{A^2} = (0{,}04/0{,}01;\ 0{,}0/0{,}02;\ 0{,}16/0{,}03;\ 0{,}36/0{,}04;\ 0{,}64/0{,}05;\ 0{,}81/0{,}06)$; Визначимо нечітке відношення R: $R = A\times B\cup \overline{A}\times\overline{B}$. Якщо

$$A\times B=\begin{bmatrix}0{,}1&0{,}3&0{,}5&0{,}7&0{,}8\\0{,}1&0{,}3&0{,}5&0{,}7&0{,}9\\0{,}1&0{,}3&0{,}5&0{,}6&0{,}6\\0{,}1&0{,}3&0{,}4&0{,}4&0{,}4\\0{,}1&0{,}2&0{,}2&0{,}2&0{,}2\\0{,}1&0{,}1&0{,}1&0{,}1&0{,}1\end{bmatrix};\quad \overline{A}\times\overline{B}=\begin{bmatrix}0{,}2&0{,}2&0{,}2&0{,}2&0{,}1\\0{,}0&0{,}0&0{,}0&0{,}0&0{,}0\\0{,}4&0{,}4&0{,}4&0{,}3&0{,}1\\0{,}6&0{,}6&0{,}5&0{,}3&0{,}1\\0{,}8&0{,}7&0{,}5&0{,}3&0{,}1\\0{,}9&0{,}7&0{,}5&0{,}3&0{,}1\end{bmatrix},$$

Тоді:

$$R=A\times B\cup\overline{A}\times\overline{B}=\begin{bmatrix}0{,}1&0{,}3&0{,}5&0{,}7&0{,}8\\0{,}1&0{,}3&0{,}5&0{,}7&0{,}9\\0{,}4&0{,}4&0{,}5&0{,}6&0{,}6\\0{,}6&0{,}6&0{,}5&0{,}4&0{,}4\\0{,}8&0{,}7&0{,}5&0{,}3&0{,}2\\0{,}9&0{,}7&0{,}5&0{,}3&0{,}1\end{bmatrix}.$$

Остаточно отримуємо:

$$Y_1=X_1\circ R=$$

$$=\left(\frac{0{,}36}{0{,}01};\frac{0{,}0}{0{,}02};\frac{0{,}64}{0{,}03};\frac{0{,}84}{0{,}04};\frac{0{,}96}{0{,}05};\frac{0{,}99}{0{,}06}\right)\circ\begin{bmatrix}0{,}1&0{,}3&0{,}5&0{,}7&0{,}8\\0{,}1&0{,}3&0{,}5&0{,}7&0{,}9\\0{,}4&0{,}4&0{,}5&0{,}6&0{,}6\\0{,}6&0{,}6&0{,}5&0{,}4&0{,}4\\0{,}8&0{,}7&0{,}5&0{,}3&0{,}2\\0{,}9&0{,}7&0{,}5&0{,}3&0{,}1\end{bmatrix}=$$

$$=(0{,}9/I;\ 0{,}7/II;\ 0{,}5/III;\ 0{,}6/IV;\ 0{,}6/V);$$

$$Y_2=X_2\circ R=$$

$$=\left(\frac{0{,}04}{0{,}01};\frac{0{,}0}{0{,}02};\frac{0{,}16}{0{,}03};\frac{0{,}36}{0{,}04};\frac{0{,}64}{0{,}05};\frac{0{,}81}{0{,}06}\right)\circ\begin{bmatrix}0{,}1&0{,}3&0{,}5&0{,}7&0{,}8\\0{,}1&0{,}3&0{,}5&0{,}7&0{,}9\\0{,}4&0{,}4&0{,}5&0{,}6&0{,}6\\0{,}6&0{,}6&0{,}5&0{,}4&0{,}4\\0{,}8&0{,}7&0{,}5&0{,}3&0{,}2\\0{,}9&0{,}7&0{,}5&0{,}3&0{,}1\end{bmatrix}=$$

$$=(0{,}81/I;\ 0{,}7/II;\ 0{,}5/III;\ 0{,}36/IV;\ 0{,}36/V).$$

Порівняємо отримані результати для $У_1$, і $У_2$ між собою, для чого скористаємося індексом ранжирування $H_5^1(Y_1, Y_2)$:

$$H_5^1(Y_1,Y_2) = \sup(\min(0{,}9_I;\ 0{,}81_I),\ \min(0{,}7_{II};\ 0{,}81_I;\ 0{,}7_{II}),\ \min(0{,}5_{III};\ 0{,}81_I;$$

$$0{,}7_{II};\ 0{,}5_{III}),\ \min(0{,}6_{IV};\ 0{,}81_I;\ 0{,}7_{II};\ 0{,}5_{III};\ 0{,}36_{IV}),\ \min(0{,}6_V;\ 0{,}81_I;\ 0{,}7_{II};$$

$$0{,}5_{III};\ 0{,}36_{IV};\ 0{,}36_V) = \sup(0{,}81;\ 0{,}7;\ 0{,}5;\ 0{,}36;\ 0{,}36) = 0{,}81;$$

$$H_5^1(Y_2,Y_1) = \sup(\min(0{,}81_I;\ 0{,}9_I),\ \min(0{,}7_{II};\ 0{,}9_I;\ 0{,}7_{II}),\ \min(0{,}5_{III};\ 0{,}9_I;$$

$$0{,}7_{II};\ 0{,}5_{III}),\ \min(0{,}36_{IV};\ 0{,}9_I;\ 0{,}7_{II};\ 0{,}5_{III};\ 0{,}6_{IV}),\ \min(0{,}36_V;\ 0{,}9_I;\ 0{,}7_{II};$$

$$0{,}5_{III};\ 0{,}6_{IV};\ 0{,}6_V) = \sup(0{,}81;\ 0{,}7;\ 0{,}5;\ 0{,}36;\ 0{,}36) = 0{,}81.$$

Використання детермінованого індексу ранжирування позбавило змоги зробити висновок про те, яка дорога більш небезпечна. Уточнимо рішення, використовуючи для порівняння інтегральний індекс ранжирування. При цьому для оцінки ступеня небезпеки введемо наступні числові значення: I - 1, II - 2, III - 3, IV - 4, V - 5 (це необхідно зробити, щоб якось чисельно оцінювати елементи носія. Можна було б піти іншим шляху - «небезпеку» їзди оцінювати за ступенем шкоди для здоров'я людини, наприклад, I - 5%, II - 10% і т.д.).

$$H_+(Y_1) = \frac{1+5}{2}\cdot 0{,}6 + \frac{1+2}{2}\cdot 0{,}2 + \frac{1+1}{2}\cdot 0{,}2 = 2{,}3.$$

Таким чином, не надто слизька дорога більш небезпечна, ніж дуже не слизька дорога. Відзначимо, що інтегральний індекс ранжирування дає більш точний результат у порівнянні з детермінованим індексом, так як враховує весь спектр розподілів нечітких множин. Наведений приклад є досить простим, має тривіальну відповідь і служить тільки ілюстрацією застосування теорії нечітких множин.

Як уже зазначалося, підхід з позицій теорії нечітких множин до математичного моделювання явищ або процесів найкращий в тих областях знань, в яких важко або навіть неможливо отримати точні кількісні оцінки. До таких розділів можна віднести екологію, метеорологію, педагогіку, психологію, соціологію і т.п.

2.8 Питання для самоперевірки

1. Що таке модель і моделювання? Цілі моделювання?
2. У яких галузях людської діяльності застосовуються моделі?
3. Чи можна віднести міфологію до моделювання? Чому?
4. Які існують типи моделювання?
5. У чому відмінність моделювання натурного від уявного?
6. Назвіть характерні особливості аналогових моделей.
7. Що таке когнітивна модель?
8. Які моделі називають змістовними?
9. Назвіть різновиди змістовних моделей.
10. Чим концептуальна модель відрізняється від змістовної?
11. Що таке формальна модель?
12. Яке моделювання називається математичним?
13. Які приклади математичних моделей вам відомі?
14. Сформулюйте гідності математичних моделей.
15. Наведіть і проаналізуйте різні приклади визначень математичних моделей.
16. Що може виступати в якості оператора при математичному моделюванні?
17. Чому інформаційні моделі можна вважати різновидом математичних?
18. За якими класифікаційними ознаками можна розділяти математичні моделі?
19. Чим прості моделі відрізняються від складних?
20. У чому полягає складність моделювання систем?
21. Які типи моделей можна виділити по виду оператора моделювання?
22. Чим відрізняються лінійні і нелінійні моделі?
23. Які типи моделей виділяються з вигляду параметрів моделювання?
24. Чим характерна дескриптивна модель?
25. Для яких цілей служить оптимізаційна модель?
26. Чим відрізняються стаціонарні і нестаціонарні моделі?
27. Як впливає розмірність на складність моделі? Чому?
28. Перелічіть способи опису невизначеності параметрів моделі.
29. Назвіть основні методи реалізації моделей, перерахуйте їх достоїнства і недоліки.
30. Що таке штучна система? В якому випадку сукупність окремих елементів буде системою, а в якому - ні? Наведіть приклади.
31. Коли на практиці можна застосовувати модель «чорного ящика»? Які основні недоліки має дана модель?

32. У чому складність побудови моделі «білого ящика»? Які види невизначеностей ви знаєте?

33. Що таке структурна схема системи? Чим відрізняється граф від мережі?

34. У чому полягає основна особливість ієрархічних структур

них схем? Де застосовуються ієрархічні структури?

35. Чому синтез вважають завершальним етапом аналізу?1. Сформулюйте основні причини появи невизначеностей.Які з них є суб'єктивними, а які - об'єктивними?

36. Як різниться невизначеність в залежності від повноти і якості опису?

37. Які основні причини виникнення неоднозначності ви знаєте?

38. Наведіть приклади лінгвістичних і фізичних неоднозначностей.

39. Як описується невизначеність математично?

40. Наведіть приклади математичного опису невизначеностей для різних фізичних явищ.

41. Коли в задачі математичного моделювання застосовується стохастичне опис змінних?

3 ОРГАНІЗАЦІЯ КОНТРОЛЮ ЗНАНЬ ТА ВМІНЬ СТУДЕНТІВ

Поточна та підсумкова оцінка рівня знань студентів здійснюється за модульною системою організації навчання та контролю знань студентів. Суми балів які отримав студент за всіма модульними контрольними роботами навчальної дисципліни, формують інтегральну оцінку поточного контролю даного студента з навчальної дисципліни. Вона є підставою для допуску до семестрового заліку.

Питання про виставлення семестрового заліку за підсумками модульного контролю розглядається тільки при умові, що фактична сума накопичених за семестр балів за практичну частину складає не менше 50% і за теоретичну частину не менш 50%. В іншому випадку студент вважається таким, що не виконав навчального плану дисципліни, і не допускається до заліку.

Інтегральна оцінка розраховується за формулою:

$$B = 0{,}75 * ОЗ + 0{,}25 * ЗКР \quad (1)$$

Семестровий залік з дисципліни виставляється студенту, у якого інтегральна сума за теоретичну та практичну частини складає не менше 60% від максимально можливої при умові, що залікова контрольна робота (ЗКР) має бути виконана ≥ 50% та В ≥ 60%.

Увесь теоретичний курс лекцій поділено на 2 модулі, практичний курс поділено на 2 модулі, які відповідають розділам робочої програми дисципліни. Оцінювання ступеню засвоєння знань з кожного модуля теоретичного курсу виконується за допомогою усного опитування, та письмової контрольної роботи.

Модулі включають:

Лекційний модуль ЗМ-Л1 (Максимальна сума балів – 25) з розділами

Лекційний модуль ЗМ-Л2 (Максимальна сума балів – 25) з розділами

Практична частина курсу ЗМ–П1 (Максимальна сума балів – 20). Контрольним заходом цього змістовного модулю є усне опитування та захист лабораторних робіт.

Практична частина курсу ЗМ–П2 (Максимальна сума балів – 30). Контрольним заходом цього змістовного модулю є усне опитування та захист лабораторних робіт.

Максимальна інтегральна сума балів, яку можна отримати за теоретичну та практичну частини курсу – 100 балів.

В цілому по курсу "Моделювання динамічних систем" розподіл кількості балів виглядає наступним чином:

Теоретична частина	40%	40 балів
Лабораторні роботи	40%	40 балів
Індивідуальна робота	20%	20 балів
Разом	100 %	100 балів

Для студентів, що виконали навчальний план, формується інтегральна сума балів – сума балів, що отримані з теоретичної та практичної частини курсу. На основі цього показника та згідно з розрахунками за формулою (1) відбувається виставлення семестрової оцінки згідно з таблицею.

Інтегральна сума з навчальної дисципліни, що набрана студентом			
Відсоток	**Бал**	**Бал за шкалою ЄКТАС**	**Традиційна оцінка**
1% – 34,9% від максимальної суми	1 – 34,9	FX	не зараховано
35% – 59,9% від максимальної суми	35 – 59,9	F	не зараховано
60% – 63,9% від максимальної суми	60 – 63,9	E	зараховано
64% – 73,9% від максимальної суми	64– 73,9	D	зараховано
74% – 81,9% від максимальної суми	74 – 81,9	C	зараховано
82% – 89,9% від максимальної суми	82 – 89,9	B	зараховано
>=90% від максимальної суми	>=90	A	зараховано

Поточні оцінки в «Інтегральній відомості оцінки знань студентів» підсумкового семестрового контролю виставляються викладачем без присутності студента в останній день аудиторних занять у вигляді кількісної оцінки (бал успішності) за підсумками контролюючих заходів.

Одержана накопичувальна підсумкова оцінка виставляється викладачем у заліково-екзаменаційну відомість встановленого зразка, відповідно до шкали ЄКТАС.